両端を側板で覆われた回転円筒かくの振動*

遠藤 満**, 篠田 佳彦***
Mitsuru ENDO, Yoshihiko SHINODA**Key Words:** Vibration of Continuous System, Rotating Cylindrical Shell, Side Disks, Initial Tension, Frequency Analysis

1. ま え が き

高速遠心分離機には薄肉円筒かくが使用されており、疲労破壊等とも関連してその振動現象が問題になる場合がある。回転円筒かくの振動現象についてはこれまでいくつかの研究がなされている^{(1)~(5)}、定常的回転による初期張力の影響を無視したもの、あるいは正しく考慮していないものが多く、必ずしも現象を的確に把握しているとはいえない難かった。そこで著者らは先に、定常的回転による初期張力の影響を正しく考慮した基礎方程式をハミルトンの原理に基づいて導出し、それに基づいて(A)両端固定、(B)軸方向不拘束単純支持、(C)軸方向拘束単純支持の三とおりの境界条件の場合について回転円筒かくの振動特性を調べた⁽⁶⁾。しかしながら高速遠心分離機の場合、円筒かくの両端は側板で覆われている場合が多く、このような円筒かくと側板が連成するような場合についてはほとんど研究されていないのが現状である⁽⁷⁾。そこで本研究は両端が側板で覆われた回転円筒かくについて、円筒かくに生ずる初期張力の影響も考慮に入れて振動数解析を行い、高速遠心分離機の回転胴の振動特性について理論的に検討することを目的としている。なお解析にあたり振動変位について側板の面内変形の影響は小さいと仮定して無視した。

2. 基礎方程式

図1に示すごとく、円筒かくの両端は同じ側板で覆われており、側板は無視し得る程の柔らかい軸で支持されているものと仮定する。 l, a をそれぞれ円筒かくの長さ及び平均半径とし、 Ω を円筒かくの回転角速度とする。図に示すように座標系をとり、 u, v, w を円筒かくの変位、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ を側板の変位とする。又 N_x^*, N_φ^* をそれぞれ定常的回転によって円筒かくに生ずる円周

方向及び軸方向の初期張力とする。

2.1 回転円筒かくの基礎方程式 前報⁽⁶⁾で円筒かくの有限変形を考慮することにより初期張力の影響も考慮した基礎方程式をハミルトンの原理より導いた。そのハミルトンの原理を示すと次のように表される。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (\delta E_T - \delta E_V) dt = & - \int_{t_0}^t \int_0^{2\pi} \left[(N_x + N_x^*) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \delta u \\ & + \left(N_{x\varphi} - \frac{1}{a} M_{x\varphi} + N_x^* \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta v + M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} \\ & - \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{x\varphi} + M_{\varphi x}) \right. \\ & \left. - N_x^* \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \delta w \Big|_{x=-l/2}^{x=l/2} a d\varphi dt \\ & - \int_{t_0}^t \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} [\{U_1\} \delta u + \{V_1\} \delta v \\ & + \{W_1\} \delta w] a dx d\varphi dt = 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで E_T, E_V は回転円筒かくの運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーを表す。なお上式における N, M 等の合応力、合モーメントの定義式は文献(8)を参照されたい。式(1)において第1積分項から境界条件式が導かれ、第2積分項の $\{U_1\}, \{V_1\}, \{W_1\}$ を零とおいたものがオイラーの方程式となる。 U_1, V_1, W_1 の詳細は省略するが、これらのオイラーの方程式より定常回転時の基礎方程式⁽⁶⁾を差し引き、さらに合応力、合モーメントと変位の関係式⁽⁸⁾を代入し、無次元化をはかると変位の方程式が次のように求まる。

