5 要素粘弾性モデル定数の決定*

遠 藤 満**, 酒 井 真 理***
Mitsuru ENDO, Shinri SAKAI**Key Words:** Vibration of Continuous System, Viscoelasticity, Determination of Visco-elastic Constants, Five-Elements Model, Free and Forced Vibration.

1. ま え が き

これまで粘弾性体や複合材の振動については多くの研究がなされているが、実際の材料について粘弾性モデルをどのように表現し、その粘弾性モデルの定数を実験的にいかに決定するかという観点からの研究は少ないのが現状である^{(1)~(3)}。そこで著者らは先に粘弾性体のモデルとして3要素標準線形固体モデルを導入し、特に固体同志の衝突を伴う衝撃応答あるいは比較的広い周波数範囲をもつ入力によって加振されるときの不規則応答を解析する観点から粘弾性モデルの定数を実験的に決定する方法について検討を行った^{(4)~(6)}。しかしながら比較的広い周波数範囲に関連する不規則振動応答などを精度よく表現するためには3要素の粘弾性モデルでは必ずしも十分ではなく、より複雑な粘弾性モデルを導入する必要があることがわかった⁽⁶⁾。そこで本研究ではより複雑な粘弾性モデルとして5要素の線形固体モデルを導入し、その定数の決定法について検討することを目的としている。

本研究においてはPMMA(アクリル樹脂)を例にとり、そのチモシェンコはりとしての自由振動ならびに有帯域ホワイトノイズ加振に対する不規則振動の二つの手段により5要素粘弾性モデル定数を決定する方法について研究を行い、それらの二つの方法によって定められた定数の妥当性ならびに一般的適合性について検討し、5要素粘弾性モデルの有効性について考察した。

2. 5要素粘弾性モデル

まずはじめに本研究ではPMMAに関し物理的に妥当な仮定として、平均垂直応力と平均垂直ひずみ間の関係を表す体積弾性率 K は一定と仮定し式(1)のようにおく。

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii} \dots\dots\dots (1)$$

ここで σ_{ii} , ϵ_{ii} はそれぞれ平均垂直応力、平均垂直ひずみを表す。次に一般の粘弾性体に対し、偏差応力 s_{ij} および偏差ひずみ e_{ij} 間の構成方程式として式(2)を仮定することができる。

$$P(D)s_{ij} = Q(D)e_{ij} \dots\dots\dots (2)$$

ここで P , Q は時間に関する微分演算子 D によって表される演算子である。したがって3次元粘弾性理論によればラプラス変換領域での横弾性係数 $G(s)$ および縦弾性係数 $E(s)$ は一般に式(3)のように表される⁽⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2} \frac{Q(s)}{P(s)} \\ E(s) &= \frac{9KG(s)}{3K + G(s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式(3)において s はラプラス変換の演算子を表す。さてここでいま偏差応力と偏差ひずみ間の構成関係として図1に示すような5要素粘弾性モデルを仮定すると次のような関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \left[\left(E_1 + \frac{s}{\mu_1} \right) \left(E_2 + \frac{s}{\mu_2} \right) + E_0 \left(E_2 + \frac{s}{\mu_2} \right) \right. \\ & \quad \left. + E_0 \left(E_1 + \frac{s}{\mu_1} \right) \right] \bar{s}_{ij} \\ & = E_0 \left(E_1 + \frac{s}{\mu_1} \right) \left(E_2 + \frac{s}{\mu_2} \right) \bar{e}_{ij} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで $\bar{s}_{ij}$, $\bar{e}_{ij}$ はそれぞれの量のラプラス変換形を表す。式(2)~(4)を考慮するとラプラス変換領域での横弾性係数 $G(s)$ 、および縦弾性係数 $E(s)$ は式(5)

* 昭和58年11月12日 関西支部秋期大会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和58年7月4日。

