軸方向に補強された角筒殻の自由振動*

入江 敏博**, 山田 元**, 井田 肇***

Free Vibration of Longitudinally Stiffened Prismatic Shells

by Toshihiro IRIE, Gen YAMADA and Hajime IDA

An analysis is presented for the free vibration of simply supported, longitudinally stiffened prismatic shells, in which the transfer matrix technique is used. The governing equations of vibration of a plate (a side wall) are written in a matrix differential equation by use of the transfer matrix of the plate. The transfer matrix is determined by numerical integration of the equation, and the entire structure matrix of the shell is obtained by the product of the transfer matrix of the plate and the point matrix at the joint between two plates and a stiffener. The frequency equations are derived in terms of the elements of the structure matrix. By the application of the method, the natural frequencies (eigenvalues of vibration) and the mode shapes are calculated numerically for rectangular prismatic shells with structural symmetry, and the effects of the stiffeners on the vibration are discussed.

Key Words: Vibration, Prismatic Shell, Stiffener, Natural Frequency, Mode Shape

1. は し が き

軸方向に補強された円筒殻や角筒殻は多くの機械構造物に広く用いられている。したがって、このうち補強円筒殻の振動については、かなり多くの研究^{(1)~(13)}があるが、長方形あるいは多角形断面を有する角筒殻については、補強されない殻について二、三の研究⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾があるにすぎず、補強された角筒殻については、その振動を論じた研究は全く見当たらない。

本報では、軸方向に弾性ばりで補強され、両端が単純支持された長方形断面を有する角筒殻の自由振動を解析し、その振動に及ぼす補強材の影響を明らかにする。この目的のために、角筒殻を構成する側板(平板)の面内、面外の自由振動を支配する方程式を伝達マトリックスを用いた微分方程式で表し、これより求めた殻の周方向の伝達マトリックスと、補強材と殻との接合部におけるポイントマトリックスとを用いて構造マトリックスを形成し、これから境界条件を用いて振動数方程式を導く。そして、この方法を二つの対称面を

有する長方形断面の角筒殻に適用して数値計算を実施し、得られた結果について若干の考察を加える。

2. 側板の伝達マトリックス

図1は軸方向に補強された角筒殻の断面を示す。殻の長さを L とし、図のように断面寸法と局所座標系 (x, y, z) をとる。殻を構成する側板の面内と面外の振動をあわせた運動方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \partial N_x / \partial x + \partial N_{yx} / \partial y + \rho H \omega^2 u &= 0 \\ \partial N_y / \partial y + \partial N_{xy} / \partial x + \rho H \omega^2 v &= 0 \\ \partial Q_x / \partial x + \partial Q_y / \partial y + \rho H \omega^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ρ は密度、 H は板厚、 ω は円振動数を表す。せん断力の成分は

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \partial M_x / \partial x + \partial M_{yx} / \partial y \\ Q_y &= \partial M_y / \partial y + \partial M_{xy} / \partial x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ケルビン・キルヒホフのせん断力は

$$S_y = Q_y + \partial M_{yx} / \partial x \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。また、膜力の成分は

$$\left. \begin{aligned} N_x &= D(\partial u / \partial x + \nu \partial v / \partial y) \\ N_y &= D(\partial v / \partial y + \nu \partial u / \partial x) \\ N_{xy} &= N_{yx} \\ &= D(1-\nu)(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

モーメントの成分は

* 昭和59年7月9日 第925回講演会において講演、原稿受付 昭和59年1月26日。

** 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

*** 学生員、北海道大学大学院。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= K(-\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial \phi / \partial y) \\ M_y &= K(\partial \phi / \partial y - \nu \partial^2 w / \partial x^2) \\ M_{xy} &= M_{yx} = K(1 - \nu) \partial \phi / \partial x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。ここで、 u, v, w は殻の軸方向、周方向ならびに板に直角な方向の変位、 ϕ は曲げによる角変位で $\phi = -\partial w / \partial y$ で表される。また、 D と K は、それぞれ板の伸びこわさと曲げこわさで、縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν と板厚を用いて $D = EH / (1 - \nu^2)$ 、 $K = EH^3 / 12(1 - \nu^2)$ で与えられる。

