弾性支持された液体貯蔵円筒タンクの地震応答解析*

藤 田 勝 久**
Katsuhisa FUJITA

1. ま え が き

液体貯蔵円筒タンクは重要産業施設としてその耐震安全性は非常に重要視されている。この方面の研究は Housner 理論⁽¹⁾⁽²⁾や速度ポテンシャル理論⁽³⁾⁽⁴⁾による比較的簡便な動的耐震解析法の研究から、タンクをかく体として液体との連成振動を考慮した研究^{(5)~(8)}まで多くの報告がある。また、著者も合理的な耐震解析法に関する一提案という立場より、二、三の報告^{(9)~(12)}をしている。しかし、これらはタンク基礎を剛として取扱っているが、基礎の種類によっては必ずしも剛とみなせない場合も存在する。このように基礎を弾性体として取扱った研究としては Bauer⁽¹³⁾らが液体圧を速度ポテンシャル理論で求め、かく理論による釣り合い方程式に代入して解く方法を示している。けれども、数値計算は鉛直方向の自由振動についてのみ実施しているにすぎない。このほか Bhuta⁽¹⁴⁾は底板のみを弾性体として解いているが、いずれもこのままでは地震入力のような動的応答解析に応用することはできない。

それゆえ、ここではすでに報告している前報⁽¹²⁾と同じようにタンクをかく体として取扱い、自由液面の振動および側板、底板の振動を考慮した地震応答解析法を示す。そして数値計算を行い、タンク基礎の剛性および底板の厚さなどがタンクの振動特性および地震応答特性に与える影響について考察する。

2. 解 法

2.1 基礎式

2.1.1 タンクかく体 図1に示すように側壁板厚が一様でなく、弾性基礎に固定された液体貯蔵円筒タンクについてその底面に水平方向地震動が加わる場合を考える。この場合の弾性基礎は斜線で示した基盤から上下方向には弾性支持であり、水平方向には剛支持になっていると考える。なお、この図では便宜的にウ

ィンクラー地盤として表示しているが、必ずしもこれに限定していない。この図で、 (r, θ, x) は円筒座標系を、 R はタンクの半径を、 l はタンクの背の高さを、 h はタンクの板厚を、 H は液深を、 $\ddot{z}$ は水平方向地震加速度を示す。タンクは側板、底板からなるかく体と考え、その子午線方向、回転角方向、かく体表面に垂直方向の変位成分を $u(r, \theta, x, t)$, $v(r, \theta, x, t)$, $w(r, \theta, x, t)$ と表し、これらを空タンクの固有関数 u_{ks} , v_{ks} , w_{ks} を用いて次式により表す。ただし、円筒かく部の $w(R, \theta, x, t)$ は外向きを正とし、底板部の $w(r, \theta, 0, t)$ は上向きを正とする。

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, x, t) &= \sum_{k=1}^{\bar{n}} \sum_{s=1}^{\bar{n}} u_{ks}(r, x) q_{ks}(t) \cos(k\theta) \\ v(r, \theta, x, t) &= \sum_{k=1}^{\bar{n}} \sum_{s=1}^{\bar{n}} v_{ks}(r, x) q_{ks}(t) \sin(k\theta) \\ w(r, \theta, x, t) &= \sum_{k=1}^{\bar{n}} \sum_{s=1}^{\bar{n}} w_{ks}(r, x) q_{ks}(t) \cos(k\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $q_{ks}(t)$ は円筒かく体振動の円周方向 k 次および軸方向 s 次の基準座標を、 $n, \bar{n}$ は軸方向モード数および円周方向波数を、 t は時間を示す。

また、円筒かく体に蓄えられるひずみエネルギー U_E および運動エネルギー K_E も前報と同様つぎのように

図1 弾性基礎上の液体貯蔵円筒タンク

* 昭和55年8月23日 第58期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和55年9月25日。

** 正員、三菱重工業株式会社高砂研究所 (〒676 高砂市荒井町新浜 2-1-1)。

表される。

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} K_{ks} \dot{q}_{ks}^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$K_E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} M_{ks} \dot{q}_{ks}^2 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\dot{q}_{ks}$ は q_{ks} の時間に関する微分を意味する。なお、 K_{ks} と M_{ks} は文献 (10) では側板のみに対して与えられていたが、ここでは弾性支持された底板をも含めて計算する必要がある、次式のようなになる。