図1 座標系

* 昭和57年7月16日 第24回構造強度に関する講演会において講演、原稿受付 昭和57年8月18日。

** 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*** 東京工業大学大学院。

$$\left. \begin{aligned} (1+n_x^*)\ddot{u}_{,tt} + \left\{ \frac{1-\nu}{2}(1+k) + n_\phi^* \right\} \ddot{u}_{,\phi\phi} - \gamma \ddot{u}_{,t\phi} \\ + \frac{1+\nu}{2} \ddot{v}_{,\phi\phi} + \nu \ddot{w}_{,\phi} - k \ddot{w}_{,tt} + \frac{1-\nu}{2} k \ddot{w}_{,\phi\phi} = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \ddot{u}_{,\phi\phi} + (1+n_\phi^*) \ddot{v}_{,\phi\phi} + \left\{ \frac{1-\nu}{2}(1+3k) + n_x^* \right\} \ddot{v}_{,tt} + (\gamma \Omega^2 - n_\phi^*) \ddot{v} \\ - \gamma \ddot{v}_{,t\phi} + (1+2n_\phi^*) \ddot{w}_{,\phi} - \frac{3-\nu}{2} k \ddot{w}_{,tt} - 2\Omega \gamma \ddot{w}_{,t\phi} = 0 \\ \nu \ddot{u}_{,\phi} - k \ddot{u}_{,ttt} + \frac{k}{2}(1-\nu) \ddot{u}_{,\phi\phi\phi} - \frac{1}{2} k(3-\nu) \ddot{v}_{,tt\phi} \\ + (1+2n_\phi^*) \ddot{v}_{,\phi} - 2\gamma \Omega \ddot{v}_{,\phi} + k \ddot{w}_{,ttt} + 2k \ddot{w}_{,tt\phi} + (2k - n_\phi^*) \ddot{w}_{,\phi\phi} \\ + k \ddot{w}_{,\phi\phi\phi} + (1+k+n_\phi^* - \gamma \Omega^2) \ddot{w} - n_x^* \ddot{w}_{,tt} + \gamma \ddot{w}_{,t\phi} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$ は振動変位を表し, ν はポアソン比を表す。また $\xi = x/a$ であり, カンマ' は以下に続く変数に関する偏微分を意味する。また

$$k = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2}, \quad n_x^* = \frac{N_x^*}{P}, \quad n_\phi^* = \frac{N_\phi^*}{P},$$

$$P = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \gamma = \frac{\rho h a^2}{P}$$

である。ここで ρ , h , E はそれぞれ円筒かくの密度, 肉厚及び縦弾性係数を表す。

2.2 回転円筒かくに生じる初期張力 前報で導いた定常回転時の基礎方程式を解くと

$$N_x^* = \frac{P}{a} \left[\frac{1+k-\Gamma-\nu^2}{1+k-\Gamma} A_2 + \nu w_p \right]$$

$$= \text{const.} \dots\dots\dots (3)$$

ここで

$$\Gamma = (1-\nu^2) \frac{\rho a^2}{E} \Omega^2, \quad w_p = \frac{\Gamma a}{1+k-\Gamma}$$

と表される⁽⁶⁾。上式で A_2 は未定係数である。ここでいま円筒かくの両端が側板で覆われていることを考慮すると

$$N_x^* = 0 \quad \text{すなわち} \quad n_x^* = 0 \dots\dots\dots (4)$$

と考えることができる。したがって A_2 が次のように求まる。

$$A_2 = - \frac{1+k-\Gamma}{1+k-\Gamma-\nu^2} \nu w_p \dots\dots\dots (5)$$

これより円周方向の無次元化初期張力 n_ϕ^* の x によらない一定項 $(n_\phi^*)_c$ は

$$(n_\phi^*)_c = \frac{1}{a} \left[\frac{-\Gamma \nu A_2}{1+k-\Gamma} + (1+k) w_p \right]$$

$$= \frac{\Gamma(1+k-\nu^2)}{1+k-\Gamma-\nu^2} \dots\dots\dots (6)$$

のように求まる⁽⁶⁾。したがって式(2)の n_x^* , n_ϕ^* としてそれぞれ 0 , $(n_\phi^*)_c$ を代入すれば式(2)は定数係数の偏微分方程式となる⁽⁶⁾から通常の微分方程式の解法により解けることになる。

2.3 側板の面外振動の基礎方程式 側板の面外振動変位を $\ddot{w}_v$ とすると, 面外振動に関する基礎方程式は次式のように表される。

$$\bar{\rho} \bar{h} \frac{\partial^2 \ddot{w}_v}{\partial t^2} + \bar{D} \nabla^4 \ddot{w}_v = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで $\bar{\rho}$, $\bar{h}$, $\bar{D}$ はそれぞれ側板の密度, 肉厚, 曲げ剛性を表す。なお基礎方程式において定常的回転によって生ずる面内力が曲げ変形に及ぼす影響は小さいと仮定して無視した。

