モード合成法による振動解析*
(第1報, 異なる方法の比較 その1)

大熊政明**, 長松昭男**

Vibration Analysis by Component Mode Synthesis Method
(1st Report, Comparison of Three Methods)

by Masaaki OOKUMA and Akio NAGAMATSU

Three kinds of component mode synthesis methods are compared with one another in this paper. The first method is "CMS" proposed by the authors. The second is a method with the residual compliance matrix. The third is one without the residual compliance matrix. Comparing the accuracies and the calculational speeds of these methods with one another, their characteristics are observed. Addition to that, as an example of the application to real mechanical structures, a crank-shaft is analyzed by CMS and the method with the residual compliance matrix.

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Component Mode Synthesis Method, Natural Mode, Natural Frequency, Crank Shaft

1. ま え が き

有限要素法を直接適用することが困難な複雑な構造物の振動解析を行うための一つの方法として部分構造合成法と総称される一群の解析方法が研究されている。部分構造合成法は、解析したい構造物全体（以下、全系と略記）をいくつかの部分構造（以下、分系と略記）に分け、それぞれの分系の振動特性を有限要素法や実験モード解析で求め、それらを統合して全系の振動解析を行う方法である。

部分構造合成法の開発初期⁽¹⁾の段階では、例えば、著者らが提案した縮小インピーダンス合成法^{(2)~(4)}のように、分系の振動特性として伝達関数を用いる方法が使われた。しかし、この方法は、計算時間の短縮という点に関して期待どおりにはいかなかった。そこで、次に研究されたのが、振動特性として分系の固有モードを用いるモード合成法である。

モード合成法⁽⁵⁾の主なものは、拘束モード形、不拘束モード形および混合形に大別できる。拘束モード形では、分系の採用モードとして、他の分系との結合部

分を拘束した状態の固有モードを用いる。不拘束モード形は、結合部分を自由端とした固有モードを用いる。混合形はそれら二者を混合した方法である。著者らは、拘束モード形の一方法である区分モード合成法を開発し、その有効性を報告^{(6)~(9)}してきた。

一方、不拘束モード形の方法の代表的なものとしては、採用モードより高次のモードの影響を近似的に補正するための剰余コンプライアンス行列を用いる方法と、それを用いない方法がある。現在市販されているモード合成法のプログラムの主流は、これらの不拘束モード形の解法を用いている。

そこで本報では、著者らの提案した区分モード合成法と、剰余コンプライアンス行列を用いたモード合成法およびそれを用いない方法の三者の比較を行い、それぞれの特長を明らかにする。また、実機に対する適用例として、クランク軸・フライホイール系の解析を試みる。

2. 解析方法の説明

区分モード合成法（以下、CMSと略記）と剰余コンプライアンス行列を用いるモード法については図1の(A)、剰余コンプライアンス行列を用いないモード法については図1の(B)に示す系を用いて説明する。各

* 昭和60年3月31日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月31日。

** 正員、東京工業大学（〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1）。

分系の内部領域を a, 結合領域を b の添字で表す。減衰は省略する。

2.1 区分モード合成法 (CMS) 分系 i ($i=1, 2$) に関する運動方程式は,

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa}^{(i)} & M_{ab}^{(i)} \\ M_{ba}^{(i)} & M_{bb}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa}^{(i)} & K_{ab}^{(i)} \\ K_{ba}^{(i)} & K_{bb}^{(i)} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \chi_a^{(i)} \\ \chi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_b^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで, $[M]$ は質量行列, $[K]$ は剛性行列, $\{\chi\}$ は変位振幅, $\{R_b\}$ は結合領域で他方の分系から受ける内力振幅を示す。式(1)において慣性項を省略し, 内部領域の自由度を結合領域部の自由度で表すと,

$$\{\chi_a^{(i)}\} = -[K_{aa}^{(i)}]^{-1}[K_{ab}^{(i)}]\{\chi_b^{(i)}\} = [T_i]\{\chi_b^{(i)}\} \quad (2)$$

そこで, 分系 i の全域の変位自由度を結合領域の自由度に縮小でき,

$$\begin{Bmatrix} \chi_a^{(i)} \\ \chi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i \\ I \end{bmatrix} \{\chi_b^{(i)}\} \quad (3)$$

式(3)を用いて式(1)中にある質量行列と剛性行列を結合領域部分の自由度と等しい自由度に縮小する。縮小された質量行列と剛性行列をそれぞれ $[\bar{M}_i]$ と $[\bar{K}_i]$ とする⁽⁶⁾。

