Duffing 形振動系における 1/2 次分数調波振動*

(第2報, ソフトスプリング系の場合)

津田吉広**, 井上順吉***, 田村英之****
末岡淳男****, 近藤孝広****On the 1/2-th Subharmonic Vibrations of a Non-Linear Vibrating
System with a Duffing Type Restoring Characteristic
(2nd Report, Soft Spring Case)by Yoshihiro TSUDA, Junkichi INOUE, Hideyuki TAMURA
Atsuo SUEOKA, Takahiro KONDO

The 1/2-th sub-harmonic oscillations of a system with a Duffing type restoring characteristic are investigated by making use of a harmonic balance method, under the condition that both the periodic exciting force (e.g., an unbalancing force) and the constant force (e.g., gravity) are operative. In contrast with the preceding paper⁽¹⁾, the restoring characteristic of this system is assumed to be a soft spring. As a result, the phenomena of these vibrations are considerably complicated and also extremely different from the same kind of vibrations in the hard spring system⁽¹⁾. However, the occurrence of the 1/2-th sub-harmonic vibrations in this system is possible similar to the hard spring system, even if the constant stimulating force approaches zero.

Key Words: Vibration, Theory of Vibration, Numerical Analysis, Non-Linear Vibration, 1/2-th Sub-harmonic Vibration, Duffing Equation, Exciting Force with Unbalancing and Constant, Soft Spring Characteristic

1. 緒 言

前報⁽¹⁾において対称非線形復元力特性を有するダフティング形振動系に、周期外力と一定外力との2種類の強制外力が作用するときの1/2次分数調波振動について報告した。その際、復元力としてはハードスプリング特性にのみ限定していた。

さて、復元力がハードスプリング特性をもつ振動系の非線形振動現象に関しては、既に数多くの研究がみられ、またソフトスプリング特性系に関する数値例も散見される⁽²⁾ものの、その数は前者の系に比較してはるかに少ない。一方、上述の2種の強制外力の作用を同時に受けるソフトスプリング特性をもつ対称非線形系における1/2次分数調波振動について解析した報告例はほとんどないようである。そこで、本報では既報⁽¹⁾において復元力のみを単にソフトスプリング特性(この特性を有する系としては、磁気ばね系⁽³⁾にその例をみることができるようである)と仮定し、1/2次分数調波振動の特性を明らかにする。解析に当たっては、

調和バランス法を用い数値例につきその特性を考察する。さらに、解析結果と直接数値積分法から求めた結果と比較検討し、その存在および妥当性を確認する。

2. 理 論 解 析

2.1 近似解 前報⁽¹⁾と同じ運動方程式(1)で表される一自由度振動系を考察する。ただし、以下において非線形復元力の係数 q は負値(ソフトスプリング特性)とする。

$$X'' + hX' + X + qX^3 = (\phi')^2 \cos \phi - G \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 X : 変位、 ϕ : 角変位、 $(\phi') = d(\phi)/d\tau$, h, G, q : 定数で q 以外は正值、さらに $h, |q|$ は十分小さい量、 τ : 無次元時間である。

このとき、式(1)の近似解を既報⁽¹⁾と同様に次のようにおく。

$$X = R + C \cos(\psi - \theta) + A \cos(\phi - \delta) \quad \dots\dots (2)$$

ただし、

$\psi = \phi/n$, $d\phi/d\tau = \nu$ (一定), $n=2$, θ および δ : 位相角, R : 応答の一定成分⁽⁴⁾, C : 1/2次分数調波成分の振幅, A : 基本調波成分の振幅

式(2)を式(1)に代入し、調和バランス法により非振動項, $\cos(\psi - \theta)$, $\sin(\psi - \theta)$, $\cos(\phi - \delta)$, $\sin(\phi$