$$\begin{aligned} K_{ks} = & \frac{ER}{1-\nu^2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ (\varepsilon_x)_{ks}^2 + (\varepsilon_y)_{ks}^2 + 2\nu(\varepsilon_x)_{ks}(\varepsilon_y)_{ks} + \frac{1-\nu}{2} (\gamma_{xy})_{ks}^2 \right\} d\zeta d\theta dx \\ & + \frac{E}{1-\nu^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ (\varepsilon_x)_{ks}^2 + (\varepsilon_y)_{ks}^2 + 2\nu(\varepsilon_x)_{ks}(\varepsilon_y)_{ks} + \frac{1-\nu}{2} (\gamma_{xy})_{ks}^2 \right\} r d\zeta d\theta dr \\ & + \int_0^R \int_0^{2\pi} k_s(x) w_{ks}^2(r, 0) \cos^2(k\theta) r d\theta dr \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{ks} = & \rho R \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \{ u_{ks}^2(R, x) \cos^2(k\theta) + v_{ks}^2(R, x) \sin^2(k\theta) + w_{ks}^2(R, x) \cos^2(k\theta) \} d\zeta d\theta dx \\ & + \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \{ u_{ks}^2(r, 0) \cos^2(k\theta) + v_{ks}^2(r, 0) \sin^2(k\theta) + w_{ks}^2(r, 0) \cos^2(k\theta) \} r d\zeta d\theta dr \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、 E は縦弾性係数を、 ν はポアソン比を、 $(\varepsilon_x)_{ks}$ 、 $(\varepsilon_y)_{ks}$ 、 $(\gamma_{xy})_{ks}$ は式 (1) の円周方向 k 次、軸方向 s 次の変位モード成分のみによるひずみ量を、 $k_s(x)$ は底板の単位面積当たりのばね定数を示す。

さらに、タンク底面に作用する水平地震動 $\ddot{z}$ による励振エネルギー F_E もつぎのように表される。

$$\begin{aligned} F_E = & \left[\pi R \rho \int_0^l h(x) \sum_{s=1}^{\infty} \{ w_{1s}(R, x) - v_{1s}(R, x) \} q_{1s} dx \right] \ddot{z} \quad (k=1 \text{ のとき}) \\ = & 0 \quad (k \neq 1 \text{ のとき}) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、 ρ はかく体の密度を、 $h(x)$ は h が x の関数であることを示す。

2.1.2 タンク内液体 円筒タンク内の液体の挙動について考える。この場合の境界条件は自由液面、タンク側板については前報⁽¹²⁾と同じ条件となり、底板についてのみ異なるが、これらは円筒座標で表すと次式となる。

$$(i) \quad (\partial \Phi / r \partial \theta)_{\theta=0, \pi} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$(ii) \quad (\partial \Phi / \partial x)_{x=0} = -\dot{w}(r, \theta, 0, t) \dots\dots\dots (8)$$

$$(iii) \quad (\partial \Phi / \partial r)_{r=R} = -\dot{w}(R, \theta, x, t) - \ddot{z}(t) \cos \theta \dots\dots\dots (9)$$

また、連続の条件より Φ はつぎのラプラスの方程式を満足しなければならない。

$$\nabla^2 \Phi = \partial^2 \Phi / \partial r^2 + \partial \Phi / r \partial r + \partial^2 \Phi / r^2 \partial \theta^2 + \partial^2 \Phi / \partial x^2 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式 (10) の解をつぎのように仮定する。

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^m {}_1\Phi_{kp} \dot{Q}_{kp} + \sum_{s=1}^n {}_2\Phi_{ks} \dot{q}_{ks} + \sum_{s=1}^n {}_3\Phi_{ks} \dot{q}_{ks} \right) - r \dot{z} \cos \theta \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 Q_{kp} は液面振動の円周方向 k 次、半径方向 p 次の基準座標を示す。式 (11) が式 (7)~(9) の境界条件を満足するように、速度ポテンシャルをつぎの3個の速度ポテンシャルを重ね合わせるにより表示する。

(1) タンクを剛としたときの自由液面の振動に対する速度ポテンシャル ${}_1\Phi_{kp}$ (前報⁽¹²⁾と同じ)。

(2) 自由液面と底板は振動しないとしてタンク側板と液体の連成振動を考慮して求めた速度ポテンシャル ${}_2\Phi_{ks}$ (前報⁽¹²⁾と同じ)。

(3) 自由液面及び側板は振動しないとして底板と液体の連成振動を考慮して求めた速度ポテンシャル ${}_3\Phi_{ks}$ 。このようにして次式が得られる。

$$\begin{aligned} {}_1\Phi_{kp} = & {}_1\phi_p^{(k)} \cos(k\theta) = J_k(\kappa_p^{(k)} r) \cosh(\kappa_p^{(k)} x) \cos(k\theta) \\ {}_2\Phi_{ks} = & {}_2\phi_s^{(k)} \cos(k\theta) = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2I_k(\lambda_i r/H)}{\lambda_i I_k'(\lambda_i R/H)} \cos\left(\frac{\lambda_i x}{H}\right) \int_0^R w_{ks}(R, x) \cos\left(\frac{\lambda_i x}{H}\right) dx \cos(k\theta) \\ {}_3\Phi_{ks} = & {}_3\phi_s^{(k)} \cos(k\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} J_k(\kappa_j^{(k)} r) \frac{\sinh\{\kappa_j^{(k)}(H-x)\}}{\cosh(\kappa_j^{(k)} H)} \frac{\int_0^R w_{ks}(r, 0) J_k(\kappa_j^{(k)} r) r dr}{\kappa_j^{(k)} \int_0^R \{J_k(\kappa_j^{(k)} r)\}^2 r dr} \cos(k\theta) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d}{dr} \{ J_k(\kappa_\alpha^{(k)} r) \} \right]_{r=R} &= 0 \quad (\alpha = p, j) \\ \lambda_i &= \left(i + \frac{1}{2} \right) \pi \\ I_k'(\lambda_i R/H) &= I_{k-1}(\lambda_i R/H) - \frac{kH}{\lambda_i R} I_k(\lambda_i R/H) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに, J_k は k 次の第1種ベッセル関数を, I_k は k 次の第1種変形ベッセル関数を示す.