3. 境界条件

3.1 円周方向波数 n が2以上の場合 円筒かくの両端の境界条件が同じであるから, 後で示すごとく, 振動数方程式は円筒かくの半径方向変位が円筒の中央面に関して対称となる対称形モードと逆対称となる逆対称形モードの二つに分離することが可能である。したがってそれに対応して境界条件としては円筒かくの一端のみの境界条件を考えれば十分である。そこでいま図2に示すごとく, 円筒かくの $x = -l/2$ の一端と側板の $r = a$ の部分の振動変位, 傾き角及び合応力, 合モーメントの連続条件を考えると, $n \geq 2$ のときの境界条件は次の六つの関係式によって表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad [\ddot{u}]_{x=-l/2} &= [\ddot{w}_v]_{r=a} \\ (2) \quad [\ddot{N}_x]_{x=-l/2} &= [\ddot{V}_r]_{r=a} \\ (3) \quad \left[\frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right]_{x=-l/2} &= - \left[\frac{\partial \ddot{w}_v}{\partial r} \right]_{r=a} \\ (4) \quad [\ddot{M}_x]_{x=-l/2} &= [\ddot{M}_r]_{r=a} \\ (5) \quad [\ddot{v}]_{x=-l/2} &= 0 \\ (6) \quad [\ddot{w}]_{x=-l/2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

上式において $\sim$ を付した $\ddot{N}_x$, $\ddot{M}_x$ は振動変位に関する量であることを示している。また側板の振動変位に関する合応力, 合モーメント $\ddot{V}_r$ 及び $\ddot{M}_r$ の定義については文献(9)を参照されたい。式(8)において(1)の条件は円筒かくの軸方向変位が側板の面外変位に等し

い条件, (2)は軸方向合応力が面外合応力に等しい条件を示す。また(3), (4)はそれぞれ変位の傾き角及び曲げモーメントの連続条件である。また条件(5), (6)は側板の振動変位に関する面内変形を無視することによって得られる近似的関係である。この条件式については非回転円筒かくについて面内変形の影響も考慮して厳密に解析した文献(10)の研究の考察並びに文献(11)を参照すればほぼ妥当な近似であると思われる。

3.2 円周方向波数 n が1の場合 n が1の場合には式(8)の境界条件のうち(5), (6)の条件の代わりに側板が面内方向にふれ回ることによる慣性効果を考慮した境界条件でおきかえる必要がある。そのためには側板の面内方向運動エネルギーも新たに考慮したハミルトンの原理に立ち戻って考える必要がある。

図2 境界条件

いま側板上の一点の面内速度は

$$(\bar{u}_t - \Omega \bar{v})i_r + \{\bar{v}_t + \Omega(r + \bar{u})\}i_\phi \dots\dots\dots (9)$$

と表される。ここで i_r, i_ϕ はそれぞれ r, ϕ 方向の単位ベクトルである。したがって側板の面内運動の運動エネルギーの第1変分の時間積分は

$$\int_{t_0}^t \delta E_p dt = \rho \bar{h} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^a [\{\Omega^2 \bar{v} - 2\Omega \bar{u}_t - \bar{v}_{tt}\} \delta \bar{v} + \{2\Omega \bar{v}_t + \Omega^2(r + \bar{u}) - \bar{u}_{tt}\} \delta \bar{u}] r dr d\phi dt \dots\dots\dots (10)$$

と表される。いま $\bar{u}^*$ を定常的変位と仮定し

$$\bar{u} = \bar{u}^* + \bar{u}_0 \cos(\phi + pt), \quad \bar{v} = \bar{v}_0 \sin(\phi + pt) \dots\dots\dots (11)$$

ここで p は固有角振動数

とおくと

$$\int_{t_0}^t \delta E_p dt = \rho \bar{h} \frac{\pi a^2}{2} \int_{t_0}^t [\{(\Omega^2 + p^2) \bar{v}_0 + 2\Omega p \bar{u}_0\} \delta \bar{v}_0 + \{2\Omega p \bar{v}_0 + (\Omega^2 + p^2) \bar{u}_0\} \delta \bar{u}_0] dt \dots\dots\dots (12)$$