結合領域を固定としたときの固有値問題

$$([K_{bb}^{(i)}] - \omega^2 [\bar{M}_{bb}^{(i)}])\{\chi\} = \{0\} \quad (4)$$

を解いて, 1次から l_i 次までの固有モードを求める。これらの固有モードを各列に並べたモード行列を $[\phi_i]$ で表す。

次に各分系を結合した全系の解析を行う。ここでは分系1と分系2の結合は剛結合なので, $\{\chi_b^{(1)}\} = \{\chi_b^{(2)}\} = \{\chi_b\}$ 。そこで, 分系1と分系2の質量行列と剛性行列を結合部に縮小し, それらを重ね合せた次の固有値解析を行って, 1次から l_b 次までの固有モードを求める。

$$([\bar{K}_1 + \bar{K}_2] - \omega^2 [\bar{M}_1 + \bar{M}_2])\{\chi\} = \{0\} \quad (5)$$

結合領域の変位は, これらの固有モードの一次結合によって表現する。すなわち, 式(5)で求めた固有モードを並べたモード行列を $[\phi_b]$ とすると, $\{\chi_b\}$ は

$$\{\chi_b\} = [\phi_b]\{\xi_b\} \quad (6)$$

他方, 分系 i ($i=1, 2$) の内部領域の変位は, 式(2)で表す変位成分と, 式(4)で求めた固有モードの一次結合で表現できる成分の和で表されるとする。

$$\begin{aligned} \{\chi_a^{(i)}\} &= [T_i]\{\chi_b\} + [\phi_i]\{\xi_i\} \\ &= [T_i][\phi_b]\{\xi_b\} + [\phi_i]\{\xi_i\} \quad (7) \end{aligned}$$

式(6)と式(7)より, 全系の変位は次のように各分系の固有モードで表される。

$$\begin{Bmatrix} \chi_a^{(1)} \\ \chi_b \\ \chi_a^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \phi_b & \phi_1 & 0 \\ \phi_b & 0 & 0 \\ T_2 \phi_b & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_b \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式(8)を用いて物理座標上での全系の運動方程式を一般化座標に変換する。それを解くことにより全系の固有振動数が求まる。一般化座標上での固有モードを式(8)で物理座標上に変換することによって通常の固有モードが求まる。

2.2 剰余コンプライアンス行列を用いる不拘束モード合成法 分系 i ($i=1, 2$) についての運動方程式(1)の質量行列と剛性行列を用いて固有値解析し, 1次から l_i 次 (または p_i 次, $p_i > l_i$) までの固有モードを求める。ここで得られる固有モードは, 分系 i が他の分系と切り離され, 結合領域を自由端とした状態のものである。不拘束モードと呼ぶ。また, l_i 次より高次の固有モードが低周波数域の伝達関数に与える影響を表現するための剰余コンプライアンス行列 $[Z]$ を計算する。剰余コンプライアンス行列の求め方⁽¹⁰⁾には次の3種類がある。

まず, (l_i+1) 次から p_i 次までの固有モードを用いて求める従来の方法, 次に, 1次から l_i 次の固有モードを用いて (l_i+1) 次以上のすべてのモードの影響を考慮できる Hansteen⁽¹¹⁾ の方法, そして, Hansteenの方法では周辺自由状態の系に対しては直接適用できないので, その場合に対する著者らの提案した方法⁽¹⁰⁾, である。

以上より分系 i の変位は

$$\begin{Bmatrix} \chi_a^{(i)} \\ \chi_b^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a^{(i)} \\ \phi_b^{(i)} \end{bmatrix} \{\xi_i\} + \begin{bmatrix} Z_{aa}^{(i)} & Z_{ab}^{(i)} \\ Z_{ba}^{(i)} & Z_{bb}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_b^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

で表されたとする。式(9)の下側の関係式から

$$R_b^{(i)} = [Z_{bb}^{(i)}]^{-1}\{\chi_b^{(i)}\} - [Z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}]\{\xi_i\} \quad (10)$$

式(9)を式(1)に代入し, 各項に左側から $[\phi_a^{(i)T}]$, $[\phi_b^{(i)T}]$ をかけると, 固有モードの直交性より,

$$([k^{(i)}] - \omega^2 [m^{(i)}])\{\xi_i\} = \{f_m\} \quad (11)$$

ここで, $[k^{(i)}]$ と $[m^{(i)}]$ はそれぞれモード剛性行列, モード質量行列と呼ばれる対角行列であり, ベクトル $\{f_m\}$ は次のように表されるベクトルである。