つぎに, タンク内液体の取扱いについて考える. 前報と同様, 式 (11), (12) で表される速度ポテンシャルを持つタンク内液体の位置のエネルギー U_L は次式で与えられる.

$$U_L = \frac{\rho_L g}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[- \sum_{k=1}^{\bar{n}} \left\{ \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial_1 \Phi_{kp}}{\partial x} \right)_{x=H} Q_{kp} + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial_2 \Phi_{ks}}{\partial x} \right)_{x=H} q_{ks} + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial_3 \Phi_{ks}}{\partial x} \right)_{x=H} q_{ks} \right\} \right]^2 r d\theta dr \dots\dots\dots (14)$$

一方, タンク内液体の運動エネルギー K_L は前報と同様にして求めることができる. すなわち, 図2に示す円筒タンクの側板の境界 S_1 , 自由液面の境界 S_2 および底板の境界 S_3 を考慮してグリーンの定理を用いると次式が得られる.

$$K_L = \frac{\rho_L}{2} \left\{ \int_{S_1} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=R} dS_1 + \int_{S_2} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=H} dS_2 - \int_{S_3} \left(\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dS_3 \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) に式 (8), (9) の境界条件を用いて式 (11) を代入すると式 (14) と同様に具体的な段階の表示式が得られる.

2.2 固有値解析 タンクが自由振動していると考え, この場合, タンクが固定されている基盤は静止しているから, 式 (9) の境界条件式で z の項は存在しない. このときのひずみエネルギー U_E と位置のエネルギー U_L , さらに運動エネルギー ($K_E + K_L$) をラグランジュの運動方程式に代入すると次式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \{ \partial(K_E + K_L) / \partial \dot{X} \} + \partial(U_E + U_L) / \partial X = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ここに, $X = Q_{kp}$ (または q_{ks})

式 (16) に式 (2), (3), (14) および式 (15) を代入すると次式が得られる.

$$([M_1] + [M_2]) \left\{ \begin{matrix} \ddot{Q}_k \\ \ddot{q}_k \end{matrix} \right\} + ([K_1] + [K_2]) \left\{ \begin{matrix} Q_k \\ q_k \end{matrix} \right\} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} [M_1] &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & M_{kp}^L & & 0 \\ 0 & & & \\ & & & 0 \\ & 0 & & M_{ks} \\ & & 0 & \end{bmatrix} \\ [M_2] &= \begin{bmatrix} 0 & a_{ps}^{(k)} + b_{ps}^{(k)} + i_{ps}^{(k)} + j_{ps}^{(k)} \\ a_{sp}^{(k)} + b_{sp}^{(k)} + i_{sp}^{(k)} + j_{sp}^{(k)} & e_{ss}^{(k)} + f_{ss}^{(k)} + l_{ss}^{(k)} + l_{s's}^{(k)} + m_{ss}^{(k)} + m_{s's}^{(k)} + n_{ss}^{(k)} + n_{s's}^{(k)} \end{bmatrix} \\ [K_1] &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & K_{kp}^L & & 0 \\ 0 & & & \\ & & & 0 \\ & 0 & & K_{ks} \\ & & 0 & \end{bmatrix} \\ [K_2] &= \begin{bmatrix} 0 & c_{ps}^{(k)} + k_{ps}^{(k)} \\ c_{sp}^{(k)} + k_{sp}^{(k)} & g_{ss}^{(k)} + p_{ss}^{(k)} + p_{s's}^{(k)} + r_{ss}^{(k)} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

図2 円筒タンクと液体との境界面

式 (18) の係数マトリックスの各項の値は [付録] の表 1 に示すとおりである。式 (17) で $[M_2]=[K_2]=0$ とすると、おのおの独立した剛体壁タンクにおける、自由液面の運動方程式と空タンクの運動方程式になる。式 (17) に $[Q_k, q_k]^T = \{\phi_k\} e^{i\omega_k t}$ を代入するとつぎのような固有方程式が得られる。

$$[-\omega_k^2([M_1]+[M_2])+[K_1]+[K_2]]\{\phi_k\}_e=0 \quad (19)$$

この式 (19) を解けば、 k の各値に対して $(m+n)$ 個の連成振動系の固有値 ω_k およびこれに対応する固有ベクトル $\{\phi_k\}_e$ が求められる。これより連成振動系各次の変位 u, v, w と液体圧 p と波高 η に関する固有関数が得られる。