と変形される。ここで振動変位について側板の面内変形の影響を無視すると側板が円形を保つ条件より $\bar{v}_0 = -\bar{u}_0$ なる関係式が得られるから結局

$$\int_{t_0}^t \delta E_p dt = \rho \bar{h} \pi a^2 \int_{t_0}^t \{(\Omega^2 + p^2) - 2\Omega p\} \bar{u}_0 \delta \bar{u}_0 dt \dots\dots\dots (13)$$

と表される。

一方、式(1)において変位 v, w に関する境界項のみをとりだすと、 $N_x^* = 0$ であるから

$$\int_{t_0}^t \delta E_B dt = \int_{t_0}^t \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \frac{1}{a} M_{x\phi} - N_{x\phi} \right\} \delta v + \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} (M_{x\phi} + M_{\phi x}) \right\} \delta w \right]_{x=-l/2}^{x=l/2} a d\phi dt \dots\dots\dots (14)$$

と表される。ここでいま*のついた量を定常項と仮定して

$$\left. \begin{aligned} u &= u^* + u_0 \cos(\phi + pt), \quad v = v_0 \sin(\phi + pt) \\ w &= w^* + w_0 \cos(\phi + pt) \\ N_{x\phi} &= N_{x\phi}^0 \sin(\phi + pt), \quad M_{x\phi} = M_{x\phi}^0 \sin(\phi + pt) \\ M_{\phi x} &= M_{\phi x}^0 \sin(\phi + pt), \quad M_x = M_x^* + M_x^0 \cos(\phi + pt) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

とおくと

$$\int_{t_0}^t \delta E_B dt = \pi \int_{t_0}^t \left[\left\{ \frac{1}{a} M_{x\phi}^0 - N_{x\phi}^0 \right\} \delta v_0 + \left\{ \frac{1}{a} M_{x\phi}^0 + \frac{1}{a} (M_{x\phi}^0 + M_{\phi x}^0) \right\} \delta w_0 \right]_{x=-l/2}^{x=l/2} a dt \dots\dots\dots (16)$$

と表される。前と同様側板が円形を保つ条件より $v_0 = -w_0$ なる関係式が得られるから、結局

$$\int_{t_0}^t \delta E_B dt = \pi \int_{t_0}^t [(aN_{x\phi}^0 + M_{x\phi}^0 + M_{\phi x}^0) \delta w_0]_{x=-l/2}^{x=l/2} dt \dots\dots\dots (17)$$

となる。したがって境界条件を得るために

$$\int_{t_0}^t (\delta E_p - \delta E_B) dt = 0 \dots\dots\dots (18)$$

とおき、円筒かくと側板の連続条件 $\bar{u}_0 = w_0$ を用いると

$$\int_0^l [\bar{\rho} \bar{h} a^2 \{(\Omega^2 + p^2) - 2\Omega p\} \bar{u}_0 \delta \bar{u}_0 - \{aN_{x\varphi}^0 + M_{x,\varphi}^0 + M_{\varphi x}^0\} \delta w_0]_{x=-l/2}^{x=l/2} dt \\ = \int_0^l [\bar{\rho} \bar{h} a^2 \{(\Omega^2 + p^2) - 2\Omega p\} w_0 \delta w_0 - \{aN_{x\varphi}^0 + M_{x,\varphi}^0 + M_{\varphi x}^0\} \delta w_0]_{x=-l/2}^{x=l/2} dt = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。これより $n=1$ の場合には式(8)の(5), (6)の条件に代わる境界条件として次式を得る。

$$\begin{aligned} (5') \quad & [v_0]_{x=-l/2} = -[w_0]_{x=-l/2} \\ (6') \quad & [\bar{\rho} \bar{h} a^2 \{(\Omega^2 + p^2) - 2\Omega p\} w_0 - \{aN_{x\varphi}^0 + M_{x,\varphi}^0 + M_{\varphi x}^0\}]_{x=-l/2} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

4. 振動数解析

はじめに回転円筒かくに関する一般解を得るために基礎方程式(2)に次式

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= U_0 e^{i\varphi} \cos(n\varphi + pt) \\ \bar{v} &= V_0 e^{i\varphi} \sin(n\varphi + pt) \\ \bar{w} &= W_0 e^{i\varphi} \cos(n\varphi + pt) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