図1 2分系からなる構造物

$$\begin{aligned} \{f_m\} &= [\phi_b^{(i)}]^T [Z_{bb}^{(i)}]^{-1} \{\chi_b^{(i)}\} \\ &\quad - [\phi_b^{(i)}]^T [Z_{bb}^{(i)}]^{-1} [\phi_b^{(i)}] \{\xi_i\} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

そこで、分系 i に関して、式(10)、(11)および式(12)より、次の方程式が得られる、

$$\begin{pmatrix} [k^{(i)}] + [\phi_b^{(i)}][Z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}] & -[\phi_b^{(i)}][Z_{bb}^{(i)}]^{-1} \\ -[Z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}] & [Z_{bb}^{(i)}]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \chi_b^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_b^{(i)} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

分系 1 と分系 2 についての式(13)を統合すると全系に対する方程式ができる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} [K_{\epsilon\epsilon}] & [K_{\epsilon x}] \\ [K_{x\epsilon}] & [K_{xx}] \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_{\epsilon\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \chi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

ただし、

$$[K_{\epsilon\epsilon}] = \begin{pmatrix} [k^{(1)}] + [\phi_b^{(1)}][Z_{bb}^{(1)}]^{-1}[\phi_b^{(1)}] & 0 \\ 0 & [k^{(2)}] + [\phi_b^{(2)}][Z_{bb}^{(2)}]^{-1}[\phi_b^{(2)}] \end{pmatrix}$$

$$[K_{\epsilon x}] = [K_{x\epsilon}]^T = [-[Z_{bb}^{(1)}]^{-1}[\phi_b^{(1)}], -[Z_{bb}^{(2)}]^{-1}[\phi_b^{(2)}]]$$

$$[K_{xx}] = [[Z_{bb}^{(1)}]^{-1} + [Z_{bb}^{(2)}]^{-1}]$$

$$\{\xi\}^T = (\{\xi_1\}^T, \{\xi_2\}^T)$$

$$[M_{\epsilon\epsilon}] = \begin{pmatrix} [m^{(1)}] & 0 \\ 0 & [m^{(2)}] \end{pmatrix}$$

結合領域での作用力 $\{R_b^{(1)}\}$ と $\{R_b^{(2)}\}$ は作用反作用の法則から打ち消し合う。

一般には式(14)を解いて全系に対する固有振動数を求める。しかし、剛結合もしくは結合部材(ばねなど)の質量を無視できる場合には、自由度を採用モード数の和まで小さくできる。式(14)の下側の関係式より、

$$\{\chi_b\} = -[K_{xx}]^{-1}[K_{x\epsilon}]\{\xi\} = [B]\{\xi\} \dots \dots \dots (15)$$

式(15)の関係を用いて式(14)を縮小すると、

$$([K_{\epsilon\epsilon}] - [K_{\epsilon x}][K_{xx}]^{-1}[K_{x\epsilon}] - \omega^2[M_{\epsilon\epsilon}])\{\xi\} = \{0\} \dots \dots \dots (16)$$

式(16)を解いて固有振動数が得られる。それに対応する固有モード $\{\xi_0\}$ を式(15)に代入して結合領域の部分の固有モードが、また、式(9)の上側の関係式に式(10)を代入してできる式

$$\begin{aligned} \{\chi_a^{(i)}\} &= ([\phi_a^{(i)}] - [Z_{ab}^{(i)}][Z_{bb}^{(i)}]^{-1}[\phi_b^{(i)}])\{\xi_i\} \\ &\quad + [Z_{ab}^{(i)}][Z_{bb}^{(i)}]^{-1}\{\chi_b^{(i)}\} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

で各分系の内部領域部の固有モード成分が求められる。

2.3 剰余コンプライアンス行列を用いない不拘束

モード合成法 分系 i の変位は、式(9)において剰余コンプライアンス行列の項を無視した場合の式で表されるとする。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \chi_a^{(i)} \\ \chi_b^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_a^{(i)} \\ \phi_b^{(i)} \end{pmatrix} \{\xi_i\} \dots \dots \dots (18)$$

通常は、式(18)における採用モードの数は分系 i の自由度の数よりかなり小さいので、剰余成分の影響を無視する本方法は剛結合の系の解析には適さない。そこで、図1の(b)のように、分系 1 と分系 2 はばねを介して結合させる。

式(18)より全系の変位は次のように表現する。

$$\begin{pmatrix} \chi_a^{(1)} \\ \chi_b^{(1)} \\ \chi_a^{(2)} \\ \chi_b^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_a^{(1)} & 0 \\ \phi_b^{(1)} & 0 \\ 0 & \phi_a^{(2)} \\ 0 & \phi_b^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (19)$$