2.3 地震応答解析 ラグランジュの運動方程式にひずみエネルギー U_E 、位置のエネルギー U_L 、運動エネルギー (K_E+K_L) および励振エネルギー F_E を代入すると次式が得られる。

$$([M_1]+[M_2])\left\{\frac{\ddot{Q}_k}{\ddot{q}_k}\right\}+([K_1]+[K_2])\left\{\frac{Q_k}{q_k}\right\}=-(F)\ddot{z} \quad (20)$$

ここに、

$$\{F\}=[d_p, h_s]^T$$

$$d_p = -\frac{\pi R \rho_L}{\kappa_p^{(1)}} J_1(\kappa_p^{(1)} R) \sinh(\kappa_p^{(1)} H) \quad (k=1)$$

$$=0 \quad (k \neq 1)$$

$$h_s = \pi R \rho \int_0^H h(x) \{w_{1s}(R, x) - v_{1s}(R, x)\} dx + \frac{\pi R^2 \rho_L}{2} \int_0^H w_{1s}(R, x) dx$$

$$-\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_s^{(1)})_{r=R}\} dx - \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_s^{(1)})_{r=R}\} dx - \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \left(\frac{\partial \phi_s^{(1)}}{\partial x}\right)_{x=H} r^2 dr$$

$$-\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \left(\frac{\partial \phi_s^{(1)}}{\partial x}\right)_{x=H} r^2 dr - \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R w_{1s}(r, 0) r^2 dr \quad (k=1)$$

$$=0 \quad (k \neq 1)$$

.....(21)

式 (20) にモード解析法を適用するため、式 (20) の解は次式で表されとする。ただし、 $k \neq 1$ のとき式 (21) より式 (20) の右辺の強制力は零となるので、以下の展開式においては $k=1$ として添字 k を省略する。

$$\left\{\frac{Q}{q}\right\} = \sum_{e=1}^{m+n} \{\phi_e\} T_e(t) = [\phi] \{T(t)\} \quad (22)$$

表 1 式 (18) の係数マトリックスの各項の値

$M_{kp}^L = \pi \rho_L \int_0^R \left\{ (\phi_p)_{x=H}^{(k)} \left(\frac{\partial \phi_p^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$	$k_{ps}^{(k)} = \pi g \rho_L \kappa_p^{(k)} \sinh(\kappa_p^{(k)} H) \times \int_0^R J_k(\kappa_p^{(k)} r) \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$
$a_{ps}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_p^{(k)})_{r=R}\} \{-w_{ks}(R, x)\} dx$	$l_{ss}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_s^{(k)})_{r=R}\} \{-w_{ks}(R, x)\} dx$
$b_{ps}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_p^{(k)})_{x=H}\} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$	$l_{s's}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_s^{(k)})_{r=R}\} \{-w_{ks'}(R, x)\} dx$
$K_{ks} = \omega_{ks}^2 M_{ks}$	$m_{ss}^{(k)} = -\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_s^{(k)})_{x=0}\} \{-w_{ks}(r, 0)\} r dr$
$K_{kp}^L = g \pi \rho_L \int_0^R \left\{ \left(\frac{\partial \phi_p^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\}^2 r dr = \omega_{kp}^2 M_{kp}^2$	$m_{s's}^{(k)} = -\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_s^{(k)})_{x=0}\} \{-w_{ks'}(r, 0)\} r dr$
$c_{ps}^{(k)} = g \pi \rho_L \int_0^R \left\{ \left(\frac{\partial \phi_p^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$	$n_{ss}^{(k)} = -\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_s^{(k)})_{x=0}\} \{-w_{ks}(r, 0)\} r dr$
$e_{ss}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_s^{(k)})_{r=R}\} \{-w_{ks}(R, x)\} dx$	$n_{s's}^{(k)} = -\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_s^{(k)})_{x=0}\} \{-w_{ks'}(r, 0)\} r dr$
$f_{ss}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^H \{(\phi_s^{(k)})_{r=R}\} \{-w_{ks'}(R, x)\} dx = e_{ss'}^{(k)}$	$p_{ss}^{(k)} = \pi g \rho_L \int_0^R \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$
$g_{ss}^{(k)} = \pi g \rho_L \int_0^R \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$	$p_{s's}^{(k)} = \pi g \rho_L \int_0^R \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$
$i_{sp}^{(k)} = \frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_p^{(k)})_{x=H}\} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$	$r_{ss}^{(k)} = \pi g \rho_L \int_0^R \left\{ \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \left(\frac{\partial \phi_s^{(k)}}{\partial x} \right)_{x=H} \right\} r dr$
$j_{sp}^{(k)} = -\frac{\pi R \rho_L}{2} \int_0^R \{(\phi_p^{(k)})_{x=0}\} \{-w_{ks}(r, 0)\} r dr = -i_{sp}^{(k)}$	

