翼群・車盤と回転軸との連成振動の解析*
(第1報, 非回転時)

道 村 晴 一**, 田 村 章 義**

Coupled Vibration Analysis for Bladed Disk Assemblies and Flexible Shafts
(1st Report, Irrotational Condition)

by Seiichi MICHIMURA and Akiyoshi TAMURA

This paper is concerned with coupled vibration between flexible bladed disks and flexible shafts in the application of the Finite Element Method. Since a bladed disk is considered as a periodically symmetric structure, it is enough to analyze one periodic substructure of a bladed disk by the use of the Cyclic Symmetry Method. In this paper, it is assumed that only one nodal point at the center of a bladed disk is connected with one nodal point of a shaft. The followings are known through this study. (i) Natural modes of zero nodal diameters generated on a bladed disk are coupled with longitudinal and torsional vibration of a shaft. (ii) Natural modes of one nodal diameter generated on it are coupled with only lateral vibration of a shaft. (iii) Natural modes of more than two nodal diameters generated on it are uncoupled with vibration of a shaft completely.

Key Words: Vibration of Continuous System, Bladed Disk Assembly, Flexible Shaft, Coupled Vibration, Finite Element Method, Periodically Symmetric Structure

1. ま え が き

回転機械の高速化, 軽量化などに伴い, その機械の中核部である羽根車には種々の励振力が作用し, 振動が原因となって破損・破壊することがある。その励振力としては, 羽根車周囲の流体に起因するもの, 回転軸の振動, 軸受, 回転軸を介して外部から作用するものなどが考えられる。本報においては, 後者の羽根車の翼群・車盤と回転軸との連成振動を扱い, 系全体の振動特性(固有振動数・固有モードなど)の特長などを明らかにすることにある。

回転軸と形状の簡単な弾性円板との連成振動に関しては二, 三の研究⁽¹⁾⁻⁽³⁾が報告されている。しかし実際の羽根車の形状は複雑であり, 解析的に高次の振動特性まで求めることは困難と思われる。そこで本報においては, 有限要素法により数値的に解くことにする。

羽根車は複雑な形状をしているが, 周期的対称(回転対称)であるものが多い。このことを考慮すれば, 羽根車の振動を論ずる時, それの一周期分(以下, 基本部分構造)を計算の対象とすればよい(静止時, 回転時

を問わない)。しかもこのことにより計算精度を損なうことは全くなく, 計算時間も短くなる⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾。さらに羽根車が中実な場合においても, 基本部分構造だけを計算の対象とすればよいことがわかっている⁽⁸⁾。

羽根車に関しては以上の計算方法を適用し, 回転軸に対しては従来のはり要素を用いて有限要素分割⁽⁹⁾する。そして車盤と回転軸とは1節点間で結合しているとする。軸の曲げ剛性の異方性は考慮するが, 軸受の影響は考慮しない。

2. 計 算 方 法

図1に示す翼群・車盤(図が複雑になるため, 円板として表示)と回転軸とから成る系において, 有限要素法を用いて剛性マトリックスなど(以下, 特性マトリックス)を求めた時, それらにはどのような特長があるかを考察し, このことを考慮した計算方法を考える。系全体を翼群・車盤部と回転軸部に分離し, 各々について考え最後にそれらを節点sにおいて結合する。

2・1 翼群・車盤部 この部分に関しては文献(8)で詳細に論じており, 以下簡単に説明する。図2(a)に示すように, この部分はn個の同一の部分構造から構成されていると考えられる。その結果, 図2(b)に示す一つの基本部分構造だけを有限要素分割して特性

* 昭和59年7月10日 第925回講演会において講演, 原稿受付 昭和58年12月27日。

** 正員, 東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

図1 羽根車(翼群・車盤)と回転軸からなる系(羽根車は円板形状として表示)

マトリックスを求め、それらを合成するだけでこの部分全体の特性マトリックスが求められる。ただし、中心点s以外の節点の変位、力などは円筒座標系表示(1節点あたりの自由度は6、半径、円周、軸(z)方向の変位、角変位の順)、中心点sのそれらは座標系0-xyz表示されているものとする。剛性マトリックスを例にとり、力のつりあい式を示すと

$$\begin{bmatrix} A & E \\ E^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ f_s \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで u は中心点s以外の各部分構造の変位ベクトル $u_k (k=0, 1, \dots, n-1)$ からなる変位(列)ベクトル

$$u = [u_0^T u_1^T \dots u_{n-1}^T]^T \quad (2)$$

であり、 u_s は中心点sの変位ベクトル(6行の列ベクトル、 x, y, z 方向の変位、角変位の順)

$$u_s = [u_{sv} u_{sx} u_{sy} u_{sz}]^T \quad (3)$$

である。また f, f_s はそれぞれの領域に働く力である。 A は次式で定義される巡回マトリックスである。

$$A = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & 0 & \dots & 0 & K_{n-1} \\ K_{n-1} & K_0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ K_1 & 0 & \dots & 0 & K_{n-1} & K_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