** 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*** 学生員、東京工業大学大学院。

のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} G(s) &= \frac{E_0}{2} \frac{S(s)}{R(s)} \\ E(s) &= E^* \frac{S(s)}{T(s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{9KE_0}{6K+E_0} \\ R(s) &= s^2 + (\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \mu_1 E_0 + \mu_2 E_0)s \\ &\quad + \mu_1 \mu_2 (E_1 E_2 + E_2 E_0 + E_0 E_1) \\ S(s) &= s^2 + (\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2)s + \mu_1 \mu_2 E_1 E_2 \\ T(s) &= s^2 + [\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + (2/3)(\mu_1 + \mu_2)E^*]s \\ &\quad + \mu_1 \mu_2 [E_1 E_2 + (2/3)E^*(E_1 + E_2)] \end{aligned}$$

以上により粘弾性体の挙動は体積弾性率 K と粘弾性モデル定数 $E_0, E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$ との6つの定数を決定することにより解析できることになる。

3. はりの自由振動による定数決定法

3.1 実験法 粘弾性モデル定数の決定法の一つとして、はりの自由振動の減衰固有振動数と振幅減衰の時定数の実験値を利用することが考えられる。そこで本研究では両端自由の PMMA 製円柱棒を鋼球で衝撃し、そのときの減衰固有振動数と時定数を測定した。

実際には直径 30 mm, 長さ 87, 111, 205, 259, 424 mm の5種類の PMMA 製円柱を作製し、両端自由の境界条件を近似的に満たすようにこれを一本の糸で鉛直につるし、はりの中央部に鋼球を衝突させて自由振動させた。この際加速度計ピックアップを鋼球との接触点の反対の側にとりつけ、チャージアンプを介して加速度信号をとりだし、さらにバンドパスフィルタによって一次モードの曲げ振動波形のみをピックアップしてこれをトランジェントレコーダに記憶させた。減衰振動数と振幅減衰の時定数はこの信号をペンレコーダに書き出させることにより測定した。

長さの異なる複数の円柱棒の振動数と時定数を測定したのは、できるだけ広い周波数範囲に対して粘弾性特性の情報を得るためであり、この観点からは1本のはりのみを用いてその複数の振動モードの振動数と時定数を利用することも考えられるが、本研究では実験結果の信頼性も考慮して複数のはりの一次曲げ振動モードのみを利用する方法を採用した。

3.2 定数決定法 ここで2章で仮定した粘弾性モデルの定数を両端自由はりの減衰自由振動より決定する方法について説明する。

実験に用いた PMMA 製円柱の直径が比較的大き

いことを考慮し、粘弾性チモシェンコはり理論に基づくことにすると、その基礎方程式は一般に

$$\left. \begin{aligned} E(D)I \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k \bar{A} G(D) \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 \\ \rho \bar{A} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k \bar{A} G(D) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

と表すことができる。ここで y はたわみ、 ϕ は回転角であり、 $I, \bar{A}, \rho, 1/k$ はそれぞれ断面二次モーメント、断面積、密度およびせん断応力分布係数である。一方はりの両端自由の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=0,l} &= 0 \\ \left[\frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right]_{x=0,l} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

と表すことができる。式(7)で l ははりの長さを表す。ここでいま解を

$$\begin{aligned} y(x, t) &= R_e[Y(x)e^{i\eta t}] \\ \phi(x, t) &= R_e[\Psi(x)e^{i\eta t}] \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

のように仮定して式(6)に代入すると基礎方程式は式(9)のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} E(\eta)I\Psi^{(2)} + k\bar{A}G(\eta)(Y^{(1)} - \Psi) - \rho I\eta^2\Psi &= 0 \\ \rho\bar{A}\eta^2 Y - k\bar{A}G(\eta)(Y^{(2)} - \Psi^{(1)}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし

$$Y^{(n)} = d^n Y / dx^n, \quad \Psi^{(n)} = d^n \Psi / dx^n$$

上式において $G(\eta), E(\eta)$ は式(5)において s を η で置きかえたものである。

さていま式(9)の方程式に基づき、式(7)の境界条件を利用して、文献(5)に示した手続と全く同様にして自由振動に関する振動数方程式を求めると式(10)が得られる。

$$\begin{aligned} (A+B)^2 [e^{(\varphi_1 - \varphi_2)l} + e^{-(\varphi_1 - \varphi_2)l}] - (A-B)^2 \\ \times [e^{(\varphi_1 + \varphi_2)l} + e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)l}] - 8AB \equiv f = 0 \dots (10) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= z_1 \varphi_1 (\varphi_2 - z_2) \\ B &= z_2 \varphi_2 (\varphi_1 - z_1) \\ z_1 &= \frac{1}{\varphi_1} \left[\varphi_1^2 - \frac{\rho \eta^2}{k G(\eta)} \right] \end{aligned}$$

