減衰振動系における感度解析と設計変更後の動特性予測*

井上 喜雄**, 藤川 猛**
Yoshio INOUE, Takeshi FUJIKAWA
今西悦二郎**, 阿部 亨**
Etsujiro IMANISHI, Toru ABE

Key Words: Vibration, Complex Eigen Value Analysis, Sensitivity Analysis, Modal Parameter Estimation, Design Change, Damped Linear Vibrating Systems, Rotor Dynamic Analysis

1. ま え が き

動的な外力を受ける機械や構造物を設計する場合に
はあらかじめ系の固有振動数, 減衰率, モード形などの
モードパラメータを解析的に把握して, 共振の可
能性や安定度合の検討を行う必要がある。これらのパ
ラメータの算出には通常, 機械, 構造系を有限要素法
等で離散化し, マトリックス表示された固有方程式を
数値解析的に解く方法が用いられる。特に最近では,
建屋-地盤系のような非比例形減衰の作用する構造系
の耐震設計⁽¹⁾やすべり軸受で支えられた回転軸の振動
問題⁽²⁾において, 減衰要素や非対称ばね要素を含む
[M], [C], [K]形の固有方程式を解く, いわゆる複素
固有値解析がよく用いられるようになってきた。この
ような解析および検討によって, 試設計された寸法,
諸元が動的に満足できる特性を有していると判明した
場合はよいが, 不十分であるという結果がでた場合に
試行錯誤で設計変更と計算を繰返すのは合理的でな
い。このような場合に有効な方法の一つに感度解析が
あり, 設計変数に対するモードパラメータの変化を
計算することによって設計変更の見通しをつけるこ
とができる。また系の中に不確定な要素を含んでいる場
合, それらの誤差が系の動特性にどの程度敏感に影響
するかを把握するのにも感度解析は有効な手段とな
る。

振動問題における感度解析の研究としては, 減衰の
ない[M], [K]形の系に対して固有値と固有ベクトル
の1階感度の計算法を示したFox⁽³⁾らの研究, 同じ
[M], [K]形でもマトリックス中に複素数を含むフラ

ッタの問題について感度解析を行ったRudisillら⁽⁴⁾
の研究が見られる。また実対称[M], [K]形のモード
パラメータの1階感度の応用として, 回転軸系の危険
速度の変更⁽⁵⁾, ねじり振動系の動的設計⁽⁶⁾等の報告が
ある。しかし, 減衰マトリックスを含む[M], [C], [K]
形の複素モードパラメータに関する感度解析の研究
は少なく, 岩壺ら⁽⁷⁾の数値微分による方法, Van-
honacker⁽⁸⁾の隣接構造理論による方法が見られる程
度である。Vanhonackerはマトリックスが対称な
[M], [C], [K]形の系について2階までの固有値感度
や固有ベクトルの感度を, 実測などで得たすべてのモ
ードのモードパラメータを用いて計算する手法を示
している。ところが, 設計時点で大規模な機械構造物
の固有値解析を行う場合は, 問題となる加振周波数近
傍の数個(通常は低次より数個)のモードを算出する
のが有利であり, すべてのモードを計算しないため感
度解析にはVanhonackerの方法が適用できない。

そこで, 本法では対称な[M], [C], [K]形の固有値
問題を取り上げ, まず固有振動数, 減衰率に対する1
階感度をVanhonackerとは異なった過程で理論的に
導き, 次いで注目しているある次数のモードパラメ
ータのみを用いてそのモードの高階の感度を求める手
法を提案する。さらに高階の感度についてはその有用
性に関する検討例がほとんど見当たらないため, 本研
究では計算例によってその有用性を示し, また利用技
術上の留意点などを明らかにする。

2. おもな記号

[M]: 質量マトリックス

[C]: 減衰マトリックス

[K]: 剛性マトリックス

U: 固有ベクトル

λ : 複素固有値 $= \alpha + \beta i$

* 昭和58年4月1日 第60期通常総会講演会において論文講
演として講演, 原稿受付 昭和57年10月1日。

** 正員, (株)神戸製鋼所機械研究所 (〒651 神戸市中央区脇浜町
1-3-18)。

ω : 固有角振動数 $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

h : 減衰比 $= -\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

z_i : 設計変数

m_i : i 番めの質量要素

c_i : i 番めの減衰要素

k_i : i 番めのばね要素

n : 自由度数

$a = \omega^2$

$b = 1/\omega^2$

$M_{,k} = \partial M / \partial z_k$ など

$M_{,kl} = \partial^2 M / \partial z_k \partial z_l$ など

i : 虚数単位

添 字

j : モード次数

i : 振動系要素番号

s : 規準自由度

0: 設計変更前の値

3. 複素固有値解析

機械や構造物の運動方程式は、線形であれば有限要素法などによってマトリックス形式で表現することができ、その固有方程式は次式のように表される。

$$\lambda^2 [M] U + \lambda [C] U + [K] U = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式は式(2)のような形の $2n$ 次元の複素固有値問題に変換され、QR法⁽⁹⁾や逆反復法⁽¹⁰⁾を用いて解くことができる。

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda U \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda U \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