なお E, K_{ss} および K_0, K_1, K_{n-1} については説明が長くなるため、ここでは省略する⁽⁸⁾。

いま、次式で定義される列ベクトル $[v^T v_s^T]^T$ (v_s は6行の列ベクトル) を新しく用意する。

$$\begin{Bmatrix} u \\ u_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} B & O \\ O & X \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ v_s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$v = [v_0^T v_1^T \dots v_{n-1}^T]^T \quad (6)$$

$$v_s = [\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6]^T \quad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} W_0^0 & W_1^0 & \dots & W_{n-1}^0 \\ W_0^1 & W_1^1 & \dots & W_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_0^{n-1} & W_1^{n-1} & \dots & W_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$W_j^k = e^{i \frac{2\pi}{n} k j} I \quad (9)$$

($i = \sqrt{-1}$, I : 単位マトリックス)

$$X = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & & & \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ & 0 & & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

さて $(1/\sqrt{n})B$ および X がユニタリマトリックスであることを考慮して、式(5)を式(1)に代入し整理すると

$$\begin{bmatrix} Q_0 & & & & & \\ & Q_1 & & & & \\ & & Q_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & Q_j & \\ & & & & & Q_{n-1} \\ & \bar{e}_1^T & & & & \\ & & \bar{e}_2^T & & & \\ e_3^T & & & & & \\ & \bar{e}_4^T & & & & \\ & & \bar{e}_5^T & & & \\ e_6^T & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_3 & \bar{\beta}_4 & \bar{\beta}_5 & \bar{\beta}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_j \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Q_j = K_0 + K_1 e^{i\frac{2\pi}{n}j} + K_{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}j} \dots \dots \dots (12)$$

$$\begin{Bmatrix} g \\ g_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{B}^T & 0 \\ 0 & \bar{X}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ f_s \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

$$g = [g_0^T g_1^T \dots g_{n-1}^T]^T \dots \dots \dots (14)$$

$$g_s = [\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6]^T \dots \dots \dots (15)$$

なお, $e_1 \sim e_6$ (列ベクトル), $\beta_1 \sim \beta_6$ (スカラー) など, その詳細については文献(8)を参照されたい。

式(11)から, 式(1)で示した一つの大次元の方程式はいかなる近似をも用いることなく, 次に示すいくつかの小次元の方程式に分離されることになる。

● $j=0$:

$$\begin{bmatrix} Q_0 & e_3 & e_6 \\ e_3^T & \beta_4 & \beta_6 \\ e_6^T & \beta_6 & \beta_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_3 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_0 \\ \rho_3 \\ \rho_6 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

$$\begin{bmatrix} Q_0 & E_0 \\ E_0^T & B_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_{s0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_{s0} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (16)'$$

● $j=1, (n-1)$:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & e_1 & e_4 & & & \\ \bar{e}_1^T & \beta_1 & \beta_3 & & & 0 \\ \bar{e}_4^T & \beta_3 & \beta_2 & & & \\ & & & Q_{n-1} & e_2 & e_5 \\ 0 & & & \bar{e}_2^T & \beta_1 & \beta_3 \\ & & & \bar{e}_5^T & \beta_3 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_{n-1} \\ v_2 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ -\rho_1 \\ \rho_4 \\ g_{n-1} \\ \rho_2 \\ \rho_5 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & E_1 & & & \\ \bar{E}_1^T & B_1 & & & 0 \\ & & Q_{n-1} & E_{n-1} & \\ 0 & & \bar{E}_{n-1}^T & B_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{s1} \\ v_{n-1} \\ v_{sn-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_{s1} \\ g_{n+1} \\ g_{sn-1} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (17)'$$

● $2 \leq j \leq nf$:

$$\begin{bmatrix} Q_j & 0 \\ 0 & Q_{n-j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ v_{n-j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_j \\ g_{n-j} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (18)$$

● $j=n/2$ (n が偶数の時) :

$$Q_{n/2} v_{n/2} = g_{n/2} \dots \dots \dots (19)$$

ここで

$$nf = \begin{cases} n/2 - 1 & (n \text{ が偶数}) \\ (n-1)/2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \dots \dots \dots (20)$$