物理座標上での全系に対する運動方程式を式(19)を用いて一般化座標上の方程式に変換し、それを解くことにより全系の固有振動数が求まる。また、固有モードは、一般化座標と物理座標の間の変換式(式(19))を用いて求めることができる。

3. 3種類の方法の比較

図2の(a)に示す両端固定平板を対象にして、上記3方法の比較検討を行う。ここでの厳密解としては、有限要素法で全系を解析した結果を用いる。すなわち、伝達関数の厳密解は、有限要素法ですべての固有モードを求め、それらを用いてモード解析した結果である。CMSの特性についての検討は以前に報告⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾したので、厳密解およびCMSの結果と比較しながら他の2方法の検討を行う。

3.1 剰余コンプライアンス行列を用いる方法

図2(b)のように二つの分系に分割して解析する。表1には、従来の方法による剰余コンプライアンス行列を用いて計算した結果を示す。採用モード数が同じでも、剰余コンプライアンス行列を計算するのに用いるモードの数を増やすと精度がよくなる。しかし、剰余コンプライアンス行列に用いるモード数を減らした分だけ採用モード数を増やしても精度は改善されない。

そこで、剰余コンプライアンス行列の計算方法⁽¹⁰⁾として Hansteen の方法を用いて計算した結果を表2に示す。Hansteen の方法によれば、採用モードのみを用いて、採用モードより高次のすべての固有モードの影響を含んだ精度の良い剰余コンプライアンス行列が得られる。採用モード数が10の結果ですら表1の結果より精度が良い。

このように本方法では、剰余コンプライアンス行列が重要な働きをすることがわかる。そこで、例として図2(b)の分系一単位について節点1を面外方向に励

表 1 剰余コンプライアンス行列を用いるモード合成法による平板の固有振動数
(従来の方法による剰余コンプライアンス行列使用)

Number of adopted natural modes of Sub.1 and Sub.2		10		20		20		20		30		30		C M S	
Number of natural modes for residual compliance matrix		40		30		80		180		20		70			
order	Exact Result	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	68.8	74.0	7.41	74.0	7.41	71.9	4.36	69.9	1.59	74.0	7.41	71.9	4.36	68.8	0.0
2	168.2	171.4	1.84	171.4	1.84	169.4	0.71	168.8	0.35	171.8	2.08	169.4	0.71	168.2	0.0
3	189.7	191.3	0.79	191.3	0.79	190.2	0.21	189.7	0.0	191.3	0.79	190.2	0.21	189.7	0.0
4	357.4	390.4	9.20	390.3	9.17	368.4	3.04	357.6	0.05	390.2	9.17	368.4	3.04	357.4	0.0
5	372.9	418.3	12.17	418.1	12.09	398.1	6.75	382.1	2.46	418.0	12.09	398.1	6.73	373.0	0.03
6	583.4	627.5	7.55	627.4	7.54	605.2	3.71	595.9	2.12	627.3	7.52	605.0	3.70	584.1	0.11
7	618.2	632.8	2.34	630.3	1.94	620.6	0.38	618.4	0.01	630.2	1.94	620.6	0.38	618.3	0.02
8	856.2	924.8	8.00	922.6	7.74	874.3	2.11	857.3	0.12	922.5	7.74	874.2	2.10	856.6	0.04
9	921.2	954.1	3.56	951.7	3.31	928.4	0.77	921.3	0.01	951.7	3.31	928.4	0.77	922.6	0.14
10	926.0	1067.5	15.28	1059.9	14.46	996.3	0.75	950.6	2.64	1059.2	14.37	995.9	0.73	927.1	0.11
11	1086.1	1132.4	4.26	1129.7	4.00	1110.2	2.22	1086.6	0.03	1129.2	3.95	1109.9	2.18	1086.1	0.0
12	1181.6	1325.7	12.18	1317.6	11.50	1253.1	6.04	1225.6	3.72	1315.8	11.35	1250.6	5.83	1188.8	0.61
13	1296.1	1444.1	11.41	1432.0	1.99	1302.9	0.51	1297.0	0.06	1321.0	1.92	1302.6	0.50	1297.2	0.07
14	1331.1	1484.0	11.47	1433.2	7.67	1360.4	2.19	1336.9	0.43	1433.0	7.64	1359.9	2.15	1335.7	0.34
15	1563.2	2131.1	36.36	1651.4	5.64	1588.7	1.62	1568.2	0.31	1650.6	5.58	1587.1	1.52	1570.3	0.44
16	1638.9	2494.0	52.16	1774.2	8.25	1705.9	4.08	1641.5	0.15	1771.4	8.08	1703.8	3.95	1639.8	0.05
17	1729.2	2546.5	47.25	1991.0	15.13	1874.6	8.40	1776.3	2.72	1984.2	14.74	1871.2	8.20	1737.7	0.48
18	1933.8	2651.4	37.10	2131.1	10.19	2070.7	7.07	1973.7	2.05	2064.1	6.73	2015.9	4.24	2021.1	4.50
19	2001.5	4093.9	104.54	2238.3	11.83	2083.3	4.08	2034.3	1.63	2237.1	11.76	2079.8	3.91	2033.1	1.57
20	2002.9	—	—	2276.2	13.64	2171.5	8.41	2112.2	5.45	2270.2	13.34	2150.1	7.34	2078.6	3.77

