擬塑性流体を用いたスクイズフィルム軸受における
流体慣性力の影響*

(第1報, 平行円板形スクイズフィルム軸受)

橋本 巨**, 和田 稲苗***

The Effects of Fluid Inertia Forces in Squeeze Film Bearings
Lubricated with Pseudo-Plastic Fluids
(1st Report, Parallel Circular Squeeze Film Bearings)

by Hiromu HASHIMOTO and Sanae WADA

In this research work, the effects of fluid inertia forces in parallel circular squeeze film bearings lubricated with pseudo-plastic fluids are examined theoretically. In the analysis, the cubic equation obtained from the empirical flow curves for pseudo-plastic fluids is used as the relation between shear stress and rate of shear and the inertia term in the momentum equation is approximated by the mean value averaged across the film thickness. The effects of inertia forces on the pressure distribution of the circular bearings are discussed for various nonlinear factors of pseudo-plastic fluids.

Key Words: Lubrication Theory, Squeeze Film Bearings, Inertia Effects, Pseudo-Plastic Fluids, Sinusoidal Squeezing Motion

1. 緒 言

スクイズフィルム軸受内の圧力発生は主として潤滑油の粘性に起因するが、油膜が厚い場合やスクイズ速度が大きい場合には流体慣性力の影響が無視できなくなる。さらに、粘度指数向上剤などとして多量の高分子重合物を添加した油を用いる際には、非ニュートン特性の影響も現れてくる。したがって、スクイズフィルム軸受の潤滑挙動をより精密に解析するためには、これらの影響を合せて考慮すべきであろう。

スクイズフィルム軸受における流体慣性力の影響を検討した論文としては、慣性項を膜厚方向の平均値で近似することにより、無限に長い平行平板形軸受の膜圧力を求めた Pinkus ら⁽¹⁾の研究、スクイズレイノルズ数を摂動パラメータとして慣性項を線形化することにより、平行円板形軸受の近接問題を解析した Tichy ら⁽²⁾の研究、繰返し修正法によって慣性力を求めることにより、正弦波状運動を行う平行円板形軸受の性能を論じた黒田ら⁽³⁾の研究などがあるが、これらはいずれもニュートン流体の場合のみを対象としている。一

方、スクイズフィルム軸受における潤滑油の非ニュートン特性の影響を明らかにした研究としては、べき乗則に従う流動特性式に基づいて平行円板形軸受の性能を解析した Shukla⁽⁴⁾、Na⁽⁵⁾および Elkouh ら⁽⁶⁾の報告がある。また、林ら⁽⁷⁾は、非ニュートン流体のうち擬塑性流体で潤滑される平行円板形軸受の正弦波状スクイズ運動下における膜圧力を三次式近似の流動特性式に基づいて計算している。このように、スクイズフィルム軸受における流体慣性力と非ニュートン特性の影響をそれぞれ単独に検討した論文は多いが、両者をともに考慮した研究はきわめて乏しく、著者らの知る限りでは、粘性解を用いて慣性項を近似することにより、べき乗則に従う非ニュートン流体で潤滑される平行円板形軸受の近接問題を解析した Elkouh⁽⁸⁾の報告があるにすぎない。

本論文では、擬塑性流体を用いたスクイズフィルム軸受に対する潤滑方程式を流体慣性力を考慮して導出し、これを正弦波状スクイズ運動を行う平行円板形軸受に適用して膜圧力を解析したので、その結果について報告する。