複素固有値解析を行えば、固有値 λ_j とそれに対応する固有ベクトル U_j の組、すなわち固有ペアが $2n$ 組得られる。このうち複素固有値を持つモードについては、 λ_j 、 U_j とともに共役な相手を有するためそれら是一对として扱うことができる。一般に $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$ における実部 α_j はグロスファクタ、虚部 β_j は減衰固有角振動数と呼ばれ、非減衰固有角振動数 ω_j 、減衰比 h_j とは次の関係がある。

図1 ねじり振動系

$$\omega_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \quad h_j = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

4. モーダルパラメータ感度と設計変更後の動特性

固有値解析は構造系の諸定数が与えられて始めて実施できる。例えば、図1のようなねじり振動系を考える場合、各質点の慣性モーメント $m_1 \sim m_5$ 、軸ばね定数 $k_1 \sim k_3$ 、ダンパの減衰定数 c_1 があらかじめ設定もしくは設計寸法から算出され、電算プログラムのインプットとして与えられねばならない。そうすれば式(1)の $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ はこれらの要素データをもとに構築され、固有値解析が実行できて式(3)のモーダルパラメータが算出される運びとなる。こうして得られた ω_j 、 h_j が設計上思わしくない場合は軸径やダンパ諸元を変えて、すなわち k_i 、 c_i 、 m_i 等の数値を変更して再計算することになるが、このとき k_i 、 c_i 、 m_i の変化に対して ω_i 、 h_i がどの程度変わることが予測できれば大変便利である。この予測を可能にするため、次の感度解析を導入する。

いま、図1における振動系定数 k_i 、 c_i 、 m_i のいずれかをもとの値に対して $(1+z_i)$ 倍した状態を考える。すなわち

$$D_i = D_{i0}(1+z_i) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで D_i は k_i 、 c_i 、 m_i を総称したもので、そのいずれかであってもよい。この変更によって固有値 λ_j は次のように変化する。

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda_{0j} + \sum_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial z_i} z_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial z_i \partial z_k} z_i z_k \dots\dots\dots \\ &= \lambda_{0j} + \sum_i \lambda_{j,i} z_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \lambda_{j,ik} z_i z_k \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

上式は λ_j を z_j に関してテイラー展開したものであるが、微係数 $\lambda_{j,i}$ 、 $\lambda_{j,ik}$ 等を固有値解析の際に計算しておけば、変更率 z_i に対する λ_j の変化が把握できる。またこれらの微係数の大きさによって部材定数の変化に対する固有値の変化割合、すなわち感度が把握できる。ここでは $\lambda_{j,i}$ は1階感度、 $\lambda_{j,ik}$ は2階感度と呼ぶ。

$\lambda_{j,i}$ 等の算法は次章で詳述するが、その筋道は以下のとおりである。まず設計変数 z_i に対する $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ の感度 $[M_{,i}] = \partial M / \partial z_i$ 、 $[C_{,i}] = \partial C / \partial z_i$ 、 $[K_{,i}] = \partial K / \partial z_i$ 等を求めておく。次に式(1)を z に関して偏微分し整理すると $\lambda_{j,i}$ が λ_j 、 U_j 、 $[M_{,i}]$ 、 $[C_{,i}]$ 、 $[K_{,i}]$ で表され、数値として算出することができる。

固有ベクトル成分や ω_j 、 h_j 等のモーダルパラメー

タもそれらをまとめて ξ で表現すれば、これらは

$$\xi_j = \xi_{0j} + \sum_i \xi_{j,i} z_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \xi_{j,ik} z_i z_k + \dots \quad (6)$$

のように展開され、それぞれの感度 $\xi_{j,i}$, $\xi_{j,ik}$ …等はすべて既知量である λ_j , U_j , $[M, i]$ …等を用いて求められる。

5. 設計変数に対するモーダルパラメータの感度

5.1 設計変数に対する $[M]$, $[C]$, $[K]$ の感度 $\lambda_{j,i}$, $U_{j,i}$ などの感度を計算するための準備として、まず $[M]$, $[C]$, $[K]$ の設計変数に対する感度を求める。 $[M]$, $[C]$, $[K]$ を作成する際、 m_i , c_i , k_i などの集中定数をインプットする方法と基本寸法をインプットして有限要素法で離散化する方法とがあるが、ここでは簡単のため前者の場合で、かつばね定数 k_i を変更する場合を例にあげて説明する。他の場合も同様に処理することができる。

剛性マトリックス $[K]$ を各要素成分ごとに分離し

$$[K] = \sum_i [k_i] \quad (7)$$

と表し、さらに k_i は他の定数とは独立で、かつ一つの設計変数 z_i の関数とすれば

$$[k_i] = [k_{i0}](1 + z_i) \quad (8)$$

のように表現できる。例えば、ばね k_i を取去る場合は $z_i = -1$ となる。また最初になかったばねを付加するときは $z_i = -1$ から適当な値に変わることにより、通常 k_{i0} は設計変更前の値を意味するがこの場合の k_{i0} は基準値と考える。式(7), 式(8)を用いれば $[K]$ の z_i に対する感度 $[K, i]$ は

$$\left. \begin{aligned} [K, i] &= \frac{\partial}{\partial z_i} [K] = \frac{\partial}{\partial z_i} [k_i] = [k_{i0}] \\ [K, ik] &= \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k} [K] = 0, \quad [K, ikl] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