(H)

(Hz)

図 2 両端固定平板モデル

振した時の励振点自身の Y 軸回りの回転角変位の伝達関数を示しながら、その理由を考察する。

まず図 3 で、30 次までの固有モードを用いた結果を厳密解と比較する。下側の図はボード線図 (位相省略) であり、実線が厳密解であり、破線が 30 次までの固有モードを使用した結果である。上側の図は、破線が示すゲインが実線のゲインに対して何倍ずれているかを示す。30 次より高次の固有モードを無視したための誤差は低周波域まで及んでいることがわかる。同様に図 4 は 180 次 (残り 30 次) までの固有モードを用いた結果である。図 5 は、採用モード数は 30 次までとして Hansteen の方法による剰余コンプライアンス行列を用いて計算した結果を示す。図 4 と図 5 を比較すると、180 次採用のモード解析の結果より、ほんの 30 次の採用モードでも Hansteen の剰余コンプライアンス行列を用いた結果のほうが精度良いことがわかる。剰

表 2 平板の固有振動数 (Hansteen の方法使用)

Number of adopted natural modes of Sub.1 and Sub.2		10		20		30	
order	Exact Result	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	68.8	68.8	0.0	68.8	0.0	68.8	0.0
2	168.2	168.2	0.0	168.2	0.0	168.2	0.0
3	189.7	189.7	0.0	189.7	0.0	189.7	0.0
4	357.4	357.6	0.0	357.4	0.0	357.4	0.0
5	372.9	373.1	0.05	372.9	0.0	372.9	0.0
6	583.4	584.1	0.10	583.4	0.0	583.4	0.0
7	618.2	618.5	0.03	618.2	0.0	618.2	0.0
8	856.2	861.4	0.56	856.4	0.01	856.2	0.0
9	921.2	921.7	0.05	921.3	0.01	921.2	0.0
10	926.0	930.0	0.43	926.3	0.02	926.1	0.01
11	1086.1	1093.0	0.62	1086.3	0.02	1086.2	0.01
12	1181.6	1198.4	1.42	1182.6	0.08	1181.7	0.01
13	1296.1	1302.4	0.48	1296.3	0.02	1296.1	0.0
14	1331.1	1332.9	0.12	1331.2	0.01	1331.1	0.0
15	1563.2	1785.2	14.20	1565.3	0.13	1563.3	0.01
16	1638.9	1973.7	20.43	1640.4	0.09	1639.4	0.03
17	1729.2	2008.0	16.12	1731.2	0.11	1729.7	0.03
18	1933.8	2227.2	15.16	1973.7	2.05	1937.6	0.19
19	2001.5	3646.4	82.17	2002.5	0.05	2001.9	0.02
20	2002.9	6140.6	206.59	2010.0	0.35	2003.4	0.02

余成分は、このように低次側の周波数域まで影響を及ぼすために、本方法の解析精度が左右されるのである。

部分構造合成法に利用するという観点からは、実験モード解析で行われている曲線適合の精度判定はボード線図上でゲインを対数表示した状態でどれだけ適合しているかを調べればよい。そして、すそ部分の適合具合が重要である。そこで、図 3~5 の上部に用いたようなゲインの倍率図を用いると便利である。たとえば、図 4 と図 5 を比べた場合、ボード線図上では精度の差ははっきり視覚的にわからないが、上部の倍率図を比べるとよくわかる。

一方、CMS では、剰余成分は考慮されないが、表 1 の固有振動数を見れば明らかのように、精度が良い。この理由は、各分系の採用モードとして拘束固有モードを用いるためである。拘束モードでは結合部を固定とするので、その振動モードに対しては結合部を通して他の分系からの作用力の影響が働かないのである。