2. 記 号

 a : スクイズ運動の振幅

* 昭和60年3月31日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月15日。

** 正員、東海大学工学部 (〒259-12 平塚市北金目 1117)。

*** 正員、早稲田大学理工学部 (〒160 東京都新宿区大久保 3-4-1)。

- A : スクイズ運動の無次元振幅 $= a/h_0$
 C_e : 軸受端における圧力損失係数
 f : 等価圧力こう配
 F : 無次元等価圧力こう配 $= h_0^2 f / (\mu \omega_f r_a)$
 k : 擬塑性率
 h : 膜厚さ
 h_0 : 平均膜厚さ
 H : 無次元膜厚さ $= h/h_0$
 p : 膜圧力
 P : 無次元膜圧力 $= h_0^2 p / (\mu \omega_f r_a^2)$
 P_c : 軸受中心における無次元膜圧力
 r : 半径方向座標
 r_a : スクイズ面の半径
 R : 無次元半径方向座標 $= r/r_a$
 R_e^* : スクイズレイノルズ数 $= \rho h_0^2 \omega_f / \mu$
 t : 時間
 T : 無次元時間 $= \omega_f t$
 v_r : 半径方向流速
 v_z : 膜厚方向流速
 v_s : スクイズ面の近接速度
 V_s : スクイズ面の無次元近接速度 $= v_s / (h_0 \omega_f)$
 z : 膜厚方向座標
 $\dot{\gamma}$: ひずみ速度
 δ : 非線形率 $= k(\mu r_a \omega_f / h_0)^2$
 μ : 潤滑油の立ちあがり粘度
 ρ : 潤滑油の密度
 τ : せん断応力
 ω_f : 正弦波状スクイズ運動の角速度

3. 理 論

図1に示す平行円板形スクイズフィルム軸受において、油膜の流れは層流とし、かつ現象が軸対称であることを考慮すれば、油膜の流れを支配する運動方程式は次のように与えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (1)$$

さて、非ニュートン流体のうち、ポリイソブチレンなどの粘度指数向上剤を添加した油は、図2に示すような擬塑性流体の特性を示すことが多い。そこで、本論文では、擬塑性流体で潤滑される平行円板形スクイズフィルム軸受を解析の対象とする。

ポリイソブチレンを添加した潤滑油の流動実験から、擬塑性流体の流動特性は、下記の三次多項式によって表される⁽⁹⁾。

$$\mu \frac{\partial v_r}{\partial z} = \tau_{rz} + k \tau_{rz}^3 \quad (2)$$

油の圧縮性を無視すると、連続の式とスクイズ運動を表す式はそれぞれ次のように与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$2\pi r \int_0^h v_r dz = \pi r^2 v_s \quad (4)$$

速度成分 v_r, v_z ならびに膜圧力 p に関する境界条件はそれぞれ

$$v_r(r, 0, t) = v_r(r, h, t) = 0 \quad (5)$$

$$v_z(r, 0, t) = 0, v_z(r, h, t) = -v_s \quad (6)$$

$$p(r_a, t) = -j \frac{C_e \rho r_a^2 v_s^2}{8h^2} \quad (7)$$

ただし、式(7)において負のスクイズ時 ($v_s < 0$) では $j=1$ とし、正のスクイズ時 ($v_s > 0$) では $j=0$ とする⁽³⁾。

式(1)~(4)を境界条件式(5)~(7)のもとに解けば、平行円板形スクイズフィルム軸受の圧力分布が得られるが、これらを直接解くことは困難である。そこで、慣性力は膜厚方向に一樣に作用すると考えて、式(1)の慣性項を膜厚方向の平均値で置き換える⁽¹⁾と、

$$\frac{\rho}{h} \int_0^h \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) dz + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (8)$$

連続の式(3)ならびに速度成分 v_r, v_z に関する境

図1 平行円板形スクイズフィルム軸受

図2 擬塑性流体の流動曲線

境界条件式(5)および(6)を用いて式(8)の左辺を書き改めると、次式が得られる。

$$\frac{\rho}{h} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h v_r^2 dz + \frac{1}{r} \int_0^h v_r^2 dz \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (9)$$

ここで、等価圧力こう配 $f^{(10)}$ を下記のように定義する。

$$f \equiv \frac{\rho}{h} \left(\frac{r}{2} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \int_0^h v_r^2 dz + \frac{1}{r} \int_0^h v_r^2 dz \right) + \frac{\partial p}{\partial r} \quad (10)$$

式(9), (10)より,

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = f \quad (11)$$

式(10)の定義から、等価圧力こう配 f は膜厚方向座標 z に独立である。したがって、式(11)を z に関して積分した結果は、

$$\tau_{rz} = fz + C_1 \quad (12)$$

さらに、式(12)を擬塑性流体の流動特性式(2)へ代入して、 z に関して積分すると、

$$v_r = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{f}{2} z^2 + C_1 z + k \left(\frac{f^3}{4} z^4 + f^2 C_1 z^3 + \frac{3}{2} f C_1^2 z^2 + C_1^3 z \right) \right\} + C_2 \quad (13)$$