のように得られる。

5.2 固有値, 固有振動数, 減衰比の1階感度式(1)の $[M]$, $[C]$, $[K]$ は設計変数 z_i の関数であり $[M] = [M(z_1 \dots z_i \dots)]$, $[C] = [C(z_1 \dots z_i \dots)]$, $[K] = [K(z_1 \dots z_i \dots)]$ のように表現されることに留意して、式(1)の λ , U に添字 j をつけたものを z_i で偏微分すると

$$\begin{aligned} 2\lambda_j \lambda_{j,i} [M] U_j + \lambda_{j,i} [C] U_j + \lambda_j^2 [M, i] U_j \\ + \lambda_j [C, i] U_j + [K, i] U_j + (\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] \\ + [K]) U_{j,i} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

上式の左から U_j^T を乗じ、式(1)全体を転置した関係を用いると、 $U_{j,i}$ を含む項が消去され、さらに整理すると固有値の1階感度 $\lambda_{j,i}$ が次式

$$\lambda_{j,i} = -(\lambda_j^2 \bar{m}_{ji} + \lambda_j \bar{c}_{ji} + \bar{k}_{ji}) / \nu_j \quad (11)$$

のように求まる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_{ji} &= U_j^T [M, i] U_j, \quad \bar{c}_{ji} = U_j^T [C, i] U_j \\ \bar{k}_{ji} &= U_j^T [K, i] U_j \\ \nu_j &= 2\lambda_j U_j^T [M] U_j + U_j^T [C] U_j \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。 $\bar{m}_{ji}$, $\bar{c}_{ji}$, $\bar{k}_{ji}$ の算出において、 $[M, i]$, $[C, i]$, $[K, i]$ は5.1節で述べた方法で求められているのであるとはマトリックス演算を行うだけであるが、通常 $[M, i]$ 等は設計変数 z_i の関係する要素のみが有意であり、他の成分は零となるので、非零要素の部分のみの演算を行うようにすれば効率的となる。

さて $\lambda_{j,i}$ は、 $\lambda_{j,i} = \alpha_{j,i} + \beta_{j,i} i$ のように表されるので、 $\alpha_{j,i}$, $\beta_{j,i}$ は式(11)の結果を用いて次式で求められる。

$$\alpha_{j,i} = \text{Re}(\lambda_{j,i}), \quad \beta_{j,i} = \text{Im}(\lambda_{j,i}) \quad (13)$$

さらに、これらの値に関連するモーダルパラメータの感度が以下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{j,i} &= \frac{\partial}{\partial z_i} (\omega_j^2) = \frac{\partial}{\partial z_i} (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \\ &= 2\alpha_j \alpha_{j,i} + 2\beta_j \beta_{j,i} \\ \beta_{j,i} &= \frac{\partial}{\partial z_i} (1/\omega_j^2) = -\alpha_{j,i} / \alpha_j^2 \\ \omega_{j,i} &= \alpha_{j,i} / 2\omega_j \\ h_{j,i} &= -\alpha_{j,i} / \omega_j + \frac{1}{2} \alpha_j \alpha_{j,i} / \omega_j^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

なお、上式において $[C] = 0$ の場合を考えると $[M]$, $[K]$ 形に対するFox⁽³⁾の結果と一致する。

5.3 固有ベクトルの1階感度 固有ベクトルの感度 $U_{j,i}$ を

$$U_{j,i} = \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2 + \dots$$

のように各モードの一次結合で表現し、直交条件を用いれば $[M]$, $[K]$ 形の場合⁽³⁾⁽⁴⁾と同様の手順により係数 η_j を求めることが可能である。しかしこれでは $U_{j,i}$ を求めるのにすべてのモードの固有ベクトルが必要となるので、ここでは注目する j 次モードの定数のみを用いて $U_{j,i}$ を計算する手法を考える。

式(10)において、左辺の $\lambda_{j,i}$ に式(11)の結果を用いると左辺第1項から第4項まではすべて既知量となる。また第5項の係数マトリックスも既知であるので $U_{j,i}$ を求める方程式として次式が利用できる。

$$[G] U_{j,i} = P_{j,i} \quad (15)$$

ここで

$$\begin{aligned} [G] &= \lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K] \\ P_{j,i} &= 2\lambda_j \lambda_{j,i} [M] U_j + \lambda_{j,i} [C] U_j \\ &\quad + \lambda_j^2 [M, i] U_j + \lambda_j [C, i] U_j \end{aligned}$$

表 1 2自由度系の定数

i	m_i kg	c_i Ns/m	k_i N/m
1	0.5	0.05	2.0
2	1.0	1.0	2.0

表 2 2自由度系の
モーダルパラメータ

j	一次	二次
a_j	1.221 2	6.550 5
h_j	0.237 3	0.122 2
u_{1j}	1.0	1.0
u_{2j}	0.723 7 -0.134 2 i	-0.620 3 -0.296 6 i