式(16)~(19)の示す物理的意味については, 説明が長くなるため, ここでは省略する⁽⁸⁾。

2.2 回転軸部 この部分については, 図3に示されるはり要素 (一要素あたり2節点をもち, 一節点の自由度は6, x, y, z 方向の変位および角変位) を用

いて分割されるものとする。要素内の任意点 (x, y, z) におけるそれぞれの方向の変位を u, v, w , 節点 i の変位ベクトルを u_i^T (6行の列ベクトル), 変位関数マトリックスを N (3行12列, i 行 j 列の成分を N_{ij}) とすると

$$[uvw]^T = N [u_i^T u_j^T]^T \dots \dots \dots (21)$$

$$u_i^e = [u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi}]^T \dots \dots \dots (22)$$

(a) n 個の同一の部分構造からなる羽根車 (翼群・車盤)

(b) 翼群・車盤部の基本部分構造

図 2

図 3 はり要素

$$\left. \begin{aligned}
 N_{1,1} &= (2-3\zeta+\zeta^2)/4 & N_{1,7} &= (2+3\zeta-\zeta^3)/4 \\
 N_{1,5} &= (1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3)l/8 & N_{1,11} &= -(1+\zeta-\zeta^2-\zeta^3)l/8 \\
 N_{1,6} &= -(1-\zeta)y/2 & N_{1,12} &= -(1+\zeta)y/2 \\
 N_{2,2} &= (2-3\zeta+\zeta^3)/4 & N_{2,8} &= (2+3\zeta-\zeta^3)/4 \\
 N_{2,4} &= -(1-\zeta-\zeta^2+\zeta^3)l/8 & N_{2,10} &= (1+\zeta-\zeta^2-\zeta^3)l/8 \\
 N_{2,6} &= (1-\zeta)x/2 & N_{2,12} &= (1+\zeta)x/2 \\
 N_{3,1} &= (1-\zeta^2)3x/2l & N_{3,7} &= -(1-\zeta^2)3x/2l \\
 N_{3,2} &= (1-\zeta^2)3y/2l & N_{3,8} &= -(1-\zeta^2)3y/2l \\
 N_{3,3} &= (1-\zeta)/2 & N_{3,9} &= (1+\zeta)/2 \\
 N_{3,4} &= -(1+2\zeta-3\zeta^2)y/4 & N_{3,10} &= -(1-2\zeta-3\zeta^2)y/4 \\
 N_{3,5} &= (1+2\zeta-3\zeta^2)x/4 & N_{3,11} &= (1-2\zeta-3\zeta^2)x/4
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$\zeta = 2z/l - 1 \quad (0 \leq z \leq l \text{ に対して } -1 \leq \zeta \leq 1) \dots\dots\dots (24)$$

ただし、式(23)で定義されていない N の成分はすべて零である。この変位関数マトリックス N を用いて、一要素の剛性マトリックスを通常の有限要素法の手法により求め、力のつりあい式を示すと

$$\begin{bmatrix}
 12\gamma_x & 0 & 0 & 0 & 6\gamma_x l & 0 & -12\gamma_x & 0 & 0 & 0 & 6\gamma_x l & 0 \\
 0 & 12\gamma_y & 0 & -6\gamma_y l & 0 & 0 & 0 & -12\gamma_y & 0 & -6\gamma_y l & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -6\gamma_y l & 0 & 4\gamma_y l^2 & 0 & 0 & 0 & 6\gamma_y l & 0 & 2\gamma_y l^2 & 0 & 0 \\
 6\gamma_x l & 0 & 0 & 0 & 4\gamma_x l^2 & 0 & -6\gamma_x l & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_x l^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_0 l^2 \\
 -12\gamma_x & 0 & 0 & 0 & -6\gamma_x l & 0 & 12\gamma_x & 0 & 0 & 0 & -6\gamma_x l & 0 \\
 0 & -12\gamma_y & 0 & 6\gamma_y l & 0 & 0 & 0 & 12\gamma_y & 0 & 6\gamma_y l & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -6\gamma_y l & 0 & 2\gamma_y l^2 & 0 & 0 & 0 & 6\gamma_y l & 0 & 4\gamma_y l^2 & 0 & 0 \\
 6\gamma_x l & 0 & 0 & 0 & 2\gamma_x l^2 & 0 & -6\gamma_x l & 0 & 0 & 0 & 4\gamma_x l^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_0 l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 l^2
 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{zi} \\ m_{xi} \\ m_{yi} \\ m_{zi} \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ f_{zj} \\ m_{xj} \\ m_{yj} \\ m_{zj} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