式 (22) を式 (20) に代入し、左側より $[\phi]^T$ を両辺に乗じると対称マトリックスにおける固有関数の直交性より、たがいに独立な $(m+n)$ 個の運動方程式が得られる。この各式に振動モード間の連成の影響を無視して減衰項を加えれば近似的に次式が得られる。

$$\ddot{T}_c(t) + 2h_c\omega_c\dot{T}_c(t) + \omega_c^2 T_c(t) = -\beta_c \ddot{z} \dots\dots (23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \omega_c^2 &= K_c/M_c, \quad \beta_c = \{\phi\}_c^T [F]/M_c \\ M_c &= \{\phi\}_c^T ([M_1] + [M_2]) \{\phi\}_c \\ K_c &= \{\phi\}_c^T ([K_1] + [K_2]) \{\phi\}_c \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

また、 $T_c(t)$ は連成振動系の c 次の基準座標を、 h_c は c 次の減衰比を、 β_c は同じく c 次の刺激係数を示す。

以上より、応答スペクトル法による地震応答解析や時刻歴モード解析による地震応答解析をすることが出来る。

3. 数 値 計 算

基礎地盤の慣用的取扱いとしては (i) ウィンクラー地盤、(ii) 弾性体地盤に大別されることが多い。ウィンクラー地盤では力の加わった部分のみ変形し、そのごく近傍の地盤では全く変形しないことになる。しかし、実際の地盤は連続的に変形すると考えられ、均質、等方な完全弾性体として表現される弾性体地盤の方が現実的であるといわれている。しかし、ここでは計算モデル化を簡潔にするためにウィンクラー地盤として取扱う。

それゆえ、図1のようにタンク底板は基盤より上下方向にのみばねで支持されているとして、モデル化し数値計算する。なお、円周方向次数は $k=1$ としている。

3.1 ウィンクラー地盤の定数 k_s がタンクの振動特性に与える影響 タンクの形状を一定に保って底板を支持するウィンクラー地盤定数 k_s を変化させてその振動特性がどのように変化するか検討する。図3はスロッシングモードの一次から三次までの固有振動数および側板主体のバルジングモードの一次から五次までの固有振動数に対する k_s の影響を示す。縦軸はスロッシングおよびバルジングの固有振動数をともに $\sqrt{g/R}$, $1/H^2 \sqrt{EI/\mu_T}$ で除して無次元化している。また、横軸はウィンクラー地盤定数を E/R で除して無次元化している。ここに、タンク諸元はつぎのとおりである。

$$l/R = H/R = 1.0 \text{ (満液時)}$$

$$h_s/R = 0.001 \text{ (} h_s \text{ は側板の板厚を示す)}$$

$$h_B/R = 0.0005 \text{ (} h_B \text{ は底板の板厚を示す)}$$

$$E = 206 \text{ GPa } (= 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2) \text{ (} E \text{ は縦弾性係数を示す)}$$

$$\nu = 0.3, \quad \rho_L/\rho = 0.127$$

また、

$$I = \pi h_s R^3, \quad \mu_T = 2\pi R h_s \rho + \pi R^2 \rho_L, \quad f_c = \omega_c/2\pi$$

なる関係がある。

タンク基礎の支持条件については、底板は一様に単位面積当たり k_s なるばねで上下方向に支持されているとし、側板の最下端はさらに円周方向単位長さ当たり $k_l (= k_s R/80)$ のばねで上下方向に支持されているとしている。側板の最下端をばね支持することは、実機タンクで底板のアニュラ部の支持剛性が他の部分に比べて高い場合に相当しており、以下ことわりのない限りこのような弾性支持状態で数値計算している。なお、この側板下端の支持がない場合も比較のため2ケース数値計算している。

図3の実線、一点鎖線で示した数値計算結果より、スロッシングの固有振動数はタンク基礎の剛性の低下に従ってわずかに小さくなり、4けため位に相違が現れる程度である。このことは前報⁽¹²⁾の剛基礎上の弾性壁タンクのスロッシングの固有振動数が剛壁タンクのスロッシングの固有振動数より低くなるのと同じ傾向である。一方、バルジングの固有振動数はロッキング振動に相当する一次モードでは $k_s R/E$ の低下に従って急激に小さくなるのがわかる。また、この図の $k_s R/E = 50$ の場合は前報の剛基礎上のタンクの場合とほぼ一致する。なお、同時に、側板の最下端にさらに追加された支持ばねがない場合の計算結果の例をバルジングについて○印で示すが、一次の固有振動数はさらに低下することがわかる。バルジングの高次およびスロッシングについてはほとんど変化していない。

図3 ウィンクラー地盤の剛性とタンクの固有振動数との関係、(円周方向次数一次)