* 昭和59年7月9日 第925回講演会において講演、原稿受付 昭和59年1月5日。

** 正員、大分大学工学部 (〒870-11 大分市旦野原 700)。

*** 正員、九州工業大学 (〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

**** 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

−δ)の係数を両辺等置すれば、定常解を与える式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} C\left[1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^2+3q\left(R^2+\frac{1}{4}C^2+\frac{1}{2}A^2\right)\right]+3qRCA\cos(2\theta-\delta) &=0, \\ h(\nu/n)C+3qRCA\sin(2\theta-\delta) &=0, \\ A\left[1-\nu^2+3q\left(R^2+\frac{1}{2}C^2+\frac{1}{4}A^2\right)\right]+\frac{3}{2}qRC^2\cos(2\theta-\delta) &=\nu^2\cos\delta, \\ -h\nu A+\frac{3}{2}qRC^2\sin(2\theta-\delta) &=-\nu^2\sin\delta, \\ G+R+qR\left(R^2+\frac{3}{2}C^2+\frac{3}{2}A^2\right)+\frac{3}{4}qC^2A\cos(2\theta-\delta) &=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式(3)において、θとδとを消去すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \left[1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^2+3q\left(R^2+\frac{1}{4}C^2+\frac{1}{2}A^2\right)\right]^2+h^2\left(\frac{\nu}{n}\right)^2 &=(3qRA)^2, \\ A^2\left[\left\{1-\nu^2+3q\left(R^2+\frac{1}{2}C^2+\frac{1}{4}A^2\right)\right\}^2+(h\nu)^2\right]+\left(\frac{3}{2}qRC^2\right)^2+h^2\nu\left(\frac{\nu}{n}\right)C^2 \\ &-C^2\left\{1-\nu^2+3q\left(R^2+\frac{1}{2}C^2+\frac{1}{4}A^2\right)\right\}\left[1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^2+3q\left(R^2+\frac{1}{4}C^2+\frac{1}{2}A^2\right)\right] &=(\nu^2)^2, \\ R\left[G-R\left\{1+q\left(R^2+\frac{3}{2}C^2+\frac{3}{2}A^2\right)\right\}\right] &=\frac{1}{4}C^2\left[1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^2+3q\left(R^2+\frac{1}{4}C^2+\frac{1}{2}A^2\right)\right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)からR,CおよびAを求め、これらの値を次式に代入すれば、位相角θおよびδを得る。

$$\left. \begin{aligned} \tan\delta &=\left[h\nu A-\frac{3}{2}qRC^2\sin(2\theta-\delta)\right]/\left[A\left\{1-\nu^2+3q\left(R^2+\frac{1}{2}C^2+\frac{1}{4}A^2\right)\right\}+\frac{3}{2}qRC^2\cos(2\theta-\delta)\right], \\ \tan(2\theta-\delta) &=h\left(\frac{\nu}{n}\right)/\left[1-\nu^2+3q\left(R^2+\frac{1}{4}C^2+\frac{1}{2}A^2\right)\right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(3)から、R,C,A,θ,δが一組の解であるならば、R,−C,A,θ,δも解であることが分かる。

2.2 安定性 式(4)および(5)から得られる定常解の安定性を調べる。定常解に添字0を付記すると、解C₀,θ₀,A₀,δ₀およびR₀からの微小な乱れをそれぞれ、 $\bar{c}, \bar{\theta}, \bar{a}, \bar{\delta}$ および $\bar{r}$ と記す。すなわち、

$$C=C_0+\bar{c}(\tau), \quad \theta=\theta_0+\bar{\theta}(\tau), \quad A=A_0+\bar{a}(\tau), \quad \delta=\delta_0+\bar{\delta}(\tau), \quad R=R_0+\bar{r}(\tau) \dots\dots\dots (6)$$

時間τの増大とともに量 $\bar{c}, \bar{\theta}, \bar{a}, \bar{\delta}$ および $\bar{r}$ が0に収束すれば対応する解(C₀,θ₀,A₀,δ₀,R₀)は安定である。したがって、式(2)の代わりに、

$$X=(R_0+\bar{r})+(C_0+\bar{c})\cos\{\psi-(\theta_0+\bar{\theta})\}+(A_0+\bar{a})\sin\{\varphi-(\delta_0+\bar{\delta})\} \dots\dots\dots (7)$$

と仮定し、式(1)に代入する。両辺の対応する調波の係数を等置し、微少量 $\bar{c}, \bar{\theta}$ 等の二次以上の高次の項を無視すれば次式を得る。

$$Bx'=A \cdot x \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$x^T=[C_0\bar{c}, \bar{c}, A_0\bar{\delta}, \bar{a}, \bar{r}], \quad ()^T: \text{ベクトル}() \text{の転置},$$

$$B=-\begin{bmatrix} 2\frac{\nu}{n} & h & 0 & 0 & 0 \\ h & -2\frac{\nu}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu & h & 0 \\ 0 & 0 & h & -2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix},$$