$\times \frac{EA}{l}$

ここで、 l は一要素の z 方向の長さ、 A は断面積 (一定)、 E は縦弾性係数であり、 ν はポアソン比として

$$A = \iint_A dx dy \quad \gamma_x = \iint_A x^2 dx dy / Al^2 \quad \gamma_y = \iint_A y^2 dx dy / Al^2 \quad \gamma_0 = (\gamma_x + \gamma_y) / 2(1 + \nu) \dots\dots\dots (26)$$

さて、翼群・車盤部の中心点 s に施したのと同様な変換、すなわち式(10)で示されるユニタリマトリックス X を用いて式(25)を変形すると

$$\begin{bmatrix}
 12\gamma_+ & 12\gamma_- & 0 & i6\gamma_+l & -i6\gamma_-l & 0 & -12\gamma_+ & -12\gamma_- & 0 & i6\gamma_+l & -i6\gamma_-l & 0 \\
 12\gamma_- & 12\gamma_+ & 0 & i6\gamma_-l & -i6\gamma_+l & 0 & -12\gamma_- & -12\gamma_+ & 0 & i6\gamma_-l & -i6\gamma_+l & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -i6\gamma_+l & -i6\gamma_-l & 0 & 4\gamma_+l^2 & -4\gamma_-l^2 & 0 & i6\gamma_+l & i6\gamma_-l & 0 & 2\gamma_+l^2 & -2\gamma_-l^2 & 0 \\
 i6\gamma_-l & i6\gamma_+l & 0 & -4\gamma_-l^2 & 4\gamma_+l^2 & 0 & -i6\gamma_-l & -i6\gamma_+l & 0 & -2\gamma_-l^2 & 2\gamma_+l^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_0l^2 \\
 -12\gamma_+ & -12\gamma_- & 0 & -i6\gamma_+l & i6\gamma_-l & 0 & 12\gamma_+ & 12\gamma_- & 0 & -i6\gamma_+l & i6\gamma_-l & 0 \\
 -12\gamma_- & -12\gamma_+ & 0 & -i6\gamma_-l & i6\gamma_+l & 0 & 12\gamma_- & 12\gamma_+ & 0 & -i6\gamma_-l & i6\gamma_+l & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -i6\gamma_+l & -i6\gamma_-l & 0 & 2\gamma_+l^2 & -2\gamma_-l^2 & 0 & i6\gamma_+l & i6\gamma_-l & 0 & 4\gamma_+l^2 & -4\gamma_-l^2 & 0 \\
 i6\gamma_-l & i6\gamma_+l & 0 & -2\gamma_-l^2 & 2\gamma_+l^2 & 0 & -i6\gamma_-l & -i6\gamma_+l & 0 & -4\gamma_-l^2 & 4\gamma_+l^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_0l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0l^2
 \end{bmatrix} e$$

$$\times \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \nu_{i1} \\ \nu_{i2} \\ \nu_{i3} \\ \nu_{i4} \\ \nu_{i5} \\ \nu_{i6} \\ \nu_{j1} \\ \nu_{j2} \\ \nu_{j3} \\ \nu_{j4} \\ \nu_{j5} \\ \nu_{j6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{i1} \\ \rho_{i2} \\ \rho_{i3} \\ \rho_{i4} \\ \rho_{i5} \\ \rho_{i6} \\ \rho_{j1} \\ \rho_{j2} \\ \rho_{j3} \\ \rho_{j4} \\ \rho_{j5} \\ \rho_{j6} \end{bmatrix} e \quad \dots (27)$$

ここで

$$\gamma_+ = (\gamma_x + \gamma_y)/2 \quad \gamma_- = (\gamma_x - \gamma_y)/2 \quad \dots (28)$$

$$[\nu_{i1} \nu_{i2} \nu_{i3} \nu_{i4} \nu_{i5} \nu_{i6}]_e^T = \bar{X}^T [u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi}]_e^T \quad \dots (29)$$

である。この γ_- は回転軸部が等方 ($\gamma_x = \gamma_y$) の時零であり、異方 ($\gamma_x \neq \gamma_y$) の時零ではない。

さて式(27)において、式(11)が式(16)～(19)に分離されたのと同様に、次のように分離可能である。

● ν_3, ν_6 に対して：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma_0l^2 & 0 & -\gamma_0l^2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma_0l^2 & 0 & \gamma_0l^2 \end{bmatrix} e \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \nu_{i3} \\ \nu_{i6} \\ \nu_{j3} \\ \nu_{j6} \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} \rho_{i3} \\ \rho_{i6} \\ \rho_{j3} \\ \rho_{j6} \end{bmatrix} e \quad \dots (30)$$

$$\begin{bmatrix} K_0^{(ii)} & K_0^{(ij)} \\ K_0^{(ji)} & K_0^{(jj)} \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} v_{s0}^{(i)} \\ v_{s0}^{(j)} \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} g_{s0}^{(i)} \\ g_{s0}^{(j)} \end{bmatrix} e \quad \dots (30)'$$