を代入して演算を行い整理すると、前報⁽⁶⁾で示したごとく次のような形の解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \left[\sum_{j=1}^4 W_j^1 k_u(\tau_j) \sinh \tau_j \xi + \sum_{j=1}^4 W_j^2 k_u(\tau_j) \cosh \tau_j \xi \right] \cos(n\varphi + pt) \\ \bar{v} &= \left[\sum_{j=1}^4 W_j^1 k_v(\tau_j) \cosh \tau_j \xi + \sum_{j=1}^4 W_j^2 k_v(\tau_j) \sinh \tau_j \xi \right] \sin(n\varphi + pt) \\ \bar{w} &= \left[\sum_{j=1}^4 W_j^1 \cosh h \tau_j \xi + \sum_{j=1}^4 W_j^2 \sinh \tau_j \xi \right] \cos(n\varphi + pt) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで τ は $a_0 \tau^8 + a_1 \tau^6 + a_2 \tau^4 + a_3 \tau^2 + a_4 = 0$ の形式をもつ U_0, V_0, W_0 に関する同次方程式の特性方程式の根であり、 k_u, k_v は $k_u(\tau) = U_0/W_0, k_v(\tau) = V_0/W_0$ なる係数である。式(22)をみてもわかるように、 W_j^1 は半径方向変位が円筒かくの中央面に関して対称となるモードに対応する未定係数であり、 W_j^2 は逆対称となるモードに対応する未定係数である。

一方、側板については中実円板であることを考慮して式(7)を解くと一般解は

$$\bar{w}_0 = [a_1 J_n(\bar{k}r) + c_1 I_n(\bar{k}r)] \cos(n\varphi + pt) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで $\bar{k}^4 = \bar{\rho} \bar{h} p^2 / \bar{D}$

と表すことができる。上式において J_n, I_n は n 次の第1種ベッセル関数及び変形ベッセル関数を表す。

いま式(22)の W_j^1 を含む関数と式(23)を境界条件に代入し、 $W_j^1 (j=1 \sim 4), a_1, c_1$ の六つの係数よりなる同次方程式の係数行列式を0とおくと、対称形モードに対する振動数行列式が次のような形に求まる。

$$\det[q_{ij}] = 0 \quad (i, j=1 \sim 6) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで q_{ij} は $n \geq 2$ の場合次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} q_{1j} &= k_u(\tau_j) \sinh \tau_j \alpha \\ q_{2j} &= \{\tau_j k_u(\tau_j) + \nu n k_v(\tau_j) + \nu - k \tau_j^2\} \cosh \tau_j \alpha \\ q_{3j} &= -\tau_j \sinh \tau_j \alpha \\ q_{4j} &= \{\tau_j^2 - \nu n^2 - \tau_j k_u(\tau_j) - \nu n k_v(\tau_j)\} \cosh \tau_j \alpha \\ q_{5j} &= k_v(\tau_j) \cosh \tau_j \alpha \\ q_{6j} &= \cosh \tau_j \alpha \end{aligned} \right\} \quad (j=1 \sim 4)$$

$$\begin{aligned} q_{15} &= J_n(\bar{k}a) \\ q_{16} &= I_n(\bar{k}a) \\ q_{25} &= -H[n(\bar{k}a)^2 J_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)^3 J_{n+1}(\bar{k}a) \\ &\quad + (1-\nu)n^2\{(n-1)J_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)J_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{26} &= H[n(\bar{k}a)^2 I_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)^3 I_{n+1}(\bar{k}a) \\ &\quad - (1-\nu)n^2\{(n-1)I_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)I_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{35} &= nJ_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)J_{n+1}(\bar{k}a) \\ q_{36} &= nI_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)I_{n+1}(\bar{k}a) \\ q_{45} &= -I[(\bar{k}a)^2 J_n(\bar{k}a) - (1-\nu)\{n(n-1)J_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)J_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{46} &= I[(\bar{k}a)^2 I_n(\bar{k}a) + (1-\nu)\{n(n-1)I_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)I_{n+1}(\bar{k}a)\}] \end{aligned}$$

$$q_{55}^1 = q_{56}^1 = q_{65}^1 = q_{66}^1 = 0$$

ここで ν は側板のポアソン比であり、また $a = l/2a$, $H = (\bar{D}/a^3)/(P/a)$, $I = \bar{D}/D$ である。一方、 $n=1$ の場合の係数は上の q_{5j}^1 , q_{6j}^1 ($j=1\sim 4$) を

