弾性はりに対する制振器の最適設計*

吉田 和夫**, 下郷 太郎**, 阿部 正樹***
Kazuo YOSHIDA, Taro SHIMOGO, Masaki ABE**Key Words:** Vibration, Random Vibration, Optimal Design, Vibration Controller, Elastic Beam, Suboptimal Control, Seismic Design

1. 緒 言

振動絶縁および防振の手法は古くから知られているが、近年特に耐震設計および措置の観点より重要施設における機械構造物の振動抑制はその重要性を増している。

地震時のように偶発的な荷重と持続的荷重が同時に考えられる場合の防振手法としては制振器の付加が有効な手法の一つである。制振器には様々な種類が考えられるが、比較的簡単で有効なものとしてばねとダンパで構成する方法がある。弾性はりに対してこのような受動的要素で構成される制振器を用いる場合モード間に構造上の制約をもつことになるが、Van de Vegte⁽¹⁾は Kosut⁽²⁾が提案した準最適制御理論を用いて弾性はりに対する線形ダンパ、ロータリダンパなどの最適設計を行った。また de Silva⁽³⁾は数値計画的な手法によってダンパの特性と位置の最適化を行った。しかしながら、持続的外乱を入力とするような振動問題に対する最適化手法は確立されていない。

本研究は、制振器をばねとダンパで構成する場合について、最適制御理論から求まる最適操作特性を用いて制振器特性の最適化を行い、制振器位置の最適値についても制振器に働く荷重に注目して調べる。ただし制振器の数は一つとする。励振加速度としては、地震入力を受ける機械構造物への応用を考え、定常白色雑音と定常有色雑音の2種類を用いる。振動抑制を行う対象としては、基本的性質を調べるために機械構造物の代表的なモデルである片持りと両端単純支持はりの2種類の弾性はりを取扱う。

2. 基礎方程式と励振加速度

2.1 弾性はりの運動方程式 地震時などに励振を受ける機械構造物の代表的モデルとして図1, 2に示されるような支持点入力を受ける片持りと両端単純支持はりを考察する。

$$\rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + c_e \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + c_i I \frac{\partial^5 y(x, t)}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = u(t) \delta(x - l_c) - \rho \frac{d^2 w(t)}{dt^2} - c_e \{dw(t)/dt\} \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

図1 片持り

図2 両端単純支持はり

* 昭和56年4月1日 第58期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和57年5月28日。

** 正員、慶応義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*** 正員、慶応義塾大学大学院。

境界条件

(i) 片持:

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0$$

(ii) 両端単純支持:

$$y(0, t) = y(l, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0$$

ただし,

 ρ : 単位長さあたりの質量 E : ヤング係数 I : 断面二次モーメント c_i : 内部減衰係数 c_e : 外部減衰係数 $y(x, t)$: はりのたわみ x : 縦方向の座標 t : 時間 $w(t)$: 励振変位 $u(t)$: 制振器によって与えられる力 l_c : 制振器位置 $\delta(\cdot)$: ディラックのデルタ関数

である.

制振器を線形なばねとダンパで構成する場合, 制振器によって与えられる力は次のようになる.

$$u(t) = -ky(l_c, t) - c \frac{dy(l_c, t)}{dt} \quad (2)$$

ただし k はばね定数, c は減衰係数である. したがって, 制振器位置 l_c が与えられれば, 制振器の最適化問題はばね定数 k と減衰係数 c のパラメータの最適化問題に帰着する.

ここでは簡単化のために外部減衰は無視できるものとして式(1)を状態方程式化する. 境界条件を満たす弾性はりの固有関数 $\phi_j(x)$ を用いて式(1)をモード展開して N 項で打ち切り, $X = \text{col.}[\xi_1(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t), \xi_N(t)]$ とすれば, はりの相対変位 $y(x, t)$ と速度 $\partial y(x, t)/\partial t$ は次のように表される.