● ν_1, ν_4 および ν_2, ν_5 に対して：

$$\begin{bmatrix}
 12\gamma_+ & i6\gamma_+l & -12\gamma_+ & i6\gamma_+l & 12\gamma_- & -i6\gamma_-l & -12\gamma_- & -i6\gamma_-l \\
 -i6\gamma_+l & 4\gamma_+l^2 & i6\gamma_+l & 2\gamma_+l^2 & -i6\gamma_-l & -4\gamma_-l^2 & i6\gamma_-l & -2\gamma_-l^2 \\
 -12\gamma_+ & -i6\gamma_+l & 12\gamma_+ & -i6\gamma_+l & -12\gamma_- & i6\gamma_-l & 12\gamma_- & i6\gamma_-l \\
 -i6\gamma_+l & 2\gamma_+l^2 & i6\gamma_+l & 4\gamma_+l^2 & -i6\gamma_-l & -2\gamma_-l^2 & i6\gamma_-l & -4\gamma_-l^2 \\
 12\gamma_- & i6\gamma_-l & -12\gamma_- & i6\gamma_-l & 12\gamma_+ & -i6\gamma_+l & -12\gamma_+ & -i6\gamma_+l \\
 i6\gamma_-l & -4\gamma_-l^2 & -i6\gamma_-l & -2\gamma_-l^2 & i6\gamma_+l & 4\gamma_+l^2 & -i6\gamma_+l & 2\gamma_+l^2 \\
 -12\gamma_- & -i6\gamma_-l & 12\gamma_- & -i6\gamma_-l & -12\gamma_+ & i6\gamma_+l & 12\gamma_+ & i6\gamma_+l \\
 i6\gamma_-l & -2\gamma_-l^2 & -i6\gamma_-l & -4\gamma_-l^2 & i6\gamma_+l & 2\gamma_+l^2 & -i6\gamma_+l & 4\gamma_+l^2
 \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \nu_{i1} \\ \nu_{i4} \\ \nu_{j1} \\ \nu_{j4} \\ \nu_{i2} \\ \nu_{i5} \\ \nu_{j2} \\ \nu_{j5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{i1} \\ \rho_{i4} \\ \rho_{j1} \\ \rho_{j4} \\ \rho_{i2} \\ \rho_{i5} \\ \rho_{j2} \\ \rho_{j5} \end{bmatrix} e \quad \dots (31)$$

2.3 翼群・車盤部と回転軸部との結合 2.1 節と 2.2 節において得られた結果を基礎にして、図 1 に示されるように翼群・車盤部の中心点 s の節点と回転軸部の一つの節点 (i) とが結合することにより全体の系が構成されている場合について考える。まず翼群・車盤部の $j=0$ に対する式(16)と回転軸部の式(30)とが合成されて、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} Q_0 & E_0 \\ E_0^T & B_0 + K_0^{(ii)} & K_0^{(ij)} \\ & K_0^{(ji)} & K_0^{(jj)} + \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_{s0}^{(i)} \\ v_{s0}^{(j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_{s0}^{(i)} \\ g_{s0}^{(j)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (32)$$
[illegible]
$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{H}_1 \\ \tilde{H}_{n-1} & \tilde{K}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \tilde{g}_{n-1} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (33)'$$

ここで, λ_0 は固有値 (スカラー), $\vec{v}_0$ は固有ベクトル (列ベクトル), また $\vec{M}_0$ は K_0 に対応する質量マトリックスである。これら $\vec{K}_0$, $\vec{M}_0$ はともに実対称, かつ正定値

(あるいは $\bar{K}_0$ は非負定値) であるため, λ_0 は正 (あるいは非負), $\bar{v}_0$ は実ベクトルとなる。系全体の固有角振動数は $\sqrt{\lambda_0}$, 固有モードは式 (5), (29) より

$$\begin{aligned} & [u_i^T u_i^T \cdots u_i^T \cdots u_{n-1}^T]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} B [v_0^T 0 \cdots 0]^T \cdots (37) \\ & [u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi}]^T \\ &= X [0 0 \nu_{i3} 0 0 \nu_{i6}]^T \cdots (38) \end{aligned}$$