表 3 に結合点のうちの 1 点に対する剰余コンプライ

アンス行列成分を省略(零にする)して全系の解析を行った結果を示す。剰余コンプライアンス行列の一部の成分を省略しただけでも相当精度が悪化することがわかる。そこで、各分系の情報として実験モード解析の曲線適合⁽¹²⁾で求めたモード特性を本モード合成法に用いようとする場合、結合点となる点はすべて励振点として振動試験(多点同時励振の必要はない)し、必要な剰余コンプライアンス行列成分はすべて求めるべきであり、省略すべきではない。

3.2 剰余コンプライアンス行列を用いない方法

この方法では、剛結合で直接分系を結びつけると、解析精度が悪くなる。また、結合領域の自由度より少ない採用モード数では、解を求めることが困難となる。そこで、図2(c)に示すように、分系1と分系2の間に、結合分系と呼ぶ結合点のみから構成される分系を用いて解析する。こうすれば、一体構造物も本方法で解析できる。

表4に採用モード数を変化させて解析した結果を示す。分系1と分系2の自由度はそれぞれ210と180である。そこで、分系1と分系2の採用モード数をそれぞれ210と180にした場合の解析結果は、当然厳密解と完全に一致する。しかし、かなり大きい採用モード数と思われる100次までの採用の場合の結果でも、1次の固有振動数ですらかなり精度が悪いことがわかる。この原因は、上記で述べたように、剰余成分の影響を考慮していないからである。通常の解析では分系の採用モード数を100以上にすることは困難であるから、本方法では精度の悪いことは覚悟する必要があると思われる。

剰余成分が大きく影響するのは大きな作用力が結合部に作用するためであるので、結合分系の剛性が小さい結合(柔らかい結合)の場合には精度が向上するこ

表3 剰余成分の一部を省略した場合の固有振動数
(採用モード数30)

order	Exact Result	A		B		C	
		Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	68.8	67.4	2.03	68.0	1.16	67.6	1.74
2	168.2	167.9	0.18	167.8	0.24	167.5	0.42
3	189.7	189.6	0.05	188.7	0.53	188.3	0.74
4	357.4	357.2	0.06	343.9	3.78	337.4	5.60
5	372.9	362.1	2.90	366.5	1.72	363.5	2.52
6	583.4	577.7	0.98	576.4	1.20	571.7	2.01
7	618.2	615.6	0.42	610.4	1.26	606.4	1.91
8	856.2	853.3	0.34	819.1	4.33	799.4	6.63
9	921.2	897.4	2.58	909.4	1.28	902.1	2.07
10	926.0	921.9	0.44	921.4	0.50	921.4	0.50

A: Calculation on condition that the degrees of freedom at the nodal point 4 of the residual compliance matrix of Sub.2 are omitted.

B: Calculation on condition that the degrees of freedom at the nodal point 1 of the residual compliance matrix of Sub.2 are omitted.

C: Calculation on condition that the degrees of freedom at the nodal points 1 of the residual compliance matrices of Sub.1 and Sub.2 are omitted.

図3 分系一単体の伝達関数 (30次モード使用)

図4 分系一単体の伝達関数 (180次モード使用)

図5 分系一単体の伝達関数 (30次モード使用)
(Hansteenの方法による剰余コンプライアンス行列利用)