$$y(x, t) = \Phi^T(x)X(t),$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \Phi^T(x)\dot{X}(t),$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) + D\ddot{w}(t) \quad (3)$$

$$\Phi_a(x) = \text{col.}[\phi_1(x), 0, \phi_2(x), 0, \dots, \phi_N(x), 0],$$

$$\Phi_v(x) = \text{col.}[0, \phi_1(x), 0, \phi_2(x), \dots, 0, \phi_N(x)],$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & A_2 & O \\ & O & \ddots & A_N \end{bmatrix} \quad A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_j^2 & -2\zeta_j\omega_j \end{bmatrix},$$

$$B = \text{col.}\left[0, \phi_1(l_c)/\rho \int_0^l \phi_1^2(x) dx, 0, \dots, 0, \phi_N(l_c)/\rho \int_0^l \phi_N^2(x) dx, 0, \dots, 0, \phi_N(l_c)/\rho \int_0^l \phi_N^2(x) dx\right],$$

$$\phi_2(l_c)/\rho \int_0^l \phi_2^2(x) dx, \dots, 0,$$

$$\phi_N(l_c)/\rho \int_0^l \phi_N^2(x) dx \Big],$$

$$D = \text{col.}\left[0, -\int_0^l \phi_1(x) dx / \int_0^l \phi_1^2(x) dx, 0, \dots, -\int_0^l \phi_2(x) dx / \int_0^l \phi_2^2(x) dx, \dots, 0, \dots, -\int_0^l \phi_N(x) dx / \int_0^l \phi_N^2(x) dx\right],$$

$$\omega_j = \nu_j^2 \sqrt{EI/\rho}, \quad \zeta_j = c_j \omega_j / 2E$$

ただし, $\nu_j l$ は振動数方程式の根で, $\text{col.}[\dots]$ は列ベクトル, ドットは時間に関する微分, $(\cdot)^T$ は行列の転置, $O_{m \times n}$ は m 行 n 列の零行列を示す. 固有関数 $\phi_j(x)$ は次式によって表される.

(i) 片持はり: $\phi_j(x) = (\sinh \nu_j l + \sin \nu_j l)$

$$(\cosh \nu_j x - \cos \nu_j x) - (\cosh \nu_j l + \cos \nu_j l)$$

$$(\sinh \nu_j x - \sin \nu_j x)$$

(ii) 両端単純支持はり: $\phi_j(x) = \sin \nu_j x$

2.2 励振加速度のパワースペクトル密度 本研究は励振入力として地震波を想定しているが, 基本的な性質を調べるための定常正規白色雑音入力の場合とエルセントロ地震波のパワースペクトル密度を模擬した定常正規有色雑音入力の場合について考察を行う. それぞれの励振加速度のパワースペクトル密度 $S_{\ddot{w}}(\omega)$ を次のように仮定し, 図3に示す.

(I) 白色雑音: $S_{\ddot{w}}(\omega) = S_w, S_w = 0.06 \text{ m}^2/\text{s}^3$
($0 \leq \omega < \infty$) (4)

(II) 有色雑音: $S_{\ddot{w}}(\omega) = S_c \omega^2 / (a^4 + \omega^4)(b^2 + \omega^2)$
($0 \leq \omega < \infty$) (5)

$$a = 10\pi \text{ 1/s}, \quad b = 2\pi \text{ 1/s}, \quad S_c = 7.01 \times 10^4 \text{ m}^2\text{s}^3$$

卓越振動数 $f = 2.57 \text{ Hz}$, rms 値 $\sqrt{V_{\ddot{w}}} = 1.38 \text{ m/s}^2$

ただし $V_{\ddot{w}}$ は添字の分散を示す.

図3 励振加速度のパワースペクトル密度

3. 制振器特性の最適化

3.1 評価関数 地震時などに機械構造物の破壊を防ぐためには、構造物に生じる応力を一定値以下に抑えることが必要である。それと同時に制振器に生じる荷重も設計上評価する必要がある。すなわち、制振器の許容荷重も考慮しなければならず、構造物応力と制振器荷重のトレードオフを図らなければならない。そこで本研究においてはつぎのような最大曲げ応力と制振器荷重の分散の重み付き和の空間的な積分値を評価関数 PI として設定する。