$$A=A_1+3qA_2,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} h\frac{\nu}{n} & 1 - \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 & -h\frac{\nu}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\nu & 1 - \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu^2 & -h\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (a_{ij}), \quad \Theta_0 = 2\theta_0 - \delta_0, \quad a_{11} = -R_0 A_0 \sin \Theta_0, \quad a_{12} = R_0^2 + \frac{3}{4} C_0^2 + \frac{1}{2} A_0^2 + R_0 A_0 \cos \Theta_0, \\ a_{13} &= R_0 C_0 \sin \Theta_0, \quad a_{14} = C_0 (A_0 + R_0 \cos \Theta_0), \quad a_{15} = C_0 (2R_0 + A_0 \cos \Theta_0), \\ a_{21} &= R_0^2 + \frac{1}{4} C_0^2 + \frac{1}{2} A_0^2 - R_0 A_0 \cos \Theta_0, \quad a_{22} = -R_0 A_0 \sin \Theta_0, \quad a_{23} = R_0 C_0 \cos \Theta_0, \quad a_{24} = -R_0 C_0 \sin \Theta_0, \\ a_{25} &= -C_0 A_0 \sin \Theta_0, \quad a_{31} = -R_0 C_0 \sin \Theta_0, \quad a_{32} = C_0 (A_0 + R_0 \cos \Theta_0), \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = R_0^2 + \frac{1}{2} C_0^2 + \frac{3}{4} A_0^2, \\ a_{35} &= 2R_0 A_0 + \frac{1}{2} C_0^2 \cos \Theta_0, \quad a_{41} = R_0 C_0 \cos \Theta_0, \quad a_{42} = R_0 C_0 \sin \Theta_0, \quad a_{43} = R_0^2 + \frac{1}{2} C_0^2 + \frac{1}{4} A_0^2, \\ a_{44} &= 0, \quad a_{45} = \frac{1}{2} C_0^2 \sin \Theta_0, \quad a_{51} = -\frac{1}{2} C_0 A_0 \sin \Theta_0, \quad a_{52} = C_0 \left(R_0 + \frac{1}{2} A_0 \cos \Theta_0 \right), \\ a_{53} &= \frac{1}{4} C_0^2 \sin \Theta_0, \quad a_{54} = R_0 A_0 + \frac{1}{4} C_0^2 \cos \Theta_0, \quad a_{55} = R_0^2 + \frac{1}{2} C_0^2 + \frac{1}{2} A_0^2 \end{aligned}$$

.....(9)

$x = x_0 e^{i\tau}$ (x_0 : 定数) とおき, 式(8)に代入し, λ に関する特性方程式を求め, ラウス・フルビッツの安定規範から近似解(2)が安定であるための十分条件を求める⁽⁵⁾こともできるが, ここでは, 式(8)を通常の固有値問題に変形し, すべての固有値の実数部を直接求めることにより安定性を判別する。

3. 数値例および考察

非線形連立方程式(4)[および式(5)]を前報⁽¹⁾と同様の手法により解き, 定常解を求めた。

さて, ソフトスプリング系の場合, 既報⁽¹⁾で定義した特性量 C^* , R^* 等は, 以下に示す計算結果から分かるように, 1/2 次分数調波振動の応答特性を統一的に特徴づけるパラメータとするにはハードスプリング系ほど有効性は認められないので, ここでは系パラメータの特定の値に対して 1/2 次分数調波振動の応答特性二, 三を図示するととどめる。なお, 以下の図中, 実線および破線は, それぞれ, 2・2 節による安定および不安定な状態を意味する。

3・1 一定外力が存在する場合 ($G \neq 0$) 図 1 は $G=0.8$, $h=0.03$, $q=-0.0225$ としたときの 1/2 次分数調波振動の応答曲線の計算結果を振動数 ν に対して図示したものである。図中, 例えば, A_1, C_2 等の様に添字 1, 2 が付記されているが, この添字は対応する定常解(分岐)の組合せを意味する。したがって, 1/2 次分数調波成分の一つの分岐 C_1 に対応する基本調波および非振動項の成分は, それぞれ A_1, R_1 である。位

相角 θ および δ に関しても同様である。

さて, 図 1(a) は振幅応答曲線, 図 1(b) は位相曲線である。図示のように, 安定領域は分岐 1 上の高振動数域のみで, 他はすべて不安定である。この安定領域での振動数下限においては, 応答曲線の接線のこう配は垂直ではない。すなわち, 安定限界は必ずしも応答曲線の接線のこう配が垂直となる点に対応しないことが認められる。減衰 h の値の大小にかかわらず, C 分岐は 0 より成長する。一方, 分岐 1 に対応する位相特性 (θ_1, δ_1) は振動数 ν に対して, その変化は小さい。