すなわち, 中心点 s および回転軸部の固有モードは, 回転軸 (z) 方向の変位 ($w_i = \nu_{i3}$, 縦振動) と角変位 ($\theta_{xi} = \nu_{i6}$, ねじれ振動) だけが生じ (零の場合もある) 他の方向の変位と角変位は全く生じない。翼群・車盤部の固有モードは, 各部分構造のモード形が同一 ($u_k = 1/\sqrt{n} v_0, k=0, 1, \dots, n-1$) となっている。このことは, 翼群・車盤部に生じる節直径 (翼形状などにより, 必ずしも直線とは限らない) 数が主に零であることを示している (節直径数が n の整数倍のこともある)。

つぎに, 指数 $j=1$ の時の固有値問題は

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_1 & \bar{H}_1 \\ \bar{H}_{n-1} & \bar{K}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_{n-1} \end{Bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{M}_1 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_{n-1} & \bar{M}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_{n-1} \end{Bmatrix} \cdots (39)$$

ここで, $\bar{M}_1, \bar{M}_{n-1}, \bar{N}_1, \bar{N}_{n-1}$ はそれぞれ $\bar{K}_1, \bar{K}_{n-1}, \bar{H}_1, \bar{H}_{n-1}$ に対応する質量マトリックスである (回転軸部が等方 ($\gamma_x = \gamma_y, \gamma_z = 0$) の時, $\bar{H}_1 = \bar{H}_{n-1} = \bar{N}_1 = \bar{N}_{n-1} = 0$)。式 (34), (35) などを考慮すれば, 式 (39) はエルミートマトリックスに対する固有値問題となり, さらに剛性, 質量マトリックスが正定値 (あるいは非負定値) であることを考えれば, λ_1 は正 (あるいは非負) となる。固有ベクトル $[\bar{v}_1^T \bar{v}_{n-1}^T]^T$ は一般に複素数となるが, 式 (34), (35) などを考えれば, $\bar{v}_1$ と $\bar{v}_{n-1}$ の間には

$$\bar{v}_{n-j} = \bar{v}_j \quad (j=1) \cdots (40)$$

したがって, 系全体の固有モードは式 (5), (29) より

$$[u_i^T u_i^T \cdots u_i^T \cdots u_{n-1}^T]^T = \frac{1}{\sqrt{n}} B [0 v_1^T 0 \cdots 0 v_{n-1}^T]^T \cdots (41)$$

$$\begin{aligned} \therefore u_k &= \frac{2}{\sqrt{n}} \operatorname{Re} \left\{ e^{i \frac{2\pi}{n} j k} v_j \right\} \\ (j=1, k=0, 1, \dots, n-1) \cdots (41)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi}]^T \\ &= X [\nu_{i1} \bar{\nu}_{i1} 0 \nu_{i4} \bar{\nu}_{i4} 0]^T \cdots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore u_i &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \{\nu_{i1}\}, \quad v_i = -\sqrt{2} \operatorname{Im} \{\nu_{i1}\}, \\ w_i &= 0, \quad \theta_{xi} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{\nu_{i4}\}, \\ \theta_{yi} &= -\sqrt{2} \operatorname{Im} \{\nu_{i4}\}, \quad \theta_{zi} = 0 \cdots (42)' \end{aligned}$$

すなわち, 中心点 s および回転軸部の固有モードは, x, y 方向の変位 u_i, v_i と角変位 θ_{xi}, θ_{yi} が生じ (零の

場合もある), z 方向の変位と角変位は全く生じない形である (横振動, 曲げ振動) 翼群・車盤部の固有モードは, 節直径数が主に 1 本であるモード形である (節直径数が $(n \pm 1)$ 本などの場合もある)。以上のことは, 回転軸の等方, 異方性にかかわらず成立する。

なお, 指数 $j=0, 1$ から求まる各固有モードにおいて, 回転軸は変形するが, 翼群・車盤は回転軸の動きにつられてただ単に変位し, 変形しないモード (剛体モード) の場合もありうる。また, 回転軸部に対して, 式 (23) で示される変位関数 (マトリックス) N , すなわち縦振動, ねじれ振動と横振動とが連成しないとしているため, 指数 $j=0$ と 1 とが分離可能となっている。

さて, 指数 j が $2 \sim n_f$ の時の固有値問題は

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_j & 0 \\ 0 & \bar{K}_{n-j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_j \\ \bar{v}_{n-j} \end{Bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} \bar{M}_j & 0 \\ 0 & \bar{M}_{n-j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_j \\ \bar{v}_{n-j} \end{Bmatrix} \cdots (43)$$