$$PI = E_x \left[\int_0^l \left\{ \left(\frac{EI}{z_b} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 + r' u^2(t) \delta(x - l_c) \right\} dx \right] \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $E_x[\cdot]$ は数学期待値、 z_b は断面係数、 r' は重み係数であり、応力に関しては空間的な平均を評価していることになる。モード展開による状態変数を用いて二次形式評価規範で表現すると次のようになる。

$$PI = \left(\frac{EI}{z_b} \right)^2 E_x [X^T(t) Q X(t) + r u^2(t)],$$

$$r = \left(\frac{z_b}{EI} \right)^2 r' \dots \dots \dots (7)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & O_{2 \times 2} & \dots & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & Q_2 & \dots & O_{2 \times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} & \dots & Q_N \end{bmatrix},$$

$$Q_j = \begin{bmatrix} \nu_j^2 \int_0^l \phi_j^2(x) dx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 制振器のもつ制御構造制約 式(2)を状態ベクトルを用いて表すとつぎのようになる。

$$u(t) = -h^T M X(t) \dots \dots \dots (8)$$

$$h^T = [k \quad c], \quad M = \begin{bmatrix} \phi_d^T(l_c) \\ \phi_v^T(l_c) \end{bmatrix}$$

ばねとダンパの受動的要素によって制振器を構成する場合制御理論の観点から見ると、その状態フィードバックは式(8)のような構造制約をもっていると考えられる。すなわちこの制振器によって状態フィードバックを行うことができる量には制約があり、 $u(t) = F X(t)$ と置くとこの制御構造制約を有するすべての線形定係数フィードバック行列の集合 $\mathcal{A}$ は次のように表すことができる。

$$\mathcal{A} = \{F | F = -HM\} \dots \dots \dots (9)$$

したがって、本研究の最適化問題は評価関数

$$PI' = E_x [X^T(t) (Q + r F^T F) X(t)] \dots \dots \dots (10)$$

を最小にする集合 $\mathcal{A}$ の中の F を求める問題となる。これに変分法を適用すれば最適な F が満たさなけれ

ばならない条件式を求めることは容易だが、その解法は容易ではない⁽²⁾。 F に式(9)のような制約がなければ、本最適化問題はLQG問題 (Linear Quadratic Gaussian Problem) として定式化される。周知のとおりその解はリッカチ行列代数方程式の解として与えられ、有本-Potterの方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を用いれば固有値と固有ベクトルの計算で容易に解くことができる。そこで本研究は制約のない最適制御則に基礎を置く簡単な準最適化手法を提案する。

3.3 最適フィードバックとその特性 制約のない最適制御則を求める。最適制御理論においてシステムの状態フィードバックゲインは外乱の性質に無関係に決まることはよく知られている⁽⁶⁾。また本問題のようなLQG問題は、 (A, B) が可安定、 $Q = q^T q$ として (A, q_0) が可検出であれば最適なフィードバックゲインはつぎのように与えられることも周知のとおりである。

$$u^0 = -r^{-1} B^T P X(t) \dots \dots \dots (11)$$

ここで P は次のリッカチ行列代数方程式の対称一意正定解である。

$$A^T P + P A - r^{-1} P B B^T P + Q = 0 \dots \dots \dots (12)$$

式(11)の最適フィードバックを受ける場合の状態ベクトル X の分散は、 $F = -r^{-1} B^T P$, $V_x = E_x [X X^T]$ と置けば次のような分散方程式の解として与えられる。

(I) 白色雑音入力の場合

$$[A + B F] V_x + V_x [A + B F]^T + \pi S_w D D^T = 0 \dots \dots \dots (13)$$

(II) 有色雑音入力の場合 有色雑音入力の場合、次のような拡大システムを導入する手法を用いれば容易に分散方程式を導くことができる。式(5)のパワースペクトル密度を有する加速度を次のような正規白色雑音を受ける成形フィルタの出力として定式化することができる。

$$\ddot{w}(t) = C_w w(t), \quad \dot{w}(t) = A_w w(t) + D_w \eta(t) \dots \dots \dots (14)$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a^2 b & -(\sqrt{2} a b + a^2) & -(\sqrt{2} a + b) \end{bmatrix},$$