図 2 は, 図 1 の系パラメータのうち非線形ばね係数 q のみを変え, $q=-0.03$ と設定したときの計算結果である。図 1 と図 2 とを比較すれば, 全体的な応答曲線の傾向はほぼ類似ではあるものの, 一部に相異点のあることが分かる。すなわち, 非線形ばね係数 q が小さくなる ($q=-0.0225 \rightarrow -0.03$) と, 応答曲線は全体的に値が小さくなるように下方へ相似様に押しつぶされた形状になるが, 振動数の低い方へ移る。また, C_1 分岐と, 不安定分岐ではあるが C_2 分岐との間隔が拡大される。しかしながら, C_1 分岐が 0 から発生し始める振動数の値, R_1 および A_1 分岐の値はほとんど変動しない。位相特性についても, 振幅特性の低振動数方向への移動に伴う変化はあるもののその変動は小さい (q の減少により, θ_1 が 90° の方へ, δ_1 が 180° の方へわずかに接近するのみである)。

3・2 一定外力が存在しない場合 ($G=0$) 図 3 および 4 は一定外力 $G=0$ としたときの 1/2 次分数調

波振動の応答曲線の計算結果である。図3, 4は量 q のみ異なっており、図3では $q=-0.0225$ 、図4においては $q=-0.03$ である。これらの図においては、減衰係数 $h=0.0\sim0.05$ の五つの場合の応答曲線が描いてある。無減衰系 $h=0$ のときのみ1/2次分数調波成分の振幅曲線は $C=0$ から発生しており、この点に対応する振動数 ν の近似値は既報⁽¹⁾で与えた次式によって容易に推定することができる。

$$(\nu/n) \cong \sqrt{1 + (8/3)q} \quad \cdots \cdots (10)$$

(a) 振幅曲線

(b) 位相曲線

図1 1/2次分数調波振動の応答曲線 ($G \neq 0$ 系)

この無減衰系における不安定分岐2に対しては、2・2節で述べた安定判別法によりその安定性を判断し得るものの、分岐1に関しては特性根に $\lambda=0$ なる重根が現れ、前述した安定規範のみでは安定性を論ずることは困難である。詳しくは後述の直接数値積分法のところで論ずるとして、ここでは得られた分岐のみを一点鎖線で図中に描いた。

さて、例えば、図3(a)で $h=0.03$ の状態においては図示のようにわずかではあるが安定領域が存在する($1.6 \leq \nu \leq 1.62$)。そして、 $\nu \cong 1.62$ で不安定分岐 C_2 と接続している。減衰 h の値が増大すれば、安定領域の振動数の高い方の限界点は徐々に振動数の低い方へ後退し、かつその領域の幅も狭くなる。 h の値がある値以上に大きくなると $G=0$ 系における1/2次分数調波振動は発生し得なくなることが推察される。この傾向はハードスプリング系⁽¹⁾と同様である。事実、図3(および図4)に示してあるように、 $h=0.05$ の場合には、安定領域は存在せず、すべて不安定である。さらに、 h の増大によって、基本調波振幅 A の変化は比較的小さいが、非振動成分 R の変動はより大きいことが分かる。

図3および4から、 $G \neq 0$ 系の場合と同様非線形ばね係数 q が減少すると、応答曲線が下方へ押しつぶさ

Present theory (———, - - - -)

Numerical integration;

	R	C	A
stable	○	△	□
unstable	●	▲	■

図2 1/2次分数調波振動の応答曲線 ($G \neq 0$ 系)

れたような形状を呈するが、分岐1の安定状態に対応する振動数域および位相特性には大きな変化はないことが分かる。

3.3 直接数値積分法の結果との比較 本報告では3.2節までの調和バランス法による解の定量的比較と同時に、安定領域を詳細に調べるために式(1)の周期 4π の周期解を、いわゆる「シューティング法」(または、定常解分離法)⁽⁶⁾⁻⁽¹²⁾を用いて求めた。この方法では安定解のみならず不安定解をも求めることができ、

解の安定性は2個の特性乗数によって決定される。すなわち、特性乗数の絶対値が1より大なるものがあれば不安定である。直接数値積分法による解を解析結果の安定な分岐1にのみ適用し、その結果を図1および