$$q_{5j}^1 = \{k_v(\tau_j) + 1\} \cosh \tau_j a$$

$$q_{6j}^1 = \bar{\rho} \bar{h} a^2 \{(\bar{Q}^2 + p^2) - 2\bar{Q}p\} \cosh \tau_j a + \left[P \frac{1-\nu}{2} \{-k_u(\tau_j) + (1+k)k_v(\tau_j)\tau_j + k\tau_j\} \right. \\ \left. + \frac{D}{a^2} \{\tau_j^3 - \nu\tau_j - k_u(\tau_j)\tau_j^2 - \nu k_v(\tau_j)\tau_j\} - \frac{D}{a^2}(1-\nu) \left\{ \tau_j + \frac{1}{2}k_u(\tau_j) + \frac{1}{2}k_v(\tau_j)\tau_j \right\} \right] \sinh \tau_j a$$

でおきかえればよい。

同様にして逆対称形モードに対する振動数行列式が次式のように求まる。

$$\det[q_{ij}^2] = 0 \quad (i, j=1\sim 6) \dots\dots\dots (25)$$

ここで q_{ij}^2 は $n \geq 2$ の場合以下のように表される。

$$\left. \begin{aligned} q_{1j}^2 &= k_u(\tau_j) \cosh \tau_j a \\ q_{2j}^2 &= \{\tau_j k_u(\tau_j) + \nu n k_v(\tau_j) + \nu - k\tau_j^2\} \sinh \tau_j a \\ q_{3j}^2 &= \tau_j \cosh \tau_j a \\ q_{4j}^2 &= \{\tau_j^3 - \nu n^2 - \tau_j k_u(\tau_j) - \nu n k_v(\tau_j)\} \sinh \tau_j a \\ q_{5j}^2 &= k_v(\tau_j) \sinh \tau_j a, \quad q_{6j}^2 = \sinh \tau_j a \\ q_{15}^2 &= -J_n(\bar{k}a), \quad q_{16}^2 = -I_n(\bar{k}a) \\ q_{25}^2 &= H[n(\bar{k}a)^2 J_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)^3 J_n(\bar{k}a) \\ &\quad + (1-\nu)n^2\{(n-1)J_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)J_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{26}^2 &= -H[n(\bar{k}a)I_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)^3 I_n(\bar{k}a) \\ &\quad - (1-\nu)n^2\{(n-1)I_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)I_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{35}^2 &= nJ_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)J_{n+1}(\bar{k}a) \\ q_{36}^2 &= nI_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)I_{n+1}(\bar{k}a) \\ q_{45}^2 &= I[(\bar{k}a)^2 J_n(\bar{k}a) - (1-\nu)\{n(n-1)J_n(\bar{k}a) + (\bar{k}a)J_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{46}^2 &= -I[(\bar{k}a)^2 I_n(\bar{k}a) + (1-\nu)\{n(n-1)I_n(\bar{k}a) - (\bar{k}a)I_{n+1}(\bar{k}a)\}] \\ q_{55}^2 &= q_{56}^2 = q_{65}^2 = q_{66}^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (j=1\sim 4)$$

また $n=1$ の場合の係数は上の q_{5j}^2 , q_{6j}^2 ($j=1\sim 4$) を次式でおきかえればよい。

$$q_{5j}^2 = \{k_v(\tau_j) + 1\} \sinh \tau_j a$$

$$q_{6j}^2 = \bar{\rho} \bar{h} a^2 \{(\bar{Q}^2 + p^2) - 2\bar{Q}p\} \sinh \tau_j a + \left[P \frac{1-\nu}{2} \{-k_u(\tau_j) + (1+k)k_v(\tau_j)\tau_j + k\tau_j\} \right. \\ \left. + \frac{D}{a^2} \{\tau_j^3 - \nu\tau_j - k_u(\tau_j)\tau_j^2 - \nu k_v(\tau_j)\tau_j\} - \frac{D}{a^2}(1-\nu) \left\{ \tau_j + \frac{1}{2}k_u(\tau_j) + \frac{1}{2}k_v(\tau_j)\tau_j \right\} \right] \cosh \tau_j a$$

以上の振動数行列式(24), (25)を複素演算による試行法により解いて固有角振動数を求めた⁽⁶⁾⁽¹²⁾。なお実際の数値計算に際しては固有角振動数 p と回転角速度 $\bar{Q}$ をパラメータ γ を用いて

$$\bar{p} = \sqrt{\gamma} p, \quad \bar{Q} = \sqrt{\gamma} \bar{Q} \dots\dots\dots (26)$$