$$C_w = [0, 1, 0], \quad D_w = \text{col.} [0, 0, 1],$$

$$E_x [\eta(t) \eta(t + \tau)] = \pi S_c \delta(\tau)$$

ここで拡大された状態変数 $\bar{X} = \text{col.} [X^T, w^T]$ を導入すれば、式(3)と式(14)は次のように表される。

$$\dot{\bar{X}}(t) = \begin{bmatrix} A & DC_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \bar{X}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ D_w \end{bmatrix} \eta(t) \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって上式において最適フィードバック式(11)を受けた場合の分散方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} A+BF & DC_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x & V_{xw} \\ V_{xw}^T & V_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x & V_{xw} \\ V_{xw}^T & V_w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (A+BF)^T & 0 \\ C_w^T D^T & A_w^T \end{bmatrix} + \pi S_c \begin{bmatrix} 0 \\ D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D_w^T \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

3.4 準最適化手法 ばねとダンパで構成される受動的な制振器では、式(8)の制御構造の制約がある

ために式(11)の最適な状態フィードバックをおこなうことができないが、最適制御則のばね特性と減衰特性からばね定数 k と減衰係数 c を決定する次のような方法を提案する。

$$\left. \begin{aligned} k &= [E_x\{u_a^2\}/E_x\{y^2(l_c, t)\}]^{1/2} \\ c &= [E_x\{u_b^2\}/E_x\{\dot{y}^2(l_c, t)\}]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 u_a と u_b は最適制御においてそれぞれ変位と速度のフィードバックによって与えられる力であり、 $y(l_c, t)$ と $\dot{y}(l_c, t)$ はそのときの制振器位置での応答変位と速度である。式(17)における分散はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_x\{u_a^2\} &= F^T E_d V_x E_d^T F \\ E_x\{u_b^2\} &= F^T E_v V_x E_v^T F \\ E_x\{y^2(l_c, t)\} &= \Phi_d^T(l_c) V_x \Phi_d(l_c) \\ E_x\{\dot{y}^2(l_c, t)\} &= \Phi_v^T(l_c) V_x \Phi_v(l_c) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし、 E_d はその (j, j) 要素において j が奇数のとき1で他はすべて0、 E_v は j が偶数のとき1で他はすべて0の正方行列であり、 V_x は式(13)あるいは式(16)で与えられる。本研究ではこの手法を等価最適操作特性法 (ECPM と略称する) と呼ぶ。

Van de Vegte⁽¹⁾が用いた Kosut⁽²⁾の準最適化手法を適用すると、ばね定数 k と減衰係数 c は MEEM (Minimum Error Excitation Method) の場合が

$$h^T = [k, c] = F^T V_x M (M^T V_x M)^{-1} \quad \dots\dots\dots (19)$$

で与えられ、MNM (Minimum Norm Method) の場合が

$$h^T = F^T M^T (M M^T)^{-1} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。ただし式(19)の V_x は式(18)のそれと同じである。これらの手法は逆行列演算を必要とする。

以上のような準最適化手法によって決定されたばねとダンパをもつ制振器を用いる場合、状態ベクトルの分散は式(13)と式(16)においてそれぞれ行列 F を $-h^T M$ に置き換えることによって求められる。

3.5 計算アルゴリズムの構成 本研究で提案した準最適化手法は Kosut のそれと同様制約のない最適制御則に基礎を置いているのが特徴であり、リカッチ代数方程式(12)と共分散方程式(13)あるいは式(16)を解けばよい。リカッチ方程式の定常解を求める方法は多くあるが、本研究では Hamilton 行列の固有値、固有ベクトルを介して求める有本-Potter 法を採用

図4 計算アルゴリズムの構成図

した。この方法は可制御および可観測の条件が必要とされるものの、固有値と固有ベクトルの計算で解を求めることができる点がすぐれている。共分散方程式の解法は連立方程式の解法に帰着する。したがって最適化アルゴリズムは固有値計算、連立方程式の解法および各種の行列演算から成り、その構成は図4のようになる。なお固有値計算は、計算速度、精度ともすぐれたものとして評価されている EISPACK⁽⁷⁾ のプログラムパッケージを用いている。