つぎに、振動モードに対するウィンクラー地盤の定数 k_s の影響を検討する。図4(a), (b)は図3と同じ寸法諸元のタンクに関して $k_s R/E$ を変化させた場合の振動モードの比較を、スロッシングモードの一次と二次、バルジングモードの一次と二次について示す。前報⁽¹²⁾と同様、タンク変位と波高モードは cm, 液体圧モードは KPa を 98.07 倍した単位 (kgf/cm² の単位) に保って規準化している。実線は $k_s R/E = 0.952 \times 10^{-3}$, 破線は $k_s R/E = 50$ とした場合を示し、破線は図3の固有振動数の比較と同様前報で報告した剛基礎の場合とほぼ一致する。図4(a)のスロッシングの一次モードについては、側板と底板の液体圧および波高に関して実線と破線の両者は一致するが、側板の半径方向変位モードの分布形の差異は実線の方がタンクのロッキングの影響を受けて1けた大きくなっている。さらに底板の最外周のアニュラ部で急激な変形が生じている。二次モード以上でもこのような傾向は弱くなるが存在する。

一方、図4(b)のバルジングの一次モードでは液体圧の分布も両者で少し異なり、側板の変位および波高は実線の方が1けた位大きくなっている。さらに、実線では底板の最外周の近傍、すなわち、アニュラ部で急激な変形が生じている。なお、これらの振動モー

ドの特徴は側板の最下端にばねがない場合はいっそう強調された形になるが、モード形は巨視的には同じなので省略する。

このような急激なアニュラ部の変形は、基礎をウィンクラー地盤として取扱わずに弾性体地盤とすれば、底板が垂直方向に変形する時の水平方向の剛性による変形抵抗により少し緩和されると考えられる。基礎のモデル化の良し悪しについての検討は別の機会に行うとしても、ここで得られたタンクのアニュラ部の急激な変形などについては、佐々木ら⁽¹⁵⁾のタンク基礎の構造解析結果や国生ら⁽¹⁶⁾のタンク基礎の地震時の安定性の実験結果と定性的によく一致しているといえる。

なお、つぎに基礎の剛性が満液タンクのスロッシングの一次モード形をどのように変形させるか検討する。

図5は図3と同じタンク寸法諸元について、無次元化された地盤剛性 $k_s R/E$ を変化させて振動モードの変化状況を比較している。これらの図より、 k_s の値が減少するに従ってタンク側板と底板のアニュラ部の変形が液体圧に比べて非常に大きくなるような振動モードの分布形の差異が生ずることがわかる。なお、側板の相対的な変形は小さくなっている。また、 k_s 値が大きくなって剛基礎に近づくほど、タンク側板の固定部近傍の変形が著しくなることがわかる。

3.2 タンク底板の板厚 t_B

がタンクの振動特性に与える影響 ここでは、タンク底板の板厚とその半径の比 t_B/R をパラメータにとってその振動特性に与える影響を検討した。この場合のタンクその他の寸法諸元は図3と同一であり、底板の支持剛性は $k_s R/E = 0.952 \times 10^{-3}$ であり、側板の最下端は $k_t/E = k_s R/80E$ のばねでさらに支持されている。図6はバルジングモードの一次から五次までの固有振動数に対するタンク底板の板厚の影響を示す。縦軸は図3と同様、固有振動数を $(1/H^2)\sqrt{EI/\mu T}$ で除して無次元化している。また、横軸は底板の厚さを R で除して無次元化している。この図より

図4 タンク基礎の剛性が振動モードに与える影響 (円周方向次数一次)

わかるように一次モードでは底板の板厚の低下とともに固有振動数がかなり低くなることがわかる。なお、スロッシングについてはほとんど差異がない。

つぎに、図7は図6と同じタンク寸法諸元で h_B/R を変化させたときのバルジングの一次モードの比較を示す。実線は $h_B/R=0.2 \times 10^{-3}$ 、破線は $h_B/R=1.0$

$\times 10^{-3}$ とした場合を示す。

この図より液体圧の差異はほとんどないが、タンク側板の変位の分布形の差異は実線の方が大きいことがわかる。また、底板では、アニュラ部近傍で急激な変形が生じており、実線の方が顕著である。このように、板厚が低下するにつれてアニュラ部の変形部分が局部的になると、ウィンクラー地盤の定数 k_v 値が同じであっても、変形した部分のみに反力が働くだけであるので、合計した支持剛性は低下する。このことが固有振動数の低下の原因であると考えられる。なお、スロッシングモードについても同様な傾向が認められる。

3.3 基礎剛性がタンクの地震応答特性に与える影響 前報と同様、応答スペクトル法による地震応答解析を行い、その応答特性を検討する。ここでは、簡単化のため各次数で加速度応答スペクトル値を $S_{Ae} = 100 \text{ cm/s}^2 (= \text{gal})$ として数値計算した。タンク寸法諸元は図3と同じで $R=1000 \text{ cm}$ 、 $\rho = 7.977 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 (= 8.032 \times 10^{-6} \text{ kgfs}^2/\text{cm}^4)$ とし、基礎剛性として無次元化されたウィンクラー地盤定数 $k_v R/E$ をパラメータにしている。