図1 5要素粘弾性モデル

$$z_2 = \frac{1}{\varphi_2} \left[\varphi_2^2 - \frac{\rho \eta^2}{kG(\eta)} \right]$$

$$\varphi_{1,2}^2 = \frac{-g_2 \pm \sqrt{g_2^2 - 4g_1g_3}}{2g_1}$$

$$g_1 = E(\eta)I$$

$$g_2 = - \left[1 + \frac{E(\eta)}{kG(\eta)} \right] \rho I \eta^2$$

$$g_3 = \left[\rho \bar{A} + \frac{\rho^2 I}{kG(\eta)} \eta^2 \right] \eta^2$$

ところでいま η_1, η_2 を実数として η が

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2 \dots\dots\dots (11)$$

のように表されるものと仮定すると, η_1, η_2 は自由振動の減衰固有角振動数 ω および振幅減衰の時定数 T と次のような関係を有することがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \eta_2 \\ T &= -\frac{1}{\eta_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

したがっていま ω と T の実験結果を式(12)に従って式(10)の振動数方程式に代入したとすると, 振動数方程式は形式的に, これから決定すべき体積弾性率 K および粘弾性モデル定数 $E_0, E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$ の関数として式(13)のように表現できることになる。

$$f(K, E_0, E_1, E_2, \mu_1, \mu_2) = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ここで一般に実験に使用したはりの本数を n とすると式(13)のような方程式が n 本得られることに注意されたい。そこでいま n 本の試料より得られた $f_i (i=1 \sim n)$ を考えると, 近似的に $f_i = 0 (i=1 \sim n)$ の関係を満たすためには f_i の絶対値に適当な正の数を乗じたものの和

$$J = \sum_{i=1}^n W_i |f_i(K, E_0, E_1, E_2, \mu_1, \mu_2)| \dots\dots\dots (14)$$

を最小にするように粘弾性定数を定めてやればよいこ

とになる。式(14)において f_i の絶対値に乘ずる正の数 W_i は各試料の $|f_i|$ の値がほぼ同等に J の値に寄与するために乗ずる重みと考えることができる。以上の関係を考慮すると, ここでの定数決定問題は粘弾性モデル定数を操作変数とし J を最小とすべき評価関数とする最適化問題とみなすことができる。そこで本研究では Rosenbrock の非線形計画法⁽⁸⁾によって粘弾性モデル定数を決定した。

実際に Rosenbrock の手法を用いるには, モデル定数の初期値が必要であるが, 本研究では文献(5)で求められた3要素モデル定数を参考にして, これを5要素モデルへ適当に等価拡張して得られた数値を用いた。また重み W_i の具体的な決め方は初期値を代入したときに W_i と $|f_i|$ の積が各試料に対し同オーダとなるように決めた。また本研究においては $n=5$ である。なお実際の数値計算に当たり密度 ρ としては

$$\rho = 1.183 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

とおき, セン断応力分布係数の逆数 k は

$$k = 0.75$$

とおいた。

4. 強制不規則振動による定数決定法

4.1 実験法 文献(6)に示したように, 比較的広い周波数範囲に適合する粘弾性モデル定数の決定法として, 試料の強制不規則加振に対する応答のパワースペクトルを利用する方法が考えられる。粘弾性モデル定数を定めるために本研究で用いた試料は片持ばりであるが, 粘弾性モデル定数の一般的適合性を検討するために周辺自由の円板についても中心点を加振する実験を行った。実験装置の概略を図2に, また実験で用いた試料の形状を表1に示す。

図2に示すごとく, 片持ばりの支持部は上下面を鋼片ではさみ3本のボルトで動電形加振機の振動台に固定した。また円板は中心部を外径12mmの鋼製リングではさみ1本のボルトで振動台に固定した。