両端が単純支持された角筒殻の自由振動に対して、上式中の各変数は次のように変数分離することができる。

$$\left. \begin{aligned} u &= H \bar{u} \cos a_m x \\ (v, w) &= H(\bar{v}, \bar{w}) \sin a_m x \\ \phi &= (H/C) \bar{\phi} \sin a_m x \\ (N_x, N_y, Q_y, S_y) &= (K/C^2)(\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{Q}_y, \bar{S}_y) \sin a_m x \\ (N_{xy}, N_{yx}, Q_x) &= (K/C^2)(\bar{N}_{xy}, \bar{N}_{yx}, \bar{Q}_x) \cos a_m x \\ (M_x, M_y) &= (K/C)(\bar{M}_x, \bar{M}_y) \sin a_m x \\ (M_{xy}, M_{yx}) &= (K/C)(\bar{M}_{xy}, \bar{M}_{yx}) \cos a_m x \\ a_m &= m\pi/L \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 C は断面における補強材を除いた側板の全周、 m は軸方向の半波数を表し、記号 $\bar{}$ を付した諸量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \dots$ はそれぞれの無次元変数を表す。さらに、簡単のため、無次元量

$$\left. \begin{aligned} (\eta, h, l) &= (y, H, L)/C \\ (b_1, b_2, b_3) &= (B_1, B_2, B_3)/C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

図 1 補強された角筒殻

を導入するとともに、無次元振動数パラメータ λ を $\lambda^2 = \rho H C^2 \omega^2 / D \dots\dots\dots (8)$ で定義する。

式(1)～(5)より、 $N_x, Q_x, Q_y, N_{yx}, M_x, M_{xy}, M_{yx}$ の七つの変数を消去し、状態量ベクトル $z(\eta) = \{\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w} \ \bar{\phi} \ \bar{M}_y - \bar{S}_y \ \bar{N}_y - \bar{N}_{xy}\}^T$ と係数マトリックス $U = [U_{ij}] (i, j=1, 2, \dots, 8)$ とを用いることによって、次の微分方程式が導かれる。

$$dz(\eta)/d\eta = Uz(\eta) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、式(9)の係数マトリックス U は逆対称 (Cross-Symmetric) マトリックスで、その非零要素は

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= -\beta_m, \quad U_{18} = -h/6(1-\nu) \\ U_{21} &= \nu\beta_m, \quad U_{27} = h/12 \\ U_{34} &= -1, \quad U_{43} = -\nu\beta_m^2 \\ U_{45} &= 1/h, \quad U_{54} = 2(1-\nu)h\beta_m^2 \\ U_{63} &= -(1-\nu^2)h\beta_m^4 + 12\lambda^2/h \\ U_{72} &= -12\lambda^2/h \\ U_{81} &= -12\{(1-\nu^2)\beta_m^2 - \lambda^2\}/h \\ \beta_m &= m\pi/l \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。殻の状態量ベクトル $z(\eta)$ は周方向の伝達マトリックス $T(\eta, \eta_0)$ を用いて

$$z(\eta) = T(\eta, \eta_0)z(\eta_0) \quad (\eta \geq \eta_0) \dots\dots\dots (11)$$

と表されるので、式(9)より次のマトリックス微分方程式が導かれる。

$$dT(\eta, \eta_0)/d\eta = UT(\eta, \eta_0) \quad (\eta \geq \eta_0) \dots\dots\dots (12)$$

伝達マトリックス $T(\eta, \eta_0)$ は、式(12)を出発値 $T(\eta_0, \eta_0) = I$ のもとで数値積分することによって決定される。ここでは、ルンゲ・クッタ・ギル法を用いて計算を実施した。