図8は各次数を二乗和平方根法で合成した応答値を示した図である。実線は $k_v R/E = 0.952 \times 10^{-3}$ 、

図5 タンク基礎の剛性と満液タンクのバルジングの一次モードとの関係（円周方向次数一次）

図6 弾性基礎上のタンク底板の板厚とタンクの固有振動数との関係（円周方向次数一次）

図7 弾性基礎上のタンク底板の板厚が振動モードに与える影響（円周方向次数一次）

図8 ウィンクラー地盤の剛性がタンクの地震応答特性に与える影響

破線は $k_v R/E=50$ とした場合を示し、破線は前報で報告した剛基礎の場合に収束する傾向を持つ。この図より、応答波高値に関しては、両者はよく一致することがわかる。また、応答液体圧について側板上部ではほとんど一致しており、底板の応答液体圧は少し実線の方が小さくなっている。一方、側板の半径方向の応答変位は振動モード形と同様、実線の方が1けた位大きくなっており、さらに底板のタンク軸線方向の応答変位がタンクのアニュラ部近傍で急激に大きくなっていることがわかる。また、この図より基礎の剛性が高いときはタンク側板底部の変形、逆に低いときには底板のアニュラ部の変形が大きくなるといえる。最近の米国における1971年のサンフェルナンド地震や、我が国の1978年の宮城県沖地震においても、このような応答解析結果に関係のあるようなタンクの地震被害例が発生しているようである。

4. 結 論

以上の比較検討よりつぎのような結論が得られる。

(1) スロッシングモードに関するタンク基礎の剛性の影響は、固有振動数、液体圧モード、波高モードに対してほとんど無視できるほど小さい。しかし、側板の変位モードの分布形は基礎の剛性の低下とともに急激に大きくなり、さらに底板のアニュラ部で急激に変形するような変位モード形が生ずる。

一方、バルジングモードに関しては、基礎の剛性の低下とともに固有振動数は一次では著しく低下する。また振動モードについては、液体圧モードの相違は小さいが波高モードおよび側板の変位モードの分布形は

基礎の剛性の低下とともに非常に大きくなる。底板の変位モードは、スロッシングモードと同様アニュラ部で急激に変形するようなモード形になる。このような変形は他文献⁽¹⁶⁾による実験結果とも定性的に一致している。なお、基礎の剛性が高くなると逆にアニュラ部の変位モードの分布形は小さくなるがタンク側板の固定部近傍の局部変形が著しい変位モードになるといえる。

(2) バルジングモードについては、底板の板厚が低下するに従って主として固有振動数の低下と、波高モードとタンク側板の変位モードの分布形の増大、さらに底板の変位モードのアニュラ部の急激な局部変形が生じる。

(3) 応答スペクトル法による地震応答解析結果より、タンク基礎の剛性が高いときはタンク側板の固定部の近傍の変形が著しい。一方、剛性が低くなると、タンク側板の全体のロッキング振動状の変形が非常に大きくなり、さらに底板のアニュラ部の局部的な変形が著しくなる。これらの事実は実地震によるタンクの被害結果とも対応している面があり、原因説明および対策の一助になると考えられる。

〔付録〕 式(18)の係数マトリックスの各項の値を表1に示す。

文 献

- (1) Housner, G.W., *Bull. Seismolog'l Soc. Am.*, 47-1 (1957), 15.
- (2) U.S. AEC., *TID Report-7024* (1963).
- (3) Senda, K. and Nakagawa, K., *4th J. Nat. Cong. App. Mech.*, (1954).
- (4) 曾我部・ほか2名, 機誌, 79-689 (昭51), 305.
- (5) Veletsos, A.S. and Yang, J.Y., *U.S.-Jpn. Semi. for Earthquake Eng. Res. Emph. on Lifeline Sys. Jpn.*, (1976).
- (6) Mouzakis, T., *Ph. D. Dissertation, Univ. Massachusetts, Dep. of Civil Eng.*, (1976).
- (7) Shaaban, S.H. and Nash, W.A., *Univ. Massachusetts Rep. to Nat. Sci. Found.*, (1976-7).
- (8) Sakai, F. and Sakoda, H., *Proc. 4th Jpn. Earthquake Eng. Symp.*, (1975), 623.
- (9) Fujita, K. and Shiraki, K., *Proc. 4th Jpn. Earthquake Eng. Symp.*, (1975), 623.
- (10) 藤田, 機論, 46-410, C (昭55), 1225.
- (11) 藤田, 機論, 47-413, C (昭56), 20.
- (12) 藤田, 機論, 47-422, C (昭56), 1296.
- (13) Bauer, H. F. and Siekmann, J., *Ing.-Arch.*, 40 (1971), 266.
- (14) Bhuta, P. G. and Koval, L. R., *J. Acous. Soc. Am.*, 36-11 (1964) 2041.
- (15) 佐々木・ほか4名, 日本海事協会会誌, 163 (昭53), 110.
- (16) 国生・ほか5名, 土と基礎, 25-12 (昭52), 1042.