測定の方法はまず試料を振動台にセットし, ランダ

図2 実験装置の概略図

表1 実験試料 (材料 PMMA)

Specimen		Length Diameter (mm)	Thickness (mm)	Width (mm)
Rectangular beam	A	150	10	20
	B	200	10	20
	C	250	10	20
Circular plate	D	200	5	/
	E	300	5	/

ム雑音発生器から遮断周波数 4.5 kHz のガウシアン有帯域ホワイトノイズを発生させて、これを振動制御装置を通して増幅して振動台を加振させる。この際振動子等価器を適当に調節して振動台の加速度特性が有帯域ホワイトノイズになるように設定した。はりおよび円板支持部の加振入力および応答は加速度計ピックアップを設置することにより加速度の形で検出した。図 2 に示すごとく、振動台の入力に対するはりおよび円板の応答ははりの場合は先端部、円板の場合は外周近傍の点で測定した。加速度計ピックアップからの信号はチャージアンプを通して増幅した後、スペクトル分析器とレベルレコーダによりスペクトル分析した。なお測定周波数範囲は動電形加振機の性能を考慮し、20 Hz～4 kHz 付近とした。

4.2 定数決定法 ここで粘弾性モデル定数を試料の強制不規則曲げ振動に対する応答のパワースペクトルより決定する方法について説明する。

不規則振動において加振 $F(t)$ および応答 $Y(t)$ が定常確率過程である場合、加振の加速度パワースペクトル $\Phi_{FF}(\omega)$ と応答の加速度パワースペクトル $\Phi_{YY}(\omega)$ の間には式(15)のような関係が成立する。

$$\Phi_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{FF}(\omega) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで $H(\omega)$ は入力加速度 $\ddot{F}(t)$ から応答加速度 $\ddot{Y}(t)$ への伝達関数を表し、 ω は角振動数を表す。したがって各振動数 ω に対する伝達関数がわかれば応答のパワースペクトルを求めることができる。そこで次に片持ばりと中心加振円板の両方について、この伝達関数を 5 要素粘弾性モデルの場合について求めることにする。

まず片持ばりの支持部を加振する場合を考えると、粘弾性ははりに対する基礎方程式は一般に次のように表される。

$$\rho \bar{A} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + E(D) I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで Y, y はそれぞれ絶対変位および相対変位を表す。いま絶対変位 Y と相対変位 y との間には

$$Y = y + F(t) \quad \dots\dots\dots (17)$$

なる関係が成立するから式(17)を式(16)に代入すると式(18)が得られる。

$$\rho \bar{A} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E(D) I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho \bar{A} \ddot{F} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで $\cdot$ は時間微分 d/dt を表す。さてここでモード解析法に基づくことにして y を式(19)のような変数分離形によって表す。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) f_n(x) \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで $a_n(t)$ は一般座標、 $f_n(x)$ は片持弾性はりの固有モード関数であり、式(20)によって表される。

$$f_n(x) = (\sin \lambda_n + \sinh \lambda_n) \left(\cos \frac{\lambda_n}{l} x - \cosh \frac{\lambda_n}{l} x \right) - (\cos \lambda_n + \cosh \lambda_n) \left(\sin \frac{\lambda_n}{l} x - \sinh \frac{\lambda_n}{l} x \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)において λ_n は固有モードの固有値を表す。さていま式(18)、(19)に基づき文献(6)と全く同様な方法によって伝達関数 $H(\omega)$ を求めると式(21)のように表すことができる。

$$H(\omega) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{N_n} f_n(x) \times \left\{ a_{n1} a_{n1} + a_{n2} a_{n2} + 2 a_{n3} a_{n3} - 2 \beta_{n3} b_{n3} + \frac{a_{n1} a_{n1}^2}{i\omega - a_{n1}} + \frac{a_{n2} a_{n2}^2}{i\omega - a_{n2}} + \frac{2}{(i\omega - a_{n3})^2 + b_{n3}^2} \times [i\omega(a_{n3}^2 a_{n3} - 2 a_{n3} b_{n3} \beta_{n3} - b_{n3}^2 a_{n3}) - (a_{n3}^2 + b_{n3}^2)(a_{n3} a_{n3} - b_{n3} \beta_{n3})] \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで P_n, N_n は