表 4 剰余コンプライアンス行列を用いない方法による平板の固有振動数

		(Hz)									
Number of adopted natural modes of Sub.1		10		50		100		180		210	
Number of adopted natural modes of Sub.2		10		50		100		180		180	
order	Exact Result	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error%
1	68.8	73.9	7.26	71.5	3.92	71.2	3.48	70.1	1.74	68.8	0.0
2	168.2	170.8	1.54	169.1	0.53	168.9	0.41	168.5	0.17	168.2	0.0
3	189.7	193.7	2.10	191.8	1.05	191.6	0.94	189.8	0.05	189.7	0.0
4	357.4	389.3	8.92	366.9	2.65	363.7	1.73	357.6	0.06	357.4	0.0
5	372.9	407.7	9.33	390.4	4.66	388.4	4.12	383.0	2.68	372.9	0.0
6	583.4	625.2	7.14	597.4	2.39	594.7	1.93	589.8	1.07	583.4	0.0
7	618.2	651.9	5.45	635.3	2.74	633.6	2.47	618.5	0.04	618.2	0.0
8	856.2	930.5	8.67	879.4	2.69	874.3	2.10	856.9	0.07	856.2	0.0
9	921.2	934.2	1.40	926.1	0.53	925.5	0.41	923.2	0.20	921.2	0.0
10	926.0	1005.1	8.54	961.5	3.83	957.0	3.35	953.0	2.91	926.0	0.0
11	1086.1	1137.4	4.71	1105.9	1.82	1100.0	1.27	1086.9	0.07	1086.1	0.0
12	1181.6	1312.4	11.06	1217.1	2.99	1209.9	2.39	1203.1	1.81	1181.6	0.0
13	1296.1	1385.8	6.91	1341.3	3.47	1336.0	3.08	1297.5	0.10	1296.1	0.0
14	1331.1	1388.2	4.28	1351.9	1.55	1346.5	1.14	1337.7	0.49	1331.1	0.0
15	1563.2	1895.0	21.23	1614.3	3.26	1605.2	2.68	1565.2	0.12	1563.2	0.0
16	1638.9	3474.4	111.98	1687.7	2.97	1674.4	2.16	1641.4	0.14	1638.9	0.0
17	1729.2	3977.0	129.99	1793.3	3.70	1785.2	3.23	1781.6	3.03	1729.2	0.0
18	1933.8	4306.2	122.67	2046.1	5.80	1999.9	3.41	1933.8	0.0	1933.8	0.0
19	2001.5	5324.4	166.02	2059.5	2.89	2039.7	1.90	2019.9	0.91	2001.6	0.00
20	2002.9	13178.5	557.97	2071.9	3.44	2060.1	2.85	2048.5	2.27	2002.9	0.0

表 5 結合分系の厚さ変化による固有振動数の精度比較

Thickness of the connective-Sub. (mm)		4.0		2.0		1.0		0.5	
order		Freq.	Error%	Freq.	Error%	Freq.	Error	Freq.	Error%
1		71.9	4.50	61.3	1.32	51.8	0.0	49.9	0.0
2		169.3	0.65	173.4	0.05	171.0	0.58	114.0	0.17
3		192.1	1.26	186.7	0.80	175.4	0.05	171.6	0.0
4		368.0	2.96	329.1	1.85	269.0	0.97	210.5	0.04
5		393.0	5.39	333.9	0.90	306.8	0.19	280.1	0.03
6		600.7	2.96	574.9	0.59	490.3	1.19	378.8	0.02
7		638.4	3.26	598.3	1.90	562.3	0.16	548.1	0.0
8		882.7	3.09	817.7	2.05	710.4	0.43	669.0	0.0
9		927.2	0.65	855.8	0.84	784.6	0.31	747.9	0.0
10		967.2	4.44	907.0	0.49	902.6	0.05	906.4	0.01
11		1107.6	1.97	1040.4	1.13	948.1	0.17	916.1	0.0
12		1225.5	3.70	1141.9	1.17	1074.5	0.28	1041.5	0.0
13		1349.9	4.15	1242.5	2.29	1083.0	0.17	1069.1	0.0
14		1358.6	2.05	1317.2	0.69	1297.2	0.06	1296.3	0.0
15		1624.5	3.92	1502.6	2.09	1364.1	0.18	1347.6	0.01
16		1692.7	3.27	1554.4	1.54	1450.2	0.09	1443.8	0.0
17		1803.8	4.30	1662.6	2.60	1497.1	0.13	1485.2	0.01
18		2082.7	7.69	1922.0	1.94	1794.3	0.13	1793.9	0.03
19		2086.5	4.24	1961.6	1.13	1918.7	0.11	1926.9	2.31
20		2204.5	0.06	2139.1	8.60	2002.5	2.83	1967.0	2.10

(Hz)

とが推測できる。そこで、採用モード数は同一として、結合分系の厚さを 4 mm から 2, 1, 0.5 mm と薄くした系について解析して、このことを調べる。

表 5 に示すように、結合分系の厚さが薄くなるに従って精度が向上している。この事実から、本方法は、剛な結合の系の解析には適さず、柔らかい結合の系の場合にのみ用いるべきである。

4. クランク軸

実際の機械構造物への適用例として、図 6

に示すクランク軸・フライホイール系の解析（周辺自由境界条件）を行う。図 6 に示すように、全体を 20 個の分系に分割する。分系 1 はアイソパラメトリック立体要素（2 次要素）を用いて節点数 81 で有限要素分割する。分系 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19 は、分系 1 と同じ有限要素を用いるが、節点数 51 で分割する。また、フライホイールはアイソパラメトリックの厚肉かく要素（2 次要素）を用いて節点数 88 で有限要素分割する。分系 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 のアーム部の分系は四面体要素を用いて節点数 111 で有限要素分割する。