ただし、マトリックス $[G]$ は正則ではないのでこのままでは解けない。そこで解の有用性を失わないような拘束を設けることによって式(15)を解くようにする。固有値に重根がない場合には $[G]$ の階数は $n-1$ となるので次式の拘束を一つ設ける。

$$U_{sj,i}=0 \dots\dots\dots (16)$$

もし重根を有する場合には $[G]$ の階数が低下するので、それに応じて拘束を追加すればよい。式(16)における添字 s は基準自由度のモード成分を一定に保つ

図 2 2自由度系

という意味になる。基準自由度としては、モード成分が0でない、すなわち振動の節でなければどこでもよいが、本報の固有値計算では固有ベクトル成分の最大値が単位量となる様正規化しているので、基準点としてはこのベクトル成分が単位量となる自由度を選んでいる。式(16)の拘束を考慮すれば式(15)の連立方程式は静的な構造解析問題において、 s 点の変位を強制的に与える一種の強制変位問題、あるいは s 点の自由度が変位しないような固定条件を設けることに相当し、解析的には $[G]$ の s 行 s 列成分 g_{ss} を大きな値 (例えば $10^6 \times g_{ss}$) に置き換えることによって $U_{j,i}$ を解くことができる。

式(16)は各設計変数ごとに解く必要があるがマトリックス $[G]$ は共通であるので、一度 $[G]$ を三角分解しておけばあとは外力項 P_i を必要な数だけ取換え、前進消去、後退代入を繰返すことによって計算を効果的に進めることができる。

5.4 高階の感度 式(10)の両辺を設計変数 z_k でさらに微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{2(\lambda_{j,k}\lambda_{j,i} + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k})[M] + 2\lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[M, k] + 2\lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[M, i] + \lambda_{j,i}^2[M, ik] + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C, k] \\ & + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C, i] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C, k] + [K, ik]\} U_j + (2\lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[M] + \lambda_{j,i}^2[M, i] + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C, i] \\ & + [K, i]) U_{j,k} + \{2\lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[M] + \lambda_{j,i}^2[M, k] + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C, k] + [K, k]\} U_{j,i} \\ & = -\{\lambda_{j,i}^2[M] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C] + [K, i]\} U_{j,ik} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

上式の両辺に左から U_j^T を乗じて直交条件を用いると右辺の $U_{j,ik}$ に関する項がなくなり、 $\lambda_{j,ik}$ が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \lambda_{j,ik} = & \frac{-1}{\nu_j} \{2\lambda_{j,i}(\lambda_{j,i}\bar{m}_{jk} + \lambda_{j,k}\bar{m}_{ji}) + \lambda_{j,i}\bar{c}_{jk} + \lambda_{j,k}\bar{c}_{ji} + U_j^T(2\lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[M] + \lambda_{j,i}^2[M, ik] \\ & + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C, i] + [K, ik]) U_j + U_j^T(2\lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[M] + \lambda_{j,i}^2[M, i] + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C, i] + [K, i]) U_{j,k} \\ & + U_j^T(2\lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[M] + \lambda_{j,i}^2[M, k] + \lambda_{j,k}\lambda_{j,i}[C] + \lambda_{j,i}\lambda_{j,k}[C, k] + [K, k]) U_{j,i} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

したがって α_j, β_j に関する2階の感度は次式により計算できる。

$$\alpha_{j,ik} = \text{Re}(\lambda_{j,ik}), \quad \beta_{j,ik} = \text{Im}(\lambda_{j,ik}) \dots\dots\dots (19)$$

さらに α, β に関連するモーダルパラメータの2階感度は次のように表される。

$$\begin{aligned} a_{j,ik} &= 2(\alpha_{j,i}\alpha_{j,k} + \alpha_{j,i}\alpha_{j,ik} + \beta_{j,i}\beta_{j,k} + \beta_{j,i}\beta_{j,ik}) \\ b_{j,ik} &= \frac{1}{a_j^3}(a_{j,k}a_{j,i}) - \frac{1}{a_j^2}a_{j,ik} \\ \omega_{j,ik} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\omega_j^3}a_{j,i}a_{j,k} + \frac{1}{\omega_j}a_{j,ik} \right) \\ h_{j,ik} &= \frac{1}{2\omega_j^3}(a_{j,i}a_{j,k} + \alpha_{j,i}\alpha_{j,k} + \alpha_{j,i}\alpha_{j,ik} + \alpha_{j,k}\alpha_{j,i}) + \frac{3}{4\omega_j^5}a_{j,i}a_{j,k} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式(18)の $\lambda_{j,ik}$ を式(17)に代入すれば式(17)の左辺は既知量となる。これを $P_{j,ik}$ とおけば式(17)は

$$\{\lambda_j^3[M] + \lambda_j[C] + [K]\}U_{j,ik} = P_{j,ik} \quad \dots\dots\dots (21)$$

のように連立方程式を解く問題に帰着され、 $U_{j,ik}$ が求められる。ただし左辺係数マトリックスの階数が低下しているので、式(16)の拘束と同様 $U_{sj,ik}=0$ の拘束条件を付加して扱うことになる。

以上の方法により2階までの $\lambda_j, a_j, \beta_j, a_j, b_j, \omega_j, h_j, U_j$ に関する感度が計算できるが、これより高階のものについても同様の手順を繰返すことによって計算