式(13)に速度成分 v_r に関する境界条件式(5)を適用して、積分定数 C_1 および C_2 を求めると、

$$C_1 = -\frac{h}{2} f, C_2 = 0 \quad (14)$$

式(14)を式(13)へ代入すれば、速度成分 v_r が次のように求められる。

$$v_r = \frac{f}{2\mu} z(z-h) + \frac{kf^3}{\mu} \left(\frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} h z^3 + \frac{3}{8} h^2 z^2 - \frac{1}{8} h^3 z \right) \quad (15)$$

式(15)をスクイズ運動の式(4)へ代入して整理すると、等価圧力こう配 f に関する下記の三次代数方程式が得られる。

$$\frac{k h^5}{80\mu} f^3 + \frac{h^3}{12\mu} f + \frac{r}{2} v_s = 0 \quad (16)$$

式(16)の実根は、 $k=0$ と $k>0$ の各場合に依じてそれぞれ以下のように求められる。

(i) $k=0$ (ニュートン流体) のとき:

$$f = -\frac{6\mu v_s}{h^3} r \quad (17)$$

(ii) $k>0$ (擬塑性流体) のとき:

$$f = \left\{ -\frac{20\mu v_s}{k h^5} r + \sqrt{\left(\frac{20\mu v_s}{k h^5} \right)^2 r^2 + \left(\frac{20}{9 k h^2} \right)^3} \right\}^{1/3}$$

$$+ \left\{ -\frac{20\mu v_s}{k h^5} r - \sqrt{\left(\frac{20\mu v_s}{k h^5} \right)^2 r^2 + \left(\frac{20}{9 k h^2} \right)^3} \right\}^{1/3} \quad (18)$$

一方、式(15)を式(10)へ代入すると、圧力こう配に関する下記の潤滑方程式が得られる。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = f - \frac{\rho}{h} \left[\frac{r}{2} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{f h^5}{120\mu^2} \times \left\{ 2f' \left(1 + \frac{4}{7} k f^2 h^2 + \frac{1}{16} k^2 f^4 h^4 \right) + \frac{f}{r} \left(1 + \frac{2}{7} k f^2 h^2 + \frac{1}{48} k^2 f^4 h^4 \right) \right\} \right] \quad (19)$$

ただし、 f' は式(17)あるいは式(18)によって与えられる f を半径方向座標 r で微分して得られる関数である。

(17), (19)より、ニュートン流体を使用した場合の潤滑方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = - \left\{ \frac{6\mu v_s}{h^3} + \frac{\rho}{h} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{9v_s^2}{10h} \right) \right\} r \quad (20)$$

境界条件式(7)を適用して式(20)を積分すれば、ニュートン流体の膜圧力が次のように求められる。

$$p = \frac{3\mu v_s}{h^3} \left(1 + \frac{\rho h^2}{12\mu v_s} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{3\rho v_s h}{20\mu} \right) (r_a^2 - r^2) - j \frac{C_e \rho r_a^2 v_s^2}{8} \quad (21)$$

擬塑性流体を用いた場合の膜圧力は、潤滑方程式(19)を境界条件式(7)のもとに数値積分することによって求められる。

以上に提示した理論式に基づいてスクイズ面が正弦波状運動を行う場合の膜圧力を解析する。

スクイズ面が正弦波状運動を行うときの膜厚さは次式によって与えられる。

$$h = h_0 + a \cos \omega_f t \quad (22)$$

したがって、スクイズ速度および加速度はそれぞれ、

$$v_s = -\frac{\partial h}{\partial t} = a \omega_f \sin \omega_f t \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a \omega_f^2 \cos \omega_f t \quad (24)$$

式(23), (24)を式(21)へ代入し、かつその結果に2章で定義した無次元化を適用すれば、ニュートン流体の無次元膜圧力 P は次のように表される。

$$P = \left\{ -\frac{3\dot{H}}{H^3} + R_e^* \left(-\frac{\ddot{H}}{4H} + \frac{9\dot{H}^2}{20H^2} \right) \right\} (1 - R^2) - j \frac{C_e R_e^* \dot{H}^2}{8H^2} \quad (25)$$