(a) 振幅曲線

(b) 位相曲線

図3 1/2次分数調波振動の応答曲線 ($G=0$ 系)

図4 1/2次分数調波振動の応答曲線 ($G=0$ 系)

Numerical integration;

	R	C, θ	A, δ
stable	○	△	□
unstable	●	▲	■
stable(neutral)	D	▽	◇
	R	C	A

(a) $h=0.03$ のとき

(b) $h=0.0$ のとき

図5 直接数値積分法との比較 ($G=0$ 系)

5の解析結果に重ねて示した。

図1については、安定領域および振幅・位相特性ともに両者の結果は極めてよく一致していることが分かる。図5の実線、破線および一点鎖線は図3における $h=0.03$ [図5(a)] と $h=0.0$ [図5(b)] である。図5(a)では、解析結果の安定領域は $\nu \geq 1.60$ 、直接数値積分法によるそれは $\nu \geq 1.52$ である。図5(b)では、直接数値積分法による安定判別から、 $\nu \geq 1.56$ では中立(無限小安定)、 $\nu \leq 1.56$ では不安定の結果を得た。

以上の結果より、安定領域そのものに関して、直接数値積分法の結果と解析結果との間に若干の差異が認められるものの、応答振幅および位相特性については定量的に極めてよく一致していることが分かる。

4. 結 言

前報⁽¹⁾に引き続き、ソフトスプリング特性を有する一自由度ダフィング形振動系に周期外力と一定外力とが同時に作用したときの1/2次分数調波振動を調和バランス法を用いて考察し、直接数値積分法による結果により、その存在および解析の妥当性を確認した。以上の所論を要約すれば次の様である。

- (1) 本振動系における1/2次分数調波振動は、ハードスプリング系とソフトスプリング系とは大きくその応答特性を異にする。
- (2) 非線形ばね係数 q が減少すると応答曲線は全体的に値が小さくなり、相似様に下方へ押しつぶされた形状を呈し、かつ振動数の低い方へ移る。
- (3) 解の安定と不安定との境界は、必ずしも応答曲線の接線のこう配が垂直となる点によって与えられるとは限らない。
- (4) 強制外力に一定外力が存在しない場合 ($G=0$) であっても、極めて狭い範囲ではあるが1/2次分数

調波振動は発生する。

- (5) $G \neq 0$ 系では減衰 h の値にかかわらず、1/2次分数調波成分の振幅 C は0から成長する。
- (6) $G=0$ 系では減衰 $h=0$ の場合に限って、1/2次分数調波成分の振幅 C は0より成長するが、 h の値が増大すると振幅曲線は半島形をなし、その振動の安定領域は低振動数の方向へ移りかつ狭くなる。
- (7) $G=0$ 系では減衰 h がある値より大きくなると、1/2次分数調波振動は発生しえなくなる。
- (8) 解析結果と直接数値積分法による結果との間には、安定領域そのものに関しては若干の差異が認められるが、振幅・位相特性については定量的に極めてよい一致を示す。

終わりに、数値計算には大分大学計算機センターおよび九州大学大型計算機センターを利用させていただいたことを記し、関係各位に厚くお礼申し上げる。

文 献

- (1) 津田・ほか3名, 機論, 49-446, C (昭58), 1854.
- (2) 例えば, 前沢, 非線形常微分方程式, (昭44), 252, 278, 293, グイヤモンド社; 樺木, 非線形振動論, (昭43), 94; 共立出版; Sethna, P.R., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-1 (1960), 187.
- (3) 例えば, 倉掛・原, 機論, 45-399, C (昭54), 1217.
- (4) 岩田・小堀, 機論, 47-414, C (昭56), 129.
- (5) Лонтрягин, Л. С. (千葉訳), 常微分方程式, (昭53), 195, 共立出版.
- (6) 牛田, 電子通信学会技術研究報告, NLP76-9 (昭51), 15.
- (7) Ojika, T., *Memoirs Osaka Kyoiku Univ.*, Ser. III, 26-2 (1977).
- (8) Keller, H.B., *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*, (1968), Blaisdell Publ.
- (9) Roberts, S.M. and Shipman, J.S., *Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods*, (1972), American Elsevier.
- (10) Urabe, M., *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, 20-3 (1957), 125.
- (11) 田村, 機習教 (関西支部第92回), (昭56-7), 17.
- (12) 田村, 日本機械学会九州支部特別講演会資料, (昭58-2), 11.