が実行できる。すなわち、式(1)の λ, U に添字をつけたものを、設計パラメータで l 回微分した式に左から U_j^l を乗じ、直交条件と $(l-1)$ 階までの感度などそれ以前に求めた値を代入すれば λ_j の l 階感度が求まる。次に、それを先の l 回微分した式に代入し5・3節と同様の手法を用いれば U_j の l 階感度が求められる。

表 3 2自由度系の感度

j	一 次 モ ー ド			二 次 モ ー ド		
$1+z_i$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(a_1/a_{10})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(\dot{k}_1/k_{10})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(U_{21}/ U_{210})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(a_2/a_{20})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(k_2/k_{20})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(U_{220}/ U_{220})$
m_1/m_{10}	-0.4765	-0.4468	-0.2337-0.0149 <i>i</i>	-0.5235	0.6764	-1.0539-0.6403 <i>i</i>
m_2/m_{20}	-0.5667	-0.0729	0.2085+0.1143 <i>i</i>	-0.4333	-1.1634	0.9269+0.8347 <i>i</i>
c_1/c_{10}	-0.0040	0.0042	-0.0053+0.0091 <i>i</i>	0.0040	0.2360	-0.0253+0.0104 <i>i</i>
c_2/c_{20}	0.0904	1.0352	-0.3850-0.0242 <i>i</i>	-0.0904	0.7380	0.2794-0.3993 <i>i</i>
k_1/k_{10}	0.1063	0.2502	0.3640+0.1080 <i>i</i>	0.8937	-0.7013	0.2093+0.3731 <i>i</i>
k_2/k_{20}	0.8505	-0.7699	-0.3892-0.0087 <i>i</i>	0.1495	0.2143	-0.3363-0.1786 <i>i</i>

表 4 4自由度系の定数

i	m_i kg	c_i Ns/m	k_i N/m
1	1.0	2.0	4.0
2	0.5	2.0	8.0
3	2.0	1.0	2.0
4	1.0	0.5	4.0
5	-	0.5	-

表 5 4自由度系のモーダルパラメータ

j	一 次	二 次
a_j	0.3591	4.3572
w_j	0.5992	2.087
h_j	0.2976	0.4646
u_{1j}	1.0	1.0
u_{2j}	0.9103+0.0507 <i>i</i>	0.1102+0.3051 <i>i</i>

表 7 2自由度系の感度

$1+z_i$	感 度	一 次	二 次
k_2/k_{20}	$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}(a_2/a_{20})$	-0.3250	0.0706
m_1/m_{10}	$\frac{\partial}{\partial z_i}(b_2/b_{20})$	0.4765	0.0122
m_1/m_{10}	$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}(b_2/b_{20})$	0.1571	-0.0153
c_2/c_{20}	$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}(h_2/h_{20})$	0.4427	-0.1427

表 6 4自由度系の感度

j	一 次		二 次	
$1+z_i$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(a_1/a_{10})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(\dot{k}_1/k_{10})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(a_2/a_{20})$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(k_2/k_{20})$
m_1/m_{10}	-0.3660	-0.1010	-0.7051	-0.3895
m_2/m_{20}	-0.1483	-0.0688	0.0423	-0.0068
m_3/m_{30}	-0.487	-0.3220	-0.3961	-0.0095
m_4/m_{40}	-0.0535	-0.0141	-0.0286	-0.0743
c_1/c_{10}	0.0112	0.0084	0.4006	0.5365
c_2/c_{20}	0.0082	0.0055	-0.1781	0.2253
c_3/c_{30}	0.0025	0.0918	-0.0267	0.0281
c_4/c_{40}	0.0408	0.4928	-0.0082	0.1859
c_5/c_{50}	0.0053	0.4131	-0.0124	-0.0156
k_1/k_{10}	0.0047	-0.0700	0.2994	-0.5627
k_2/k_{20}	0.0057	-0.0947	0.5598	0.0875
k_3/k_{30}	0.5953	-0.1329	-0.0204	-0.0231
k_4/k_{40}	0.3598	0.2083	0.0738	0.0182

図 3 4自由度系

6. 計算例および感度解析の有用性検討

本章では4, 5章で示した手法を簡単な振動系モデルに適用し, その有用性を検討する。

6.1 1階感度 最初のモデルとして表1の定数を有する図2の2自由度系を取上げる。複素固有値解析結果のうちおもなものを表2に, $a_j (= \omega_j^2)$, h_j , U_j に関する感度を設計変更前の値で無次元化して表3に示す。以下表, 図では感度は $a_{j,i}$ 等の記号の代わりに偏微分記号を使い, かつもとの値で無次元化した $(\partial/\partial z_i)(a_j/a_{j0})$ 等を用いる。設計変数の方は z_i の代わりに変更後の定数と変更前の定数の比, すなわち式(4)で示したように $1+z_i = D_i/D_{i0}$ (例えば k_i/k_{i0}) を用いる。またモードの次数は複素根の中で ω_j の小さい順に定めており, 共役の2根で一組とし虚数部が正のものをその代表として用いている。表3および後述の図7における U_{220} 等の添字は質点2の二次モードの初期定数であることを示す。