$$P_n = \int_0^l f_n(x) dx, \quad N_n = \int_0^l \{f_n(x)\}^2 dx$$

より求められる定数で式の形で表すことができるが、文献(6)に示してあるのでその詳細は省略する。また $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, b_{n3}, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \beta_{n3}$ については

$$I_n^*(s) = s^2 + [\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + (2/3) E^*(\mu_1 + \mu_2)] s + \mu_1 \mu_2 [E_1 E_2 + (2/3) E^*(E_1 + E_2)] \\ J_n^*(s) = s^4 + [\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + (2/3) E^*(\mu_1 + \mu_2)] s^3 + \{\mu_1 \mu_2 [E_1 E_2 + (2/3) E^*(E_1 + E_2)] + \omega_{on}^2\} s^2 + (\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2) \omega_{on}^2 s + \mu_1 \mu_2 E_1 E_2 \omega_{on}^2 \\ \omega_{on} = \frac{\lambda_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E^* I}{\rho \bar{A}}}$$

とにおいて、 $P_{ni} (i=1 \sim 4)$ を $J_n^*(s)=0$ の 4 根 (ただし、 P_{n1}, P_{n2} を実根、 P_{n3}, P_{n4} を共役な複素根) とし、

$$C_{ni} = \frac{I_n^*(P_{ni})}{\left[\frac{d J_n^*(s)}{d s} \right]_{s=P_{ni}}}$$

とするとき、

$$P_{n1} = a_{n1}, \quad C_{n1} = a_{n1} \\ P_{n2} = a_{n2}, \quad C_{n2} = a_{n2} \\ P_{n3} = a_{n3} + i b_{n3}, \quad C_{n3} = a_{n3} + i \beta_{n3} \\ P_{n4} = a_{n3} - i b_{n3}, \quad C_{n4} = a_{n3} - i \beta_{n3}$$

によって表される定数である。

次に周辺自由の円板の中心を加振する場合を考えると基礎方程式は

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E(D) h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w = -\rho h \ddot{F} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と表すことができる。ここで w は相対曲げ変位を表

し、 h は円板の肉厚を表す。また ν はポアソン比を表し、三次元粘弾性理論にしたがえば ν もまた一つの粘弾性パラメータであるが、本研究では解析の困難さを考慮してポアソン比は一定であると仮定し、PMMA に関し比較的広い周波数範囲にわたってポアソン比の値を求めた Koppelman の研究⁽⁹⁾に従って $\nu=0.32$ なる値を採用した。さてここではりの場合と同様にモード解析法によることにして解 w を次のような変数分離形で表す。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) f_n(r) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで $f_n(r)$ は次のように表される⁽⁶⁾。

$$f_n(r) = J_0(k_n r) - I_0(k_n r) + \frac{I_1(k_n b) - J_1(k_n b)}{Y_1(k_n b) - (2/\pi)K_1(k_n b)} \times \left[Y_0(k_n r) + \frac{2}{\pi} K_0(k_n r) \right]$$

ただし J_n, Y_n は n 次のベッセル関数、 I_n, K_n は n 次の変形ベッセル関数を表す。また b は円板半径であり、 $\lambda_n = k_n b$ は固有値を表す。

以下の解析法ははりの場合と全く同様であり、結果的に伝達関数は式(21)の $f_n(x)$ を $f_n(r)$ でおきかえた式によって与えられる。ただし P_n, N_n は

$$P_n = \int_0^b f_n(r) r dr, \quad N_n = \int_0^b [f_n(r)]^2 r dr$$

によって与えられるが、簡単な式では表せないので数値計算によって求めた。また ω_{on} は

$$\omega_{on} = \frac{\lambda_n}{b^2} \sqrt{\frac{E^* h^2}{12(1-\nu^2)\rho}}$$

の関係より求めた。

さて伝達関数の理論解が求まったが、はりおよび円板の応答を計算するに先だち、まず粘弾性モデル定数 $E_0, E_1, E_2, \mu_1, \mu_2$ および体積弾性率 K を決定しなくてはならない。そこで本研究では試料 B の片持ばりの実験による一〜三次モードの共振振動数とその振動数での伝達関数値を用い、評価関数を設定してその最小化の方法により K も含めた計 6 個の粘弾性モデル定数を決定した。本研究で採用した評価関数は次の二つ