討 論

〔質問〕 前沢成一郎 (明星大学理工学部)

(1) 諸図において対応する振幅, 位相おくれ等の与えられている ν の範囲が必ずしも一致していないのはなぜか. 特に図3(b)の θ_2 の下半分が欠けているようだが.

(2) 安定領域について貴近似解と数値積分解の間に若干の差異があるということだが, この差異は何によるものと考えられるか.

(3) 3/2調波成分の影響についてはどうか.

〔回答〕 (1) 低振動数域において, 不安定でそ

の変化が少なくなった分枝は適当にプロットするのを省略した. そのために, 各応答曲線の左端点が不統一になった. しかし, 高振動数域での各曲線の右端点はそれぞれの分枝の存在限界に対応し, 意味を持つ.

(2) 非線形系の安定判別の精度は, 具体的な解の情報を必要としない方法 (例えば, リアプノフの直接法) を除いて, 一般に対象とする近似解自体の精度に左右されると考えられる. したがって, 仮定する解の項数を限定した本近似解は省略した高次成分の影響が大になるにつれて, 周期解の精度が相対的に低下し,

付図1 図1の系のシューティング法による結果

それがまた、安定判別(特性根)の精度低下を引起すものと考えられる。特に、安定限界近傍では、特性根の精度低下が図1および図5での若干の差異として現われたものと思う。

(3) ご指摘の成分を考慮して解析を進めることも可能かと思うが、そうすると近似解の主旨から離反する様に判断したので、この成分の影響は求めていない。シューティング法の結果を付図1, 2に示す。図から、2/2次以下の成分は3/2次以上の成分に比べかなり大きく、近似解の仮定の妥当性を示している。

ν が小になるにつれて3/2次, 4/2次等が成長し、定常解自体には大きな変化は生じないものの、これらの高次成分は左側の安定限界決定に少なからず影響を及ぼしているものと思われる。安定性の精度について、 $G=0$ 系に対するものが $G \neq 0$ 系に対するものに比べて幾分劣るのは、これらの高次成分の比率が前者の方が大きいためと考える(付図1, 2参照)。

〔質問〕 佐藤 喜一〔山形大学工学部〕

(1) 一定外力がない $G=0$ の場合の分岐1では、 $h>0$ のとき非振動成分 R が存在するが、 $h=0$ の場合は $R=0$ と考えてよいか。

(2) 解析結果の安定判別については、式(8)の固有値の実数部を直接求めて判定したとあるが、 $h=0$ の場合の分岐1についてはこの方法では判定できないということか。また、直接数値積分法における安定判別について、文献が示されているが、簡単にご説明いただければありがたい。

〔回答〕 (1) そのとおりである。

付図2 図3の系のシューティング法による結果

(2) $h=0$ の分岐1に対しては、特性根に零が現われ、1次近似のみでは直ちに安定か不安定かを判定できないと思う。

なお、直接数値積分法(シューティング法)の概要は以下のようなものである。

解くべき系を次のように仮定する。

$$\dot{y} = f(y, t) \quad \dots\dots\dots (i)$$

ただし、 $f(y, t) = f(y, t+T)$, T : 周期。

この式の変分方程式を

$$\dot{\eta} = \partial f / \partial y \cdot \eta \quad \dots\dots\dots (ii)$$

ただし、 η は y の変分、 $(\cdot) = d(\cdot)/dt$, とする。

ある与えられた初期値 $y(0)$ に対して、1周期後の値を $y(T)$ とすれば、

$$y(T) = y(0) \quad \dots\dots\dots (iii)$$

が成立するならば、 $y(0)$ が周期 T をもつ定常振動解を与える初期条件であり、この $y(0)$ を何らかの方法(例えば、ニュートン・ラプソン法)で求めればよいことになる。

これは一種の二点境界値問題とみられるが、境界値そのものが未知数であることにその特殊性がある。

次に、得られた定常解 $y(t)$ に対する変分方程式(ii)(今の場合、周期係数形線形常微分方程式)の特性乗数を求め、安定判別を行う。具体的には、 $\Phi(t)$ を $\Phi(0) = E$ (ただし、 E : 単位マトリックス) なる式(iii)の基本解行列とすると、 $\Phi(T)$ の固有値が特性乗数であり、それらの絶対値がすべて1より小ならば安定、一つでも1より大であれば不安定である。