表3において a_j に関する感度を参照すれば固有振動数に影響度が大きい設計変数を知ることができる。

図4 k_2 を変更したときの固有振動数予測

図5 m_1 を変更したときの固有振動数予測

すなわち, 感度の符号が正でその値の大きいもの程固有振動数を増加させる影響が大きく, 一次モードに対して大きい順に並べれば k_2 , k_1 , c_2 となる。また振動数を下げる効果が大きいのは m_2 , m_1 , c_1 の順であることがわかる。この中で k に対する感度はいずれも正, m に対する感度はいずれも負であるが, c については一方は正で他方は負であり, その影響のしかたが異なっている。

次に減衰比 h について見ると, c に対する感度はいずれも正で m に対しては負である。しかし k に対しては k_1 と k_2 で符号が逆になっておりその影響度もかなり大きい。さらに二次モードではその傾向が逆転し, m に対しても符号が異なる等, 複雑な挙動を示すことがわかる。一般に c を大きくすると h が増加するケースが多いが逆に小さくなる場合もあり, そのような傾向は感度を用いないとわかりにくい。その一例が図3に示す4自由度系であり, その諸元を表4に, 固有値解析の結果と1階感度の一部をそれぞれ表5, 表6に示す。表6より一次モードではすべての c に対して h に対する感度は正であるが, 二次モードでは c_5 に対する感度が負になっている。また a に対する感度は m ,

表8 c_2/c_{20} に対する2階感度

j	一 次	二 次
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(h_j/h_{j0})$	3.54×10^{-3}	5.81×10^{-4}

表9 3自由度系の定数

i	m_i kg	c_i Ns/m	k_i N/m
1	0.1	0.1	0.1
2	2.0	0.1	2.0
3	1.0	0.1	1.0

図6 c_2 を変更したときの減衰比の予測

c, k のいずれに対する感度も二次モードの場合はその符号が一定でなく影響のしかたがまちまちであることを示している。

以上のように、複素モーダルパラメータに対する設計変数の影響のしかたはかなり複雑であり、通常の固有値解析結果のみからは予測することは難しいが、1階の感度を用いれば微小変化の範囲内でその影響度を知ることができる。

6・2 1, 2階の感度を用いた設計変更後のモーダルパラメータ予測 この項では1階および2階の感度を用いて設計変更後のモーダルパラメータを予測し、変更後のデータを用いて再固有値計算した結果と比較してその有用性を確かめる。

まず図2の系を考える。表7は図2の系に関する2階感度と m_1 に対する b_j の1階感度であり、これと表3の結果を用いて予測する。まず、 k_2 を変更した場合の a_j の変化を図4に示す。1自由度系や $[M], [K]$ 形でモード変化のない場合には a_j は k_i に比例するので $\partial^n a_j / \partial k_i^n = 0 (n \geq 2)$ となり、 k_i をいくら大きくしても a_j の増加に対して一定の効果が期待できる。そして

変更幅が大きくなっても1階感度のみで変更後の a_j の値を十分な精度で予測できるはずである。ところが図4の再固有値計算の結果は変更幅が大きくなると1階感度を用いて予測した値より離れていっている。これは k_2 を増加するに伴い a_1 に対しては影響度が減少するように、 a_2 に対しては増大するようにモードが変化してゆくと考えられる。このようなモード変

表 10 3自由度系の感度

$1+z_i$	$\frac{\partial}{\partial z_i}(a_i/a_0)$	$\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}(a_i/a_0)$
k_4/k_{40}	1.47	-8.91×10^{-2}
k_5/k_{50}	1.48	-2.97×10

表 11 モーダルパラメータ

$1+z_i$	第2項	第3項	第2項/第3項
k_4/k_{40}	1.47×10^{-1}	4.46×10^{-4}	3.03×10^{-3}
k_5/k_{50}	1.48×10^{-1}	1.49×10^{-1}	1.00

図 9 3自由度系

図 7 c_2 を変更したときのモード変化予測 図 8 c_2 を変更したときの減衰比予測

図 10 ばね付加時の固有振動数予測

図 11 遠心圧縮機の軸振動系

表 12 軸系の諸元

質点	質 量 kg	慣 性 モーメント kg·cm	軸 長 cm	軸 径 cm
1:9	0.9	0	10	5.0
2:8	2.3	0	15	7.0
3:7	13.0	0	35	10.0
4:6	67.7	1470	40	12.0
5	67.7	1470		
軸受 $k=24.6 \text{ MN/m}$, $c=46.3 \text{ kNs/m}$				

化まで考慮した予測は1階の感度だけでは不十分で高階の感度まで考慮しなければならない。図で破線で示したのは2階までの感度を用いた予測値であるが、図の範囲では再計算値とよく一致している。図5は m_1 を変更したときの $b_j (=1/\omega_j^2)$ の変化を示す。 a_j の代わりに b_j を用いたのは図4の場合と同様、1自由度系では $\partial^n b_j / \partial m_j^n = 0$ ($n \geq 2$) となるからである。次に c_2 を変更したときの h_j の変化を図6に、 U_{22} の変化を図7に示す。図7では U_{22} の変化分を実部と虚部に分け、 U_{22} の絶対値で割った無次元量で示している。図5～図7においても変更量が小さい場合は1階感度を用いた予測でよくあうが、大幅な変更になると高階まで考慮した予測が必要になってきている。