この最適化アルゴリズムの主な利点および特徴をまとめると以下になる。

- (1) 制振器の準最適値を1回の計算過程で得ることができる。
- (2) 評価関数の重み係数によって制振器荷重と制振効果のトレードオフを容易に行うことができる。
- (3) 計算アルゴリズムが簡単で、既存のプログラムパッケージを組合わせるだけで構成することができ、計算時間が短い。
- (4) 受動的要素のみを用いて行う振動抑制の効果が能動的要素を用いる理想的な制御と比較して把握できる。
- (5) 入力としては白色雑音のみならず有色雑音の場合に対しても有効な計算アルゴリズムである。なお、白色雑音入力に対する最適値は周知のとおり確定的なインパルス入力に対しても最適になっている。

4. 数値計算例

4.1 計算に用いた数値 数値計算は片持はりとは両端単純支持はりについて行った。片持はりの数値は原子力発電施設などにおいて用いられている立て軸ポンプを参考にした。立て軸ポンプは片持はり構造のためその剛性は低く、基本振動数が地震波の卓越振動数領域に存在するためにストッパが用いられることが多いが、その特性と位置の決定は設計上重要な課題とな

る。また、単純支持はりとしてはパイプラインを想定した。数値計算に用いたパラメータの数値を以下に示す。

(i) 片持はり： $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa, $\rho=181$ kg/m, $I=6.32 \times 10^{-5}$ m⁴, $c_i=4.37 \times 10^7$ Ns/m², $c_e=0$, $z_b=4.73 \times 10^{-4}$ m³, $l=10$ m, $\zeta_i=0.001$

(ii) 両端単純支持はり： $E=2.1 \times 10^{11}$ Pa, $\rho=4.40 \times 10^3$ kg/m, $z_b=5.79 \times 10^{-3}$ m³, $l=20$ m, $\zeta_i=0.001$, 両モデルとも数値計算におけるモードの打切数は5とした。固有振動数は、片持はりが1.5, 9.3, 26, 51, 85

図6 曲げ応力の最大値と目的関数との比較 (片持はり、白色雑音)

図5 各準最適化手法の比較 (重み係数と制振器荷重および制振効果)

図7 制振器荷重と制振効果 (片持はり、白色雑音)

Hz であり、両端単純支持はりが 1.0, 4.0, 9.0, 16, 25 Hz である。

4.2 準最適化手法の有効性 白色雑音入力を受ける片持はりのモデルを例にとり、制振器位置 $l_c/l = 1.0$ の場合の制振器荷重と制振効果を ECPM, MEEM, MNM の各準最適化手法について計算した。

図 8 制振器荷重と制振効果 (片持はり, 白色雑音)

図 9 ばねのみによって構成される制振器における制振器荷重と制振効果 (片持はり, 白色雑音)

その結果を重み係数 $R(=r/\rho^2)$ に対してプロットしたのが図 5 である。ここで制振効果とは応力の分散の空間的な積分値の平方根 $\sqrt{V_s}$ を意味し、図中 n で示す制御を行わない場合との比で表している。準最適化手法を用いた場合を本研究では実用制振と呼び、能動的要素によって式(11)のフィードバックを行うことが

図 10 ばねのみによって構成される制振器における制振器荷重と制振効果 (片持はり, 白色雑音)

図 11 制振器荷重と制振効果 (両端単純支持はり, 白色雑音)

できる場合を理想制振と呼ぶ。図5にはこの理想制振の結果も示している。ECPMとMEEMの手法を用いれば理想制振とほぼ等しい制振効果を期待することができることが図5から理解される。ただしECPMは