である。

$$\left. \begin{aligned} F_a &= 100 \sum_{n=1}^3 \left| \log_{10} \frac{\omega_{ne}}{\omega_{nt}} \right| \\ &+ \sum_{n=1}^3 (h_{ne} - h_{nt})^2 \\ F_b &= 2 \sum_{n=1}^3 \left| \frac{\omega_{ne} - \omega_{nt}}{\omega_{ne}} \right| \\ &+ \sum_{n=1}^3 \left| \frac{h_{ne} - h_{nt}}{h_{ne}} \right| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここで ω_{ne}, ω_{nt} はそれぞれ実験、理論による n 次モードの共振角振動数であり、また h_{ne}, h_{nt} は H_{ne}, H_{nt} をそれぞれ伝達関数の実験、理論値として

$$\left. \begin{aligned} h_{ne} &= 10 \log_{10} |H_{ne}|^2 \\ h_{nt} &= 10 \log_{10} |H_{nt}|^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。なお理論値の実験値に対する誤差が大体の目安として、共振振動数で 5%，共振時の伝達関数値で 1 dB (ただし dB 値は式(25)の数値で与えられるものとする) 程度となるように、式(24)の評価関数の第 1 項に、 F_a で 100, F_b で 2 なる重みを乗じてある。 F_a および F_b の最小化にあたっては 3 章と同様に Rosenbrock の非線形計画法を用いた。この手法を用いるために必要な操作変数の初期値の与え方も 3 章と同様である。なお伝達関数の理論値を計算するに際して用いた固有モードの数は 6 である。

5. 定数の決定およびその適合性の検討

はりの自由振動による定数決定法を決定法 I，強制不規則振動による定数決定法のうち評価関数 F_a を用いる場合を決定法 II_a, F_b を用いる場合を決定法 II_b と名づけることにする。

いまそれぞれの決定法に基づいて実際に定めた粘弾性モデル定数を表にして示すと表 2 のようになる。表 2 をみてもわかるように決定法 II_a と II_b による定数は大体同程度の値を示しているが、これらと決定法 I による定数とはやや異っている。そこで次にこれらの定数の妥当性について検討してみよう。

まず表 2 に示す決定法 I によるモデル定数を式(10)の振動数方程式に代入し、 η を変数とする Rosen-

表 2 粘弾性モデル定数の決定値

Method	K (GPa)	E_0 (GPa)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	μ_1 (1/Pas)	μ_2 (1/Pas)
I	2.018	4.837	48.13	32.64	4.950×10^{-7}	1.181×10^{-7}
IIa	4.022	4.478	34.32	14.86	2.286×10^{-7}	4.917×10^{-8}
IIb	3.585	4.356	24.54	13.95	2.798×10^{-7}	5.064×10^{-8}

brock の手法を用いて改めて η を求め、これより一次曲げ振動モードの減衰固有振動数と時定数を算出し実験結果と比較したのが図 3・(a), (b) である。図 3 (a), (b) には文献(5)による 3 要素モデルによる理論値も載せてある。減衰固有振動数に関しては、5 要素モデルのほうが 3 要素モデルよりさらによく材料を近似している。また時定数については、3 要素モデルが特に低い周波数に対して十分に材料の減衰特性を表現していないのに対して 5 要素モデルはよく表現していることがわかる。

(a) 減衰固有振動数

(b) 時定数

図 3 粘弾性モデル定数の妥当性 (決定法 I)

(a) 決定法 II_a (b) 決定法 II_b

図 4 粘弾性モデル定数の妥当性 (試料 B)

次に決定法 II_a, II_b による定数を用いて改めて試料 B について伝達関数を求め、実験と比較したのが図 4・(a), (b) である。なお式(15)より

$$10 \log_{10} |H(\omega)|^2 = 10 \log_{10} [\Phi_{YY}(\omega) / \Phi_{FF}(\omega)] \quad \dots\dots\dots (26)$$