のように無次元化して取扱っている。

本研究においては回転数が0のときの振動モード形も計算してみたが、そのモード形の計算方法は前報⁽⁶⁾と同様であるので、その詳細な説明はここでは省略する。

5. 数値計算結果の検討

数値計算は円筒かくと側板の材質が等しく、 $a(l/2a)=5.0$, $h/2a=0.02$ の場合について行ってみた。ま

たポアソン比は $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ とおいた。

はじめに円筒かくの半径方向変位に関する軸方向半波数 m が1で円周方向波数 n が2, 3, 4の場合について進行波と後退波の振動数の回転速度依存性を示したのが図3(a), (b), (c)である。また図4(a), (b), (c)は $m=2$ の場合の結果を示している。いまの場合 $m=1$ は先に述べた対称形モード、 $m=2$ は逆対称形モードに対応する。なおグラフを表示するに当たっては回転角速度 $\bar{Q}$ 及び固有角振動数 $\bar{p}$ を静止時 ($\bar{Q}=0$) 固有角振動数 $\bar{p}_0$ で正規化して表示している。また一般に進行波の振動数は $\bar{p} < 0$ となるが、グラフにはその絶対値を表示している。側板と円筒かくの肉厚比 $\bar{h}/h$ は図3, 4とも1, 2, 4の場合を表示しているが、図よりわかるように静止時固有角振動数 $\bar{p}_0$ 。

(a)

(a)

(b)

(b)

(c)

(c)

図 3 進行波と後退波の振動数

図 4 進行波と後退波の振動数

は少しずつ異なるにもかかわらず、縦軸、横軸をそれぞれの $\bar{p}_0$ で正規化すると進行波、後退波ともほぼ同一の曲線で表すことができる。 $\bar{h}/h < 1$ の場合は境界条件式(8)の(5)、(6)の仮定に関連してあまり意味がないと思われたので計算は行わなかった。

$n \geq 2$ の場合の結果である図3、4をみてさらに注

図5 進行波と後退波の振動数

目されることは、前報⁽⁶⁾でも同様な結果が観察されたごとく、縦軸、横軸をそれぞれの静止時固有角振動数 $\bar{p}_0$ で正規化して表示すると、それらの曲線は著者が先に導いた回転薄肉円環に対する次のような式⁽¹³⁾

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} = \frac{2n}{n^2+1} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{p}_0} \right) \pm \sqrt{1 + \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2} \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{p}_0} \right)^2} \dots\dots\dots (27)$$

によってほぼ近似できるということである。当然のことながらこの結果は円筒かくが比較的長く、 m が比較的小なる場合であると考えられるが、少なくとも軸方向モードが低次の場合には静止時固有振動数が知られれば回転時の固有振動数の回転速度依存性は式(27)のような簡単な関係によってほぼ推定することが可能になるといえ、実用上有用な結果ではないかと考える。

さらに図3、4より $n \geq 2$ の場合には回転数が増加していても $\bar{p}$ は 0 になることはないことがわかる。このことは $n \geq 2$ の場合にはいわゆる危険速度は存在しないことを意味している。

次に $n=1$ で軸方向モードが最低次の場合の振動数の変化を示したのが図5(a)、(b)である。この場合には軸方向半波数を考えるのはやや不適當であるが、最低次対称形モードについて計算した結果であるので、その意味で $m=1$ と記している。板厚の肉厚比 $\bar{h}/h$ は図(a)の場合が1、図(b)の場合が4である。図5をみてもわかるように $n \geq 2$ の場合とは異なり $n=1$ の場合にはある点で進行波の振動数 $\bar{p}$ が 0 となっており、これがいわゆる危険速度に対応する。ちょうど $\bar{Q} = \bar{p}_0$ の点で $\bar{p}=0$ となっていないのは側板のジャイロ効果のためであると推定される。

最後に参考のために、回転数が0の場合の振動モード形を示したのが図6(a)、(b)、(c)である。側板については面外振動モード曲線を $\bar{W}$ と記した。 $n \geq 2$ の場合 n が大きくなるほど側板の変形が相対的に小さくなっていることがわかる。これに対し $n=1$ の場合には側板も大きく変形していることが観察される。