$$R=r/\rho^2=10^{-9}: kl^3/3EI=1.6 \times 10^{-3}, cl^3/3CI=9.8 \times 10$$

$$R=r/\rho^2=10^{-12}: kl^3/3EI=1.5 \times 10^{-3}, cl^3/3CI=3.5 \times 10^3$$

$$R=r/\rho^2=10^{-15}: kl^3/3EI=2.0 \times 10^2, cl^3/3CI=6.1 \times 10^4$$

図12 白色雑音を受ける片持はりにおけるたわみと曲げ応力の rms 値

図13 ばねのみによって構成される制振器を用いた場合の白色雑音を受ける片持はりにおけるたわみと曲げ応力の rms 値

$$R=r/\rho^2=10^{-6}: kl^3/3EI=9.4 \times 10^{-5}, cl^3/3CI=5.9$$

$$R=r/\rho^2=10^{-8}: kl^3/3EI=9.3 \times 10^{-3}, cl^3/3CI=6.3 \times 10$$

$$R=r/\rho^2=10^{-10}: kl^3/3EI=6.7 \times 10^{-3}, cl^3/3CI=6.1 \times 10^2$$

図14 白色雑音を受ける両端単純支持はりにおけるたわみと曲げ応力の rms 値

ほぼ最高の制振効果を実現した後さらに重み係数を小さくすると制振効果が悪化する傾向を示す。しかしながらこの傾向を示す領域では理想制振、MEEMともほぼ一定値に収束していて点制御の限界を示している。なお、両端単純支持はりの場合もほぼ同じ傾向を示す。以下にはECPMを用いて準最適化を行った結果のみを記す。

図15 ばねのみによって構成される制振器を用いた場合の白色雑音を受ける両端単純支持はりにおけるたわみと曲げ応力の rms 値

図16 制振器荷重を一定としたときの片持はりにおける制振器位置と制振効果

図17 ばねのみによって構成される制振器においてばね定数を一定としたときの片持はりにおける制振器位置と制振効果

4・3 評価関数の妥当性 本研究においては目的関数として応力の分散のスパン方向の積分値を用いているが、一般には応力の最大値が問題となる。そこで重み係数をパラメータとして白色雑音を受ける片持はりにおいてこれらの値を比較したのが図6である。制振を行わない場合との比で表した無次元量においてこれらの値はほとんど一致する。したがって応力の最大値を抑えるという意味において本研究で用いた評価関数は妥当なものであることがわかる。

4・4 制振器荷重と制振効果

(a) 片持はり 図7, 8に制振器荷重と制振効果のトレードオフカーブを白色と有色の雑音入力の場合について示す。白色, 有色の両入力ともほぼ同じ傾向を示し, 制振器荷重を増せば制振効果を上げることができる。一般にばねのみによって制振器を構成する方が実現しやすいが, その場合の制振器荷重と制振効果の関係を白色と有色の場合について図9, 10に示す。これらの図からわかるように, ばね定数を増せば制振効果を上げることができるが, 制振器荷重は単調な増加の傾向を示さない。これは, ある程度以上ばね定数を大きくすると低次のモードが抑えられて変位そのものが小さくなってしまふためである。すなわち制振器位置が一つの固定点になってしまうことを示している。図7, 8と図9, 10を比較すると, ダンパを用いればばねのみの場合と比較して1/10以下の制振器荷重で同じ制振効果を期待することができ, ばねのみの場合はばね定数の選択に十分注意が払われる必要があると言える。

(b) 両端単純支持はり 図11に制振器荷重と制振効果の関係を白色雑音入力の場合について示す。片持はりとほぼ同様な結果となっている。また有色雑音入力の場合もほぼ同様な傾向を示す。

4・5 制振特性

(a) 片持はり 図12にスパン方向の応力と変位のrms値を白色雑音入力の場合について示す。ただし制振器位置 $l_c/l=1.0$ の場合である。図13にはばねのみによって制振器を構成した場合の結果を示す。これもダンパを用いる場合とかなり異なり, ダンパを用いることの有効性が示されるとともに, ばねのみによって実現する場合はその大きさに最適値があると言える。またダンパを用いると応力のスパン方向の分布が平坦になるのが特徴である。

(d) 両端単純支持はり 図14, 15にスパン方向の応力と変位のrms値を白色雑音入力の場合について示す。その傾向はやはり片持はりの場合と同様である。

4・6 制振器位置と制振効果

(a) 片持はり 図16は制振器荷重一定の場合の制振器位置と制振効果の関係を示す。図7, 8からもわかるように理想制振に近い制振効果をほぼ実現できる範囲では自由端に制振器を取り付けることが白色, 有色とも最適であると言える。図17はばねのみによって制振を行う場合においてばね定数一定としたときの制振器位置と制振効果の関係を示す。ばね定数を一定とした場合はその大きさによって最適位置が変化するが, 十分大きなばね定数を用いるときは $l_c/l=0.7$ 付近が最適と言える。