ここで、無次元膜厚 H は次式によって与えられる。

$$H = 1 + A \cos T \quad (26)$$

また、記号(・)は無次元時間 T による微分を表す。

擬塑性流体の膜圧力は式(19)を無次元化して得られる下記の方程式を無次元半径座標 R に関して数値積分することにより求められる。

$$\frac{\partial P}{\partial R} = F - \frac{R_e^*}{H} \left[-\frac{R}{2} \ddot{H} + \frac{1}{120} F H^5 \times \left\{ 2F \left(1 + \frac{4}{7} \delta F^2 H^2 + \frac{1}{16} \delta^2 F^4 H^4 \right) + \frac{F}{R} \left(1 + \frac{2}{7} \delta F^2 H^2 + \frac{1}{48} \delta^2 F^4 H^4 \right) \right\} \right] \dots (27)$$

ただし、 F は式(18)を無次元化した次式によって与えられる。

$$F = \left\{ \frac{20 \dot{H} R}{\delta H^5} + \sqrt{\left(\frac{20 \dot{H}}{\delta H^5} \right)^2 R^2 + \left(\frac{20}{9 \delta H^2} \right)^3} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{20 \dot{H} R}{\delta H^5} - \sqrt{\left(\frac{20 \dot{H}}{\delta H^5} \right)^2 R^2 + \left(\frac{20}{9 \delta H^2} \right)^3} \right\}^{1/3} \dots (28)$$

また、 F' は F を R で微分して得られる関数である。

式(7)より、無次元圧力 P に関する境界条件は次のように表される。

$$P(1, T) = -j \frac{C_e R_e^* \dot{H}^2}{8 H^2} \dots (29)$$

4. 計算結果

正弦波状運動を行う平行円板形スクイズフィルム軸受の計算結果について述べるまえに、まず軸受すきま内の流れの運動方程式に含まれる慣性項を膜厚方向の平均値で近似する方法の妥当性について検討する。図3は、ニュートン流体で潤滑され、スクイズ速度が正でかつ一定の平行円板形軸受を対象とした Tichy ら⁽²⁾の実験および計算結果と式(21)による計算結果との比較を示している。なお、Tichy らの計算値は、スクイズレイノルズ数 ($= \rho v_s h / \mu$) をパラメータとして慣性項を摂動展開し、二次の項まで採用して得られたものである。図3において、これらの結果の間にはかなり

図3 膜厚さと膜圧力の関係

良い一致がみられることから、本報で用いた平均化により慣性項の近似は妥当であると判断される。

図4は、正弦波状運動を行うスクイズフィルム軸受の圧力分布の時間変化をスクイズ運動の一周期分について示したものである。図4中の実線はニュートン流体に対する結果を、破線はニュートン流体の粘度と等しい立ちあがり粘度を有する擬塑性流体に対する結果を表している。なお、膜圧力の解析に際して、境界条件式(29)における圧力損失係数 C_e の値を $2.0^{(3)}$ とした。また、軸受すきま内にはキャピテーションが発生しないことを前提とした。流体慣性力を無視した場合には、正のスクイズ時 ($0 < T < \pi$) において正圧が、一方負のスクイズ時 ($\pi < T < 2\pi$) においては負圧が発生し、正圧と負圧は時間 $T = \pi$ に関して対称となる。擬塑性流体の見かけ粘度はニュートン流体の粘度よりも小さいので、擬塑性流体を用いた場合の圧力の絶対値はニュートン流体に比べて減少する。流体慣性力を考慮した場合には、正圧と負圧は時間 $T = \pi$ に関して非対称となり、負圧のピーク値の絶対値は正圧のそれよ

(a) 流体慣性力を無視した場合 ($R_e^* = 0$)

(b) 流体慣性力を考慮した場合 ($R_e^* = 10$)

図4 圧力分布の時間的変化

りも大きくなる。さらに、スクイズ速度が零となる時間 $T=0, \pi$ において圧力は零とはならず、 $T=0$ では正圧が、 $T=\pi$ では負圧が生じる。また、負のスクイズ時においては軸受端で流れが急加速されるために、圧力降下が生じる。擬塑性流体の圧力の絶対値は時間 T が 2π に近くなるとニュートン流体に比べて若干増大するが、他の時間においては減少する。ただし、スクイズ速度が零となる $T=0, \pi$ においては擬塑性の影響は現れないことがわかる。