の関係の成立することに注意されたい。図 4 よりわかるように両決定法によって定められた定数を用いて求められた理論値はともに比較的広い周波数範囲にわたって実験値とよく一致しているといつてよく、さらに両決定法による理論結果にはあまり差のないことがわ

(a) 試料 A

(b) 試料 C

(c) 試料 D

(d) 試料 E

図 5 理論と実験の比較 (決定法 II_b による定数)

かる。

次に決定された粘弾性モデル定数の一般的適合性を検討してみよう。まず決定法Ⅱ₀による定数を用いて表1の試料 A, C, D, E の場合について伝達関数値の理論値を求めて実験と比較したのが図5・(a)~(d)

(a) 試料 A

(b) 試料 B

(c) 試料 C

(d) 試料 D

(e) 試料 E

図6 理論と実験の比較 (決定法Ⅰによる定数)

である。円板の場合の共振振動数にやや差がみられるがだいたいにおいて理論と実験はよく一致しているといえる。次に決定法Ⅰによる定数を用いて試料 A~E の場合について伝達関数値の理論値を求めて実験と比較したのが図6・(a)~(e)である。全般的に理論と実験の一致の程度は図5よりも悪くなっており、特に一次の共振点に対してよくない。これは決定法Ⅰで用いた5本のはりの減衰固有振動数が300 Hz から6 kHz 程度の範囲であり、低周波の粘弾性特性に対する考慮がなされていないからではないかと推定される。次に決定法Ⅱ₀による定数を式(10)の振動数方程式に代入し、これを解いて時定数を求め実験と比較したのが図7である。なお減衰固有振動数の理論値と実験値はほとんど一致していたのでその比較図は省略した。図7より理論と実験の一致はあまりよくないといえるが、これも対象とする周波数範囲が一致していないことに起因するのではないかと推定される。

6. 結 論

粘弾性体のモデルとして5要素モデルを仮定し、体積弾性率 K も含めた6個の定数をはりの自由振動ならびに強制不規則振動によって決定する二つの手法を示し、さらに実際に決定された定数の適合性について検討を行った。これをまとめると以下ようになる。

- (1) 決定法Ⅰによって求められた粘弾性モデル定数を用いれば、決定に用いた300 Hz から6 kHz の周波数範囲にわたって、減衰固有振動数と時定数の実験値と十分よく一致する理論結果を得ることができる。
- (2) 不規則加振応答のパワースペクトルを利用する決定法Ⅱ₀およびⅡ₁による定数を用いて求めた理論結果間にはあまり差がみられず、実験に供した試料 A~E に対し、両方の理論結果はともに実験結果とかなりよく一致した。

- (3) 粘弾性モデル定数の値は、いずれの決定法に

図7 減衰自由振動の時定数 (決定法Ⅱ₀により求めた定数による場合)

よっても、決定に用いる実験結果の周波数範囲に大きく左右されるといえる。したがって一般の理論解析に際しては、解析結果において必要とされる周波数範囲を十分考慮に入れて実験法や定数決定法を考える必要がある。

最後に、本研究を遂行するにあたり実験器具の貸与などの便を計って下さった東京工業大学の坂田勝教授に深く感謝致します。

文 献

- (1) 鈴木, 機論, 33-249 (昭42), 686.
- (2) 松本・ほか2名, 機論, 45-399, C (昭54), 1409.
- (3) 曾我部・ほか2名, 機論, 47-419, C (昭56), 748.
- (4) 坂田・ほか3名, 機論, 46-411, C (昭55), 1364.
- (5) 遠藤・高塚, 機論, 48-432, (昭57), 1185.
- (6) 遠藤・沢井, 機論, 50-454, C (昭59), 954.
- (7) Flügge, W. (堀訳), 粘弾性学, (昭48), 106, ページ培風館.
- (8) Kowalik, J., Osborne, M. R. (山本・小山訳), 非線形最適化問題, (昭46), 25, ページ培風館.
- (9) Koppelman, J., *Kolloid Z.*, 144(1955), 12.