(b) 両端単純支持はり 最適な制振器位置はスパン中央である。

4・7 白色雑音入力と有色雑音入力の相違 白色雑音入力と有色雑音入力の大きな相違の一つは, 有色雑音入力はその分散が有限であるために重み係数を小さくしていくと制振器荷重は一定値に収束するが, 白色雑音入力の場合は発散する。

有色雑音入力の場合その卓越振動数と弾性はりの固有振動数の相対的關係によって最適値は変化すると思われるが, 本研究で扱ったような卓越振動数が一次モードの固有振動数付近にある場合は白色雑音入力との最適値とほとんど相違はなく, 白色雑音入力に対する設計で十分である。ただし制振器荷重を正しく評価するためには有色雑音入力としての取扱いが必要となる。

5. 結 論

本研究は, 弾性はりに対する制振器の最適化問題に対して逆行列演算を含まない準最適化手法を考案してその有効性を確認した。そして, 弾性はりの応答のrms値, 制振器荷重と制振効果の関係および制振器位置と制振効果の関係を励振加速度が白色雑音と有色雑音の場合について計算することによって4章で述べたような制振器設計のための資料を得ることができた。

文 献

- (1) Van de Vegte, J. and Hladum, A.R., *Trans. ASME, Ser. G*, 95-4 (1973), 427.
- (2) Kosut, R.L., *IEEE Trans. Automatic Control*, 15-5 (1970), 557.
- (3) de Silva, C.W., *J. Sound Vib.*, 74-4 (1981), 495.
- (4) 有本, 線形システム理論, (昭49), 151, 産業図書.
- (5) 古田・佐野, 基礎システム理論, (昭53), 126, コロナ社.
- (6) 橋本・ほか2名, 確率システム制御の基礎, (昭50), 68, 日新出版.
- (7) Garbow, B.S., ほか3名, *Lect. Notes in Comp. Sci.*, 51 (1977), Springer-Verlag.

討 論

〔質問〕 背戸 一 登〔防衛大学校〕

制振器の最適設計問題に対する最適制御理論の巧妙な応用に敬意を表す。

(1) 貴研究では励振入力として地震波を想定しておられるが、その場合は制振器の取付けてある基礎も固定端とは見なされないが、式(2)の表現でよいのか。

(2) 両端単純支持はりの場合の最適な制振器取付け位置は中央とのことであるが、その位置は二次モードの節に当たり、しかも二次固有振動数が4.0 Hzであれば、二次モードは卓越振動数領域内にあるように思われる。その場合の制振器取付け位置は中央をさけた方がよいように思われるがいかか。

(3) 図7などに示された制振器荷重は、ばね及びダンパにどのように分担されるのか。

〔回答〕 (1) 式(2)における y は、制振器取付け基礎とはり($x=l_c$)との間の相対変位を表しており、制振器取付け基礎が地震によって運動すれば、制振器を介して式(2)で表される力がはりに作用する。

(2) 両端単純支持はりの中央に制振器を取付ければ、制振効果が落ちる場合が考えられるが、この数値計算例では、二次モードよりも一次モードが大きく影響するせいか、付図1に示されるように、中央に取付けたとき、すなわち $l_c/l=0.5$ のとき、曲げ応力の

付図1 制振器荷重を一定としたときの両端単純支持はりにおける制振器位置と制振効果（有色雑音入力の場合）

rms 値の全スパンにわたる平均値が最小となる。

(3) ばねとダンパにおける制振器荷重の分担割合を片持はりの例で示すと、制振器荷重の重み係数が $R=10^{-6}$ のとき、ばね力が減衰力の約1/100, $R=10^{-10}$ のとき、約6倍となり、重み係数によって大きく変化する。ただしこの例では白色雑音入力で、制振器取付け位置は $l_c/l=1$ である。両端単純支持はり($l_c/l=0.475$)の例でも同様であり、 $R=10^{-9}$ のとき約1/100, $R=10^{-15}$ のとき約2倍となる。