討 論

〔質問〕 清水 信行（千代田化工建設会社）

（1）図5に関連して次の点をお伺いしたい。タンクの側板、底板は応力的に見てタンク基礎が硬い方が有利なのか、軟らかい方が有利なのか。

（2）図8は通常の（短周期）地震応答とは異なった結果を示しているように見える。これに関し次の点をお伺いしたい。

（i） 応答に考慮したモードとその次数。

（ii） $S_{Ac}=100 \text{ gal}$ ＝一定にして応答計算した想定物理モデルと、このような一定値をとることの物理的妥当性。

（iii） 各モードの想定減衰定数。

（iv） 各モードの刺激係数の値。

〔回答〕 （1）ここでは、応力についてまで検討していないが、図5の変形モードより、基礎が軟らかい程、側板は剛体的な運動を行い、底板のアニュラ部に変形が集中する。一方、基礎を剛にすると、側板の固定部近傍の変形が著しくなる。このことより、応力の厳しさを推測すると、ここで検討した寸法諸元に近いタンクでは、基礎が軟らかい程側板は底板に比べて相対的に有利になり、一方硬い場合はこの逆になると考えられる。側板、底板を含めてタンク構造体の全体としてどちらが有利かについては一方的な結論を述べることはできず、地震入力の特徴をも考慮して、側板と底板との接続部近傍に変形が集中しないように最適設計する必要があると考えられる。

（2）（i） スロッシングモードについては5次まで、バルジングモードについては10次まで考慮して地震応答計算を実施している。

（ii） 応答スペクトル法による地震応答解析は入力として構造物の設置位置での応答スペクトルが用意される。これはその設置地域の地震発生条件や地盤基礎条件さらには耐震設計上の重要度に応じて決められることが多いが、これは具体的な設計段階でなければわからない。それゆえ、ここでは $S_{Ac}=100 \text{ gal}$ ＝一定と

して数値計算を簡潔化し、本解法による地震応答特性を理解しやすくした。

また、本応答解析結果は短周期領域の地震応答だけを考慮したのでなく、以上のように長周期領域の成分も含まれている。

（iii） 上述のように $S_{Ac}=100 \text{ gal}$ ＝一定としているので、本数値計算に際しては減衰定数は直接の関係はない。もちろん、実設計では、スロッシングモードとバルジングモードについておのおの最適な減衰定数を考慮した応答スペクトルを採用すべきである。

（iv） 刺激係数の大きさは振動モードの規準化の方法によって異なるが、式（19）の段階で規準化したモードを用いて求めると付表1のようになり、どちらも一次モードが支配的になっている。なお、これらの値は図4の一次モードと二次モードとの間の関係と一致していない。

〔質問〕 近藤 尚夫

（石川島播磨重工業会社技術研究所）

側板下端の線分布のばね定数 k_i の値について質問したい。

（1） k_i を十分小にすると側板は大部分が剛体的なロッキング運動になることは理解できるが、そのような状態において、側板の運動エネルギーとひずみエネルギーは子午線方向にどのような分布になっているのか。

（2） 上記の運動エネルギーを種々の k_i に対して求めておき、實際上側板のロッキング運動がないとみなすことができるような k_i の限界値を定めることができるのか。

〔回答〕 （1） タンクの基礎は典型例として盛り砂で構成される場合が考えられる。このとき、タンク底板のアニュラ部では鉄筋コンクリートリングなどを埋め込んで補強されることが多い。本論文での k_i はこのような補強材のばね定数に相当する。ご指摘のように k_i を十分に小にし、さらに k_v を小さくすれば、

付表 1 刺激係数（絶対値）

$k_v R/E$	スロッシングモード			バルジングモード				
	一 次	二 次	三 次	一 次	二 次	三 次	四 次	五 次
0.952×10^{-3}	447.6	2.058	0.040 82	15.59	4.552	0.039 52	0.751 7	$0.879 3 \times 10^{-3}$
50	445.5	2.040	0.040 03	3.022	0.191 7	0.300 8	0.028 13	0.136 4

図5からも理解できるようにバルジングの一次モードの側板の変形は小さくなり、剛体的な運動をするだけとなる。ご質問のエネルギー分布は本文の式(2)~(5)に示すような形で求めているので、残念ながら側板のエネルギー分布を簡単に求められるようにプログラミングしていない。振動モードより判断して、側板のひずみエネルギーの子午線方向の分布は底板との接続部近傍を除いて非常に小さい値を示していることが定性的に推定される。

(2) ご指摘のように側板の子午線方向の運動エネルギーを種々の k_i について数値計算し、エネルギーがほぼ零に収束するような限界値の k_i を求めることは可能であり、ロッキング運動の有無を判定する指標になり得ると考えられる。それゆえ、タンクおよび基礎の構造諸元を実機のそれと十分対応するように選り本解法を用いて実機の耐震設計のための設計図表を作成すると便利であると推測する。