図5は、軸受中心膜圧力に及ぼす擬塑性の影響を非線形率をパラメータとして示したものである。慣性力を無視した場合の膜圧力は常に時間 $T=\pi$ に関して反対称となる。また、非線形率が大きいほど擬塑性の影響が顕著に現れて圧力の絶対値が減少する。一方、流体慣性力を考慮した場合の膜圧力は時間 $T=\pi$ に関して非対称となり、圧力が正から負へ転ずる時間は $T=\pi$ よりも早くなる。その傾向は非線形率の値が大きいほど顕著である。なお、流体慣性力を考慮した場合においても、膜圧力の絶対値は $T=\pi$ および 2π の近傍を除いて非線形率の増加に伴い減少するが、その

割合は流体慣性力を無視した場合に比べて小さい。

図6は、軸受中心膜圧力に及ぼすスクイズレイノルズ数の影響をニュートン流体と擬塑性流体の各場合について示したものである。スクイズレイノルズ数が大きくなるにつれて流体慣性力の影響が顕著に現れ、時間 $T=\pi$ に関する膜圧力の非対称性が著しくなる。な

図6 膜圧力に及ぼすスクイズレイノルズ数の影響

(a) 流体慣性力を無視した場合 ($R_e^*=0$)

(b) 流体慣性力を考慮した場合 ($R_e^*=10$)

図5 膜圧力に及ぼす非線形率の影響

(a) 流体慣性力を無視した場合 ($R_e^*=0$)

(b) 流体慣性力を考慮した場合 ($R_e^*=10$)

図7 膜圧力に及ぼす振幅の影響

お、非線形率の値を一定としたとき、擬塑性の影響による膜圧力の変化はスクイズレイノルズ数の値が小さいほうが大きいことがわかる。

図7は、軸受中心膜圧力に及ぼすスクイズ運動の振幅の影響を流体慣性力を無視した場合と考慮した場合について比較したものである。流体慣性力の有無にかかわらず振幅の増大につれて膜圧力の絶対値は増加する。また、振幅が大きいほどスクイズ速度や加速度も増すので、擬塑性や流体慣性力の影響が顕著に現れることがわかる。

5. 結 言

本論文では、擬塑性流体で潤滑されるスクイズフィルム軸受における流体慣性力の影響を明らかにする目的で、流体の運動方程式に含まれる慣性項に対して平均化による近似を適用し、擬塑性流体に対する流動特性式としてポリイソブチレンを添加した油の流動実験より得られた三次多項式を用いることによって、取扱いの容易な潤滑方程式を導出した。さらに、この方程式を正弦波状スクイズ運動を行う平行円板形軸受に適用して、その膜圧力を解析した。その結果、以下に述べる結論を得た。

(1) スクイズ運動の一周期分 ($0 \leq T < 2\pi$) の圧力

変化において、流体慣性力を無視した場合の膜圧力は時間 $T=\pi$ に関して反対称となるのに対し、流体慣性力を考慮した場合の圧力は非対称となる。その傾向はスクイズレイノルズ数が大きいほど、また非線形率の値が増加するほど著しい。

(2) 非線形率の増加に伴う膜圧力の絶対値の減少は、流体慣性力を無視した場合に顕著である。また、非線形率の値を一定としたとき、膜圧力の絶対値の減少割合は、スクイズレイノルズ数が小さいほど大きい。

(3) 膜圧力に及ぼす流体慣性力と擬塑性の影響は、スクイズ運動の振幅が大きいほど顕著である。

文 献

- (1) Pinkus, O. and Sternlicht, B., *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, (1961), 360, McGraw-Hill.
- (2) Tichy, J. A. and Winer, O. W., *Trans. ASME, Ser. F.*, 92-4 (1970), 588.
- (3) 黒田・堀, 潤滑, 21-11 (昭51), 740.
- (4) Shukla, J. B., *ASME Paper*, No. 64-Lubs-4 (1946), 1.
- (5) Na, T. Y., *Trans. ASME, Ser. D.*, 88-3 (1966), 678.
- (6) Elkouh, A. F., ほか2名, *Trans. ASME, J. Lubr. Technol.*, 104-2 (1982), 275.
- (7) 林・佐野, 機講論, No. 740-15 (昭49), 141.
- (8) Elkouh, A. F., *Trans. ASME, Ser. F.*, 92-3 (1976), 409.
- (9) 和田・林, 機論, 36-278 (昭45), 1194.
- (10) 森・ほか2名, 潤滑, 28-9 (昭58), 671.