3. 補強材接合部におけるポイントマトリックスと振動数方程式

側板と補強材との接合部におけるポイントマトリックスは次のように誘導される。側板の端部が補強材を介して直角に接合されるとき、補強材と、その両側の板の変位の間に、次の連続条件式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} u' &= u^- - (s'_1/2) \partial v^- / \partial x \\ &= u^+ + (s'_2/2) \partial v^+ / \partial x \\ v' &= -w^- + (s'_1/2) \phi^- = v^+ \\ w' &= v^- = w^+ + (s'_2/2) \phi^+ \\ \phi' &= \phi^- = \phi^+ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、記号 $'$ を付した量は補強材に関するものであり、記号 $+$ を付した量は接合部の両側の側板に関する量を表す。ここでは、簡単のため補強材は $s'_1 \times s'_2$ の長方形断面を有し、断面の図心は側板の中央面上にあるものと仮定してある。接合部での力とモーメントの釣

り合いの条件式は

$$\left. \begin{aligned} E'A'\partial^2 u'/\partial x^2 + N_{xy}^+ - N_{xy}^- \\ + \rho'A'\omega^2 u' = 0 \\ -E'I_z'\partial^4 v'/\partial x^4 + N_y^+ + S_y^- \\ + (s_2'/2)\partial N_{xy}^+/ \partial x + \rho'A'\omega^2 v' = 0 \\ -E'I_y'\partial^4 w'/\partial x^4 + S_y^+ - N_y^- \\ - (s_1'/2)\partial N_{xy}^- / \partial x + \rho'A'\omega^2 w' = 0 \\ G'C_s\partial^2 \psi'/\partial x^2 + M_y^+ - M_y^- \\ - (s_1'/2)S_y^- - (s_2'/2)S_y^+ + \rho'I_p'\omega^2 \psi' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで、 A' は補強材の断面積、 I_y' 、 I_z' は断面二次モーメント、 I_p' は極慣性モーメント、 G' は横弾性係数、 C_s はサン・ブナンのねじり定数を表す。式(13)、(14)より

$$z(\eta_e+0) = P_e \cdot z(\eta_e-0) \quad (15)$$

が得られる。ここで、 P_e は補強材接合部におけるポイントマトリックス

$$P_e = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ P_d & I_f \end{bmatrix} \quad (16)$$

を表し、その部分マトリックス I_d 、 I_f 、 P_d は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} I_d = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma_1 h \beta_m & \sigma_2 h \beta_m & -\sigma_1 \sigma_2 h^2 \beta_m^2 \\ 0 & 0 & -1 & \sigma_1 h \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ I_f = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma_1 h & \sigma_2 h & \sigma_1 \sigma_2 h^2 \beta_m^2 \\ 0 & 0 & -1 & -\sigma_1 h \beta_m \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma_2 h \beta_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ P_d = \begin{bmatrix} 0 & P_{12} & 0 & P_{14} \\ 0 & P_{22} & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

マトリックス P_d 中の非零要素は

$$\left. \begin{aligned} P_{12} &= \sigma_2 h (\varepsilon_y h^2 \beta_m^4 - 12 \alpha \lambda^2) \\ P_{14} &= h^2 (\gamma \beta_m^2 - 12 i \lambda^2) \\ P_{22} &= -(\varepsilon_y h^2 \beta_m^4 - 12 \alpha \lambda^2) \\ P_{31} &= 12 \sigma_2 h \beta_m (\varepsilon_x \beta_m^2 - \alpha \lambda^2) \\ P_{32} &= -12 \sigma_1 \sigma_2 h^2 \beta_m^2 (\varepsilon_x \beta_m^2 - \alpha \lambda^2) \\ P_{33} &= -(\varepsilon_x h^2 \beta_m^4 - 12 \alpha \lambda^2) \\ P_{34} &= \sigma_1 h (\varepsilon_x h^2 \beta_m^4 - 12 \alpha \lambda^2) \\ P_{41} &= -12 (\varepsilon_x \beta_m^2 - \alpha \lambda^2) \\ P_{42} &= 12 \sigma_1 h \beta_m (\varepsilon_x \beta_m^2 - \alpha \lambda^2) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで、補強材に関する無次元量