ここで, $\bar{M}_j, \bar{M}_{n-j}$ はそれぞれ $\bar{K}_j, \bar{K}_{n-j}$ に対応する質量マトリックスであり, 式 (34) と同じ関係が成立している。さらに, これら四つのマトリックスには回転軸部の成分はない。したがって, $j=2 \sim n_f$ から求まる固有モードにおいて, 中心点 s および回転軸部は全く変位しない形となっている。翼群・車盤部の固有モードは, 式 (34) を考慮すれば $\bar{v}_j (=v_j)$ と $\bar{v}_{n-j} (=v_{n-j})$ の間には式 (40) の関係が成立しているため, 式 (41)' のように示される。このことは, 翼群・車盤部に生じる節直径が主に j 本であることを示す。なお, 指数 $j=n/2$ (n が偶数) の時もほぼ同様であるため, その説明は省略する。以上のことから, 指数 j が 2 以上に対して, 次のことがわかる。もし回転軸部に系全体の固有振動数に一致する振動数をもつ励振力が作用したとしても, 翼群・車盤部は共振状態にはならない。

3. ま と め

本報においては, 翼群・車盤と回転軸との連成振動を計算するのに必要な方程式の誘導を試みた。翼群・車盤部は複雑な形状をしているが, 一般に周期的対称構造である。したがって, 系全体の振動特性は, 翼群・車盤部に生じる節直径数ごとに計算すればよい。さらに, 翼群・車盤部の一周分の基本部分構造だけを計算の対象とすればよく, 計算時間の効率化がはかれる。系全体の各固有モードの特徴は次のとおりである。

(1) 指数 $j=0$ から求まる固有モードにおいて, 翼群・車盤部に生じる節直径数は主に零であり, これらは回転軸部の縦振動とねじれ振動だけと連成しており, 回転軸部の横振動 (曲げ振動) とは全く連成しない。

(2) 指数 $j=1$ から求まる固有モードにおいて、翼群・車盤部に生じる節直径は主に1本であり、これらは回転軸部の横振動(曲げ振動)だけと連成している。

(3) 指数 $j \geq 2$ から求まる固有モードにおいて、翼群・車盤部に生じる節直径は主に j 本であり、これらは回転軸部とは全く振動的に連成していない。

本研究は、昭和58年度文部省科学研究費補助金総合研究(A)によるものであることを付記します。

〔付録〕 はり要素の質量マトリックス

式(23)で示される変位関数マトリックス N を用いることにより、はり要素の質量マトリックスを求めることができる。剛性マトリックスに対して施したのと同様な変換〔式(10)で示されるユニタリマトリックス X を用いて変形〕をこの質量マトリックスに対してもおこない。式(30), (31)のような形式で表示するならば、次のようになる。ここで、 m は一要素の質量である ($m = \rho A l$, ρ は要素の密度)。

● v_3, v_6 に対して:

$$\begin{bmatrix} 140 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 140\gamma + l^2 & 0 & 70\gamma + l^2 \\ 70 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 70\gamma + l^2 & 0 & 140\gamma + l^2 \end{bmatrix} \frac{m}{420} \begin{Bmatrix} \dot{v}_{i3} \\ \dot{v}_{i6} \\ \dot{v}_{j3} \\ \dot{v}_{j6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_{i3} \\ \rho_{i6} \\ \rho_{j3} \\ \rho_{j6} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (44)$$

● v_1, v_4 および v_2, v_5 に対して:

$$\begin{bmatrix} 504\gamma_+ & i42\gamma_+ l & -504\gamma_+ & i42\gamma_+ l & 504\gamma_- & -i42\gamma_- l & -504\gamma_- & -i42\gamma_- l \\ -i42\gamma_- l & 56\gamma_+ l^2 & i42\gamma_+ l & -14\gamma_+ l^2 & -i42\gamma_- l & -56\gamma_- l^2 & i42\gamma_- l & 14\gamma_- l^2 \\ -504\gamma_+ & -i42\gamma_+ l & 504\gamma_+ & -i42\gamma_+ l & -504\gamma_- & i42\gamma_- l & 504\gamma_- & i42\gamma_- l \\ -i42\gamma_+ l & -14\gamma_+ l^2 & i42\gamma_+ l & -56\gamma_+ l^2 & -i42\gamma_- l & 14\gamma_- l^2 & i42\gamma_- l & -56\gamma_- l^2 \\ 504\gamma_- & i42\gamma_- l & -504\gamma_- & i42\gamma_- l & 504\gamma_+ & -i42\gamma_+ l & -504\gamma_+ & -i42\gamma_+ l \\ i42\gamma_- l & -56\gamma_- l^2 & -i42\gamma_- l & 14\gamma_- l^2 & i42\gamma_+ l & 56\gamma_+ l^2 & -i42\gamma_+ l & -14\gamma_+ l^2 \\ -504\gamma_- & -i42\gamma_- l & 504\gamma_- & -i42\gamma_- l & -504\gamma_+ & i42\gamma_+ l & 504\gamma_+ & i42\gamma_+ l \\ i42\gamma_- l & 14\gamma_- l^2 & -i42\gamma_- l & -56\gamma_- l^2 & i42\gamma_+ l & -14\gamma_+ l^2 & -i42\gamma_+ l & 56\gamma_+ l^2 \end{bmatrix} \frac{m}{420} \begin{Bmatrix} \dot{v}_{i1} \\ \dot{v}_{i4} \\ \dot{v}_{j1} \\ \dot{v}_{j4} \\ \dot{v}_{i2} \\ \dot{v}_{i5} \\ \dot{v}_{j2} \\ \dot{v}_{j5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_{i1} \\ \rho_{i4} \\ \rho_{j1} \\ \rho_{j4} \\ \rho_{i2} \\ \rho_{i5} \\ \rho_{j2} \\ \rho_{j5} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$+ \begin{bmatrix} 156 & i22l & 54 & -i13l \\ -i22l & 4l^2 & -i13l & -3l^2 \\ 54 & i13l & 156 & -i22l \\ i13l & -3l^2 & i22l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{m}{420} \begin{Bmatrix} \dot{v}_{i1} \\ \dot{v}_{i4} \\ \dot{v}_{j1} \\ \dot{v}_{j4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_{i1} \\ \rho_{i4} \\ \rho_{j1} \\ \rho_{j4} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 156 & -i22l & 54 & i13l \\ i22l & 4l^2 & i13l & -3l^2 \\ 54 & -i13l & 156 & i22l \\ -i13l & -3l^2 & -i22l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{m}{420} \begin{Bmatrix} \dot{v}_{i2} \\ \dot{v}_{i5} \\ \dot{v}_{j2} \\ \dot{v}_{j5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_{i2} \\ \rho_{i5} \\ \rho_{j2} \\ \rho_{j5} \end{Bmatrix}$$

文 献

- (1) Chivens, D. R. and Nelson, H. D., *Trans. ASME, Ser. B*, 97-3 (1975), 881.
- (2) 坂田・ほか2名, 機論, 47-419, C (昭56), 817.
- (3) 萩原・ほか2名, 機講論, No. 830-6 (昭和58-3), 42.
- (4) 道村・長松, 機論, 45-399, C (昭54), 1206.
- (5) 道村・ほか3名, 機論, 47-415, C (昭56), 242.
- (6) 道村・ほか3名, 機論, 50-449, C (昭59), 72.
- (7) 道村・ほか3名, 文献(6)の81ページ.
- (8) 道村, 機論, 49-439, C (昭58), 323.
- (9) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., *Trans. ASME, Ser. B*, 98-2 (1976), 593.

討 論

〔質問〕 萩原 憲明
〔(株)日立製作所機械研究所〕

複雑な連成系の振動問題をはん用解析技術にまとめ
あげられていることに敬意を表す。

(1) $j=0$ の場合、回転軸 (z) 方向の変位と羽根車の節円モードが連成することは、直観的にも理解しやすいが、回転軸のねじり変位と羽根車の非節直径のモードとの連成振動は、力学的にはどのような振動成分との連成効果と考えられるのか。

(2) 回転軸系の曲げ振動を重点にした場合、本解析のように羽根車系と軸系との全体を有限要素法で解析するのが、最適であるように思えない。特に、弾性羽根車が複数個ある場合なども考えると、連成するモードが羽根車の節直径1本であることの特徴を利用して、より実用的解析法が必要になると思われるが、今後の計画があったらご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 翼群・車盤部が円板ならば、回転軸部のねじれ振動と円板の面内振動とが連成する。しかも、付図1(a)のような状態で振動することはできないが、(b)のような状態で振動することはできない。なお、本研究における「節直径」とは、(b)の破線をも意味している。翼群・車盤部が翼付きの円板の場合、回転軸部のねじれ振動と連成するのは、(c)の場合であり、(d)のように振動することはない。

(2) 回転軸系に対して、例えば伝達マトリックス法を用いて解析することも考えられるが、有限要素法にしる、伝達マトリックス法にしる、有限の要素に分割することには変わりなく、さらに有限要素法によって求められる一要素の質量、剛性マトリックスなどから、伝達マトリックス法のように右端と左端の状態量(変位、力など)の関係を求めることも可能であり、このようなことから両方法の間にはそれ程本質的な差異はないものと思われる。

また、本研究においては、説明を簡単にするため、

付図1

回転軸部には一つの翼群・車盤部が取付けられた場合について説明しているが、翼群・車盤部が複数個の場合についても、本研究で得られた結論を適用することができる。したがって、本研究で示した方法をより発展させ、実際の解析方法にするべく現在努力中である。