6. 結 論

両端を同じ側板で覆われた回転円筒かくの振動数解析を行って、その振動現象を検討した。その結論をまとめると以下ようになる。

(1) 円周方向波数 n が1の場合にはいわゆる危険速度が存在するが、 n が2以上の場合には本質的な振動的不安定現象は存在しない。

(2) n が2以上の場合には、円筒かくの両端が側板で覆われた場合でも、前報で示した種々の境界条件

の場合と同じく、振動数と回転数を静止時固有振動数で正規化して表示すれば回転時の振動特性はほぼ回転円環に対する簡便な式によって表すことができる。

文 献

- (1) Srinivasan, A. V. and Lauterbach, G. F., *Trans. ASME*, Ser. B, 93-4 (1971), 1229.
- (2) Penzes, L. E. and Kraus, H., *AIAA J.*, 10-10 (1972), 1309.
- (3) Padovan, J., *J. Sound & Vib.*, 31-4 (1973), 469.
- (4) Zohar, A. and Aboudi, J., *Int. J. Mech. Sci.*, 15 (1973), 269.
- (5) Padovan, J., *Int. J. Solids Struct.*, 11 (1975), 1367.
- (6) 遠藤・斉藤, 機論, 49-439 (昭58), 280.
- (7) 小林・佐藤, 機論, 44-388 (昭53), 4088.
- (8) Flugge, W., 曲面板の力学, (昭40), 130, コロナ社.

図 6 振動モード形

- (9) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plate and Shells*, (1959), 282, McGraw-Hill.
- (10) 高橋・平野, 機論, 36-285 (昭45), 731.
- (11) Smith, B. L. and Haft, E. E., *AIAA J.*, 5-11 (1967), 2080.
- (12) 遠藤・谷口, 機論, 34-268 (昭43), 2119.
- (13) 遠藤・ほか3名, 機論, 42-354 (昭51), 454.

討 論

〔質問〕 平野 芳太郎〔山形大学工学部〕

(1) 側板の定常的回転によって生ずる面内力が曲げ変形に及ぼす影響は小さいと仮定して無視しているが、(i) 無視した場合の振動数は無視しない場合の振動数に対して一律に上限あるいは下限を与えるもの

なのか、(ii) $n=1$ の場合は側板の傾斜運動も加わるので $n \geq 2$ の場合といくらか趣きがちがうように思うがいかがか、(iii) 無視する場合の評価についてなにか目安があればお知らせいただきたい。

(2) $n \geq 2$ の場合、式(27)でよい近似が得られな

くなる場合についておわりのことがあればお知らせ願いたい。

〔回答〕 (1) (i) 単純な回転円板の場合には曲げ剛性に加えて面内力の影響を考慮すると振動数は増加するので等価的に剛性が高まったと考えることができる。したがって円筒かくと連成する場合にもこの傾向はあるのではないかと予想され、これより直観的には面内力を無視した場合の振動数は無視しない場合の振動数の下限を与えるのではないかと推定されるが、厳密な意味でこの関係が成立するかどうかは回転効果も含めた現象の複雑さからいって必ずしも明確ではない。

(ii) $n=1$ の場合には側板の傾斜運動も加わることであるが、側板の傾斜もつまるところ振動変位によるものと考えることができるので、 $n \geq 2$ の場合と比べて特に質的に異なる現象であるとはいえないように思われる。

(iii) 本研究では面内力の影響を無視したが、これは側板の等価的な剛性に影響を与えるものと考えることができる。この観点からみた場合、図 3, 4 に示すごとく、側板と円筒かくの板厚比を 1 から 4 まで変化させても振動数はたかだか 2~3% の移動しかないことから考えて、本研究で取扱った回転円筒かくと側板の連成系では面内力の影響を無視しても実用的にはほとんど影響がないと考えてもよいように思われる。

(2) 前報及び本報とも限られた肉厚-直径比、長さ-直径比の場合しか取扱っていないのであまり一般的なことはいえないが、肉厚-直径比 ($=h/2a$) が 0.02 程度のものであれば比較的短い円筒かくの場合にも式(27)でかなりよい近似が得られるものと考えている。ただ肉厚-直径比が極端に小さくなると $n > 2$ で最低次モードとなる傾向があるが、そのような場合にも式(27)の近似的関係が妥当であるかどうかは確かめていない。