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \rho'A'/\rho H^2, \quad i = \rho'I_p'/\rho H^4 \\ (\sigma_1, \sigma_2) &= (s_1', s_2')/2H \\ \varepsilon_x &= E'A'/DH, \quad \varepsilon_y = E'I_y'/KH \\ \varepsilon_z &= E'I_z'/KH, \quad \gamma = G'C_s/KH \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

が用いられている。

側板が補強材を介して一つの平面内で接合される場合も、以上と同様な手順によりポイントマトリックス P_s が導かれる。すなわち

$$P_s = \begin{bmatrix} J_d & 0 \\ \bar{P}_d & J_f \end{bmatrix} \quad (20)$$

このうち部分マトリックスは

$$\left. \begin{aligned} J_d = \begin{bmatrix} 1 & -2\sigma_2 h \beta_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\sigma_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ J_f = \begin{bmatrix} 1 & -2\sigma_2 h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\sigma_2 h \beta_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \bar{P}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{12} & \bar{P}_{14} \\ 0 & 0 & P_{22} & P_{12} \\ P_{31} & \bar{P}_{32} & 0 & 0 \\ P_{41} & P_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

図 2 補強された角筒殻の振動の固有値 ($\nu=0.3$, $l=1$, $b_1=0.2$, $b_2=b_3=0.1$, $h=0.003$, $m=1$)

図3 補強された角筒殻の振動形 ($\nu=0.3, l=1, b_1=0.2, b_2=b_3=0.1, h=0.003, \sigma_2=\sigma_3=3, m=1$)

で与えられる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{14} &= h^2(\gamma\beta_m^2 - 12i\lambda^2) \\ &\quad - \sigma_2^2 h^2(\epsilon_y h^2 \beta_m^4 - 12a\lambda^2) \\ \bar{P}_{32} &= \epsilon_x h^2 \beta_m^4 - 12a\lambda^2 \\ &\quad - 12\sigma_2^2 h^2 \beta_m^2(\epsilon_x \beta_m^2 - a\lambda^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

である。

角筒殻の断面が対称構造を有するとき、その対称面に関して対称な(S形)振動と逆対称な(A形)振動が生じる。このとき、それぞれの形の振動に関して次の境界条件が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \text{S形振動: } v &= \psi = S_y = N_{xy} = 0 \\ \text{A形振動: } u &= w = M_y = N_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

さらに、図1に示すように、二つの対称面を有する長方形断面の角筒殻においては、これら二つの対称面に関して対称なSS形振動と逆対称なAA形振動、一つの対称面に関して対称で、他の面に関して逆対称なSA, AS形振動の四つの形の振動が生じる。この場合は、これら二つの対称面に囲まれる1/4の区間を計算の対象とすれば十分である。図1に示すP₂点の状態量ベクトル $z(1/4)$ はP₁点のベクトル $z(0)$ を用いて

$$\begin{aligned} z(1/4) &= T(1/4, b_1/2 + b_2) \cdot P_s \\ &\quad \cdot T(b_1/2 + b_2, b_1/2) \cdot P_e \cdot T(b_1/2, 0) \cdot z(0) \\ &= \bar{T}(1/4, 0) z(0) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

と書ける。式中のマトリックス $\bar{T}(1/4, 0)$ はこの1/4区間における角筒殻の構造マトリックスを表す。対称面に関する境界条件式(23)を式(24)に代入することによって、上記四つの形の振動に対応する振動数方程式が直ちに誘導される。角筒殻の固有振動数 ω は振動数方程式の固有値 λ を計算することによって決定され、振動形はこの固有値に対応する固有ベクトルを計算することによって決定される。

図4 補強された角筒殻の振動の固有値 ($\nu=0.3, l=1, b_2=b_3, h=0.003, \sigma_1=\sigma_2=3, m=1$)