図8は、図2のモデルで c_2 を変更した場合の h_j の予測を描いたものである。計算には表6の1階感度と表8の2階感度を用いたが、表8よりわかるように、この場合は2階感度が小さくなっているために1階感度だけでよい予測が行われている。このように、たまたま高階感度が小さい場合は1階感度のみで大変更時までの予測が可能となるが、これも2階感度の大きさを見てはじめて判断できることである。

2階感度が有効となる他の例として、初期設計のモデルには含まれていない要素を新たに付け加える場合を考える。要素追加の場合は比較すべき値がないので、微小変更か大変更かの区別がつかず1階の感度がどこまで適用できるか判断が難しい。この場合は特に2階感度が役に立つ。図9は3自由度系で、その諸元を表9に示す。このモデルにおいて図中の破線で記入したばね要素 k_4 , k_5 を追加する。これらの要素の基準値とともに 1 N/m として a_j に対する感度を計算すると表10の値が得られた。表によれば1階の感度は k_4 と k_5 にあまり差はないが、2階の感度を見ると k_5 に対する値は非常に大きな負の値になっており、図10に示す再計算でも k_5 を増加した場合は1階感度による直線からすぐにはずれてくることが示されている。試

表 13 軸振動系動特性の予測

() 内は変更後のデータを用いた再計算値

設計状態	変更後データ	危険速度 rpm	共振倍率
初期状態	---	2423	8.11
軸23, 78 径変更	$d=9.0 \text{ cm}$	2299 (2289)	9.75 (9.85)
軸受すきま 変更	$k=24.4 \text{ MN/m}$ $c=70.3 \text{ kNs/m}$	2484 (2482)	6.05 6.03
軸受変更	$k=17.65 \text{ MN/m}$ $c=31.4 \text{ kNs/m}$	2299 (2292)	6.89 (6.91)

みに $z_i=0.1$ とした場合の式(6)の第2項、第3項の値は表11のようになり、 k_4 の場合第3項は第2項に比べて小さいが、 k_5 の場合は第3項がすでに第2項を超えはじめており、 k_5 付加によってすでにモードが変化していることを示している。このように新たに要素を追加する場合は2階感度による影響度の変化(直線からのずれ)のチェックなしに1階感度のみで予測することは誤差につながる危険性がある。

以上のように設計変更後のパラメータ変化は変更幅が小さいときは1階感度のみでも予測できるが、変更幅が大きくなるとずれてくる。大変更を行うときに2階感度まで用いると、高階の項があまり大きくならない範囲であれば精度が大いに改善される。また1階感度による予測を行う場合でも2階感度の大きさを知ることによって1階感度の適用限界が把握できる。特に新たな要素を付加する場合には、2階感度の大きさによって1階感度予測の適用範囲を知り、また逆に付加要素定数の適切な選択等が可能となる。

7. 回転軸振動系への応用

回転軸設計への応用として、すべり軸受で支えられた遠心圧縮機の軸系を取上げる。図11(a)は3個のインペラを有する回転軸で、すべり軸受にはティルティングパッド軸受が用いられている。このような軸系の設計に際しては、危険速度および共振倍率を計算し、もし定格回転数が危険速度に近かったり、共振通過時の振幅が大きくなるようであれば、しかるべき設計改善を行う必要がある。そこで、図11(a)を(b)のような有限要素モデルに置きかえ、まず初期状態におけるデータで複素固有値解析を行い、次に設計諸元を変更した場合の動特性を、感度解析によって予測する。

ここでは、軸系の初期状態における諸元を表12のように設定し、複素固有値解析に際しては図11(b)のような9質点系として軸部ははりの静たわみ曲線を変位関数とする有限要素法、軸質量、インペラ質量お

よび慣性モーメントは集中定数系, また軸受は油膜のばね定数, 減衰定数として扱う。ティルティングパッド軸受を使用しているため油膜係数に連成項がなく, $[M]$, $[C]$, $[K]$ は対称な形となる。また, 上下, 水平方向の振動が分離されるので以下では, 実用上特に重要な上下方向一次モードについて検討を加える。

まず, 表 12 に示す初期状態の定数を用いて固有値解析を行いその時に必要な感度を計算しておく。次に 3 種類の設計変更に対して感度解析による予測を行う。一つは軸要素 $\overline{34}$ 及び $\overline{67}$ の軸径を $\phi 100$ から $\phi 90$ に細くした場合であり, 他の二つは軸受条件を変えた場合である。それぞれに対して 2 階までの感度を用いて求めた予測値と確認のための変更後のデータで再計算した結果を表 13 に示す。表では ω , h の代わりに危険速度 $N_{cr}=60 \times \omega / 2\pi$, $A=1/2h$ の形で表現しているが, 本法の手法によって精度のよい予測ができていくことがわかる。このような手法は設計段階だけでなく, 試運転時に発生した振動トラブルの対策検討にも有効に利用することができる。