4. 計算結果と考察

以上の方法によって計算された長方形断面殻の計算結果を次に示す。

図2は、軸方向の半波数 $m=1$ における補強材の寸法に対する振動の固有値の変化を示す。 $\sigma_i=0.5$ は補強材の断面寸法が板厚に等しい場合の数値である。補強材の寸法が大きくなるに従って、殻の振動の固有値はAA-1振動のように減少するもの、逆にSS-2振動の

図5 補強された角筒殻の振動の固有値 ($\nu=0.3$, $\beta=0.2$, $b_2=b_3=0.1$, $h=0.003$, $\sigma_1=\sigma_2=3$, $m=1$)

ように増加するもの、あるいは波状に変化するなど、振動形によって多様な変化を示す。これは補強材が主として質量効果をもたらすか、あるいは補強効果をもたらすかに起因するものである。

図3は、図2に与えた $\sigma_1=\sigma_2=3$ の補強材を有する殻の振動形を示す。各図の実線は二つの面内変位 $\bar{u}$ と $\bar{w}$ とを合成したものである。SS-1, AS-1あるいはAA-1振動のように縦の側板の振幅が大きいもの、逆に、SS-2やSA-3振動のように横板の振幅が大きいもの、あるいは殻全体が振動するものなど、種々の振動形が存在する。

図4は、側板の寸法比 b_2/b_1 に対する振動の固有値の変化を示す。図3で示した縦板が主として振動するSS-1, AS-1, AA-1振動においては、寸法比が増加するに従って固有値が減少する。これは、縦板の高さが高くなることに相当すると見なし得るからである。こ

れに対して、SS-2振動のように主として横板の振動する振動形では、寸法比の増加が横板の幅の減少と見なすことができるため固有値は単調に増加する。これら両方の特性を有するSA-1やSA-2振動などでは固有値は必ずしも単調には変化しない。

図5は、殻の長さに対する振動の固有値の変化を示す。殻の長さの短いとき、SS-1とAS-1振動、SA-2とAA-1振動、…のように接近した固有値を有する異なった形の振動が存在する。いずれの形の振動の固有値も、殻の長さが長くなるに従って単調に減少する。

5. あとがき

本報では、マトリックス計算法によって、両端が単純支持された、長方形断面を有する補強角筒殻の自由振動を解析し、数値計算の結果から補強材の効果を定量的に明らかにした。この方法は解析的に取扱いが簡単であり、有限要素法など他の方法と比較して数値計算が容易であることなど、この種の問題に対して有効な方法であるといえる。

文 献

- (1) Schnell, W. and Heinrichsbauer, F., *NASA TT*, F-8856 (1964).
- (2) McElman, J. A., ほか2名, *AIAA J.*, 4-5 (1966), 887.
- (3) Ojalvo, I. U. and Newman, M., *AIAA J.*, 5-6 (1967), 1139.
- (4) Egle, D. M. and Sewall, J. L., *AIAA J.*, 6-3 (1969), 518.
- (5) Sewall, J. L. and Naumann, E. C., *NASA Tech. Note*, D-4705 (1968).
- (6) Egle, D. M. and Soder, K. E., Jr., *NASA CR*, 1316 (1969).
- (7) McDonald, D., *AIAA J.*, 8-2 (1970), 852.
- (8) Rinehart, S. A. and Wang, J. T. S., *J. Sound Vib.*, 24-2 (1972), 151.
- (9) Wang, J. T. S. and Rinehart, S. A., *Trans. ASME, Ser. E*, 41-4 (1974), 1087.
- (10) Rozen, A. and Singer, J., *J. Sound Vib.*, 34-3 (1974), 357.
- (11) Mahabiraja, ほか2名, *J. Sound Vib.*, 52-1 (1977), 65.
- (12) 齊藤・山口, 機論, 46-406, C (昭55), 617.
- (13) Singer, J. and Prucz, J., *J. Sound Vib.*, 80-1 (1982), 117.
- (14) Abrahamson, A. L., *J. Sound Vib.*, 28-2 (1973), 259.
- (15) Irie, T., ほか2名, *AIAA J.* (投稿中).