8. あとがき

本研究では実対称な $[M]$, $[C]$, $[K]$ マトリックスで表現される減衰振動系を対象に, 設計変数に対する固有振動数, 減衰率, モード等の変化割合, すなわちモデルパラメータの感度を計算する手法を示し, 次にこのような感度を用いて設計変更後のモデルパラメータの値を予測する方法を示した。いくつかの振動系モデルに対して, 1 階および 2 階の感度を用いて設計

変更後の予測計算を行い, 再計算によって得た精密解と比較検討した結果, 小さな設計変更は 1 階感度で十分であり, 大きな変更の場合には 1 階感度だけでは誤差が大きくなるが, 2 階感度まで考慮することによって精度の改善がはかれること, また 2 階感度の数値を見ることによって 1 階感度の適用限界や全体的な動特性推移を把握できることなど, 本法の有用性が, 特に 2 階感度利用の有効性が確かめられた。これによって望ましい動特性が得られるような設計改善を合理的に行えるようになり, また不確定な要素が存在するときもその誤差に対する影響度を簡単に評価できるようになった。

終わりに, 本研究の討論に際して誤記の指摘をして頂いた東京理科大学 福田敏男助教授に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 小林・武藤, 日本建築学会論文報告集, 255 (昭 52-5), 35.
- (2) 斉藤, 機論, 46-401, C (昭 55), 8.
- (3) Fox, R.L. and Kapp, M.P., *AIAA J.*, 6-12 (1968), 2426.
- (4) Rudisill, C.S. and Bhatia, K.C., *AIAA J.*, 10-12 (1972), 1569.
- (5) Lund, J.W., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 102 (1980), 115.
- (6) Doughty, S., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 99 (1972), 142.
- (7) 岩壺, 機論, 46-405, C (昭 55), 493.
- (8) Vanhonacker, P., *AIAA J.*, 18-12 (1980), 1511.
- (9) 戸川, マトリックスの数値解析, (昭 46), オーム社.
- (10) 藤川・ほか 3 名, 機論, No.820-8 (昭 57), 54.

討 論

〔質問〕 福田 敏 男〔東京理科大学工学部〕

(1) (604 ページ左欄 23 行め～右欄 9 行め) 初期設計モデルに含まれていない要素を新たに付加える場合は, 当然元の計算モデルにその要素を入れなければならないので, 計算が簡単になるわけではない。ばね K5 を付加した図 10 の場合の結果より, 一次, 二次近似でも不十分で, 再計算が必要なのではないか。

(2) 動特性を定常状態と過渡状態の場合に分けると, 本手法の感度解析による過渡状態の動特性予測について, その適用性はどうか。

〔回答〕 (1) 初期モデルに含まれていない新要素の感度を計算するには, まずその要素を含まない系で固有値計算を行い, 次に新要素の基準値例えば k_{i0} を導入して式(11)等の感度計算を行う。したがって固

有値計算は 1 回で済むが, 基準値が大きい場合は新要素付加による元の系への影響度が大きく高階感度が無視できなくなって 1, 2 階感度を用いても予測は不十分となり再計算が必要となる。

(2) 定常加振に対する応答, あるいはステップ応答などの過渡的加振応答いずれにおいても系の固有振動数減衰率, モードなどモデルパラメータが決まればその挙動を表現することができる。したがって本手法により上記のパラメータが予測できれば定常, 過渡にかかわらず系の動特性が判断できる。

〔質問〕 下 郷 太 郎〔慶応義塾大学理工学部〕

(1) ばね, ダンパ, 質量などの新しい要素が追加されるときは, 高階感度を調べる必要があるようであるが, 論文に示された例以外にも計算例があれば教え

て頂きたい。また、パラメータの変更によって新しく非線形性が生ずる場合、例えばすきまの変更によって衝突や摩擦が生じるような場合には、このような感度解析を有効に適用することができるのか、ご教示頂ければ幸いである。

(2) 制御系の設計問題などで Robust Controller というのがあるが、パラメータの変更による特性の変化が最小となるような設計法、いいかえれば、最小感度設計というのが考えられるとすれば、実際問題としてどのような場合に役に立つのか、もし具体的な例が考えられればご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 図9のモデルで新要素の基準値 k_{s0} を $1/10$ (0.1 N/m) とした場合の結果を付図1に示す。これは図10の $k_i/k_{i0}=0$ 近傍を拡大したものに相当するが、新要素の値が元の系に対して小さいときは予測性は改善される。このように高階感度は予測精度を上げるためだけでなく新要素の影響強さを示すめやすとなる。他のモデルに対する計算は行っていないが同様の傾向となるはずである。

すきまや摩擦の存在する非線形系への適用は厳密には困難であるが、これらの要素を振幅依存性の等価な線形ばね、線形減衰要素等に置換えることができれば

付図 1

本手法によって系の動特性変化の傾向を把握できるかと思う。

(2) 最小感度設計への応用に関して具体的な構想は持っていないが、例えば、(a) 機械部品の自由支持状態の固有振動数を測定したいとき感度最小位置で支える、(b) 軽量構造物の振動測定において振動計取付け位置を質量感度最小位置に選ぶ、(c) 共振回避や最適ダンピングをめざしてすでにチューニングされた機器類に新たな変更が生じたとき感度最小部分をいじる、等が考えられる。