解析に際しては、各分系の結合する円形断面が常に平面を保ち、その形状は変形しないように、該当節点間に幾何学的拘束を与える。こうすることによって、一節点三自由度の立体要素の分系と一節点五自由度の厚肉かく分系の結合および直軸分系とアーム部の結合面の角変位の適合性をはかる。

表 6 に実験、区分モード合成法（CMS）および剰余コンプライアンス行列を用いる方法で求めた固有振動

数を示す。CMS では、採用モード数の採り方はあまり気にする必要はなく、ただ解析周波数域を十分含むように少し多めにしておけば安心なので、採用モード数はすべての分系について 10 とする。

剰余コンプライアンス行列を用いる方法では、すべての分系単体の解析に際して周辺自由境界条件となるので、剰余コンプライアンス行列の計算には、著者らの提案した方法を用いる。このクランク軸の解析に限らず、解析対象物を分系に分割するとほとんどの分系は周辺自由境界条件になる。そこで、Hansteen の方法よりも著者らの方法の方が用いられる機会が多い。

直軸分系の採用モード数は 6（剛体モード）とする。この分系単体の周辺自由境界条件下での 1 次の弾性振動固有振動数は解析対象周波数よりはるかに高いので、精度の良い剰余コンプライアンス行列を用いれば剛体モードのみの採用で十分精度良い解が得られるからである。さらに、そのような極端に高い周波数成分を採用モードに含めると、全系に統合した一般化座標

上での方程式を解く時、数値計算上発生する誤差が大きくなる。他の分系（アーム部とフライホイール部）の採用モード数は6, 10, 20の三とおりにする。

表6をみると、三者の結果は互いによく一致している。剛体モードのみの採用モードの場合の結果は13次以上で精度が急に悪化しているが、この原因はアーム部とフライホイール部の分系の採用モードが不十分なためである。

図7には、図6に示す点FをX方向に励振した時の点FのX方向の応答の伝達関数を示す。破線が実験結果、実線がCMSと剰余コンプライアンス行列を用いた方法（採用モード数6, 20の場合）の結果である。両計算結果はグラフ上では区別がつかないほどよく一致している。なお、剰余コンプライアンス行列を用いない方法は、基礎検討で一体構造物の解析には適さないことがわかったので、本報のクランク軸に適用しない。

5. 計算時間の比較

すべて解析プログラムは著者作成のものを使用したもので、プログラミングの技術レベルは同一のものであり、計算時間を比較すれば解析方法自体の効率を比較することになる。

5.1 平板モデル モデルの幾何学的対称性は考慮せず計算した。表1において、CMSでは6.38 s、有限要素法での一体計算は10.13 s、剰余コンプライアンス行列（従来の方法使用）を用いる方法では左側から7.70, 7.77, 9.82, 16.41, 7.85, 10.69 sであった。一方、表2に示す計算では、左側から11.96, 13.55, 14.59 s、採用モード数30で対称性を考慮すると8.19 sであった。表4の計算では、左側から4.50, 7.27,

12.08, 24.44 sであった。

5.2 クランク軸・フライホイール系 1次から20次までの固有振動数と固有モード、さらに0 Hzから2500 Hzまでの5 Hzごとの伝達関数（複素計算）を求めるのに、CMSでは97.48 sであり、剰余コンプライアンス行列を用いる方法では、表5の左側の計算から181.66, 184.58, 195.04 sであった。

5.3 比較 計算時間のみの比較では、剰余コンプライアンス行列を用いない方法がいちばん速く、次にCMS、そして剰余コンプライアンス行列を用いる方法の順になる。しかし、計算精度を考慮しながら比較すると、CMSが最もよく、次は剰余コンプライアンス行列を用いる方法である。

6. 結 論

3種類のモード合成法について基礎的な比較検討を行った。さらに、実機のクランク軸・フライホイール系の解析を試みた。

そして、以下のことがわかった。

(1) 不拘束モード形の解法では、剰余コンプライアンス行列の精度が解析精度に大きく影響する。

図6 クランク軸・フライホイール系

図7 伝達関数（励振点：F，応答点：F）

表6 クランク軸・フライホイール系の固有振動数

		CMS	MBBA with Residual compliance matrix*		
Number of adopted modes of shaft-substructures		10	6	6	6
Number of adopted modes of the other substructures		10	6	10	20
order	Experiment				
1	200	203	203	203	203
2	245	258	258	258	258
3	425	401	402	401	401
4	513	500	500	500	500
5	541	539	539	539	539
6	694	664	667	665	664
7	907	859	862	861	859
8	1086	1139	1142	1141	1139
9	1131	1102	1110	1102	1102
10	1352	1354	1356	1356	1355
11	1674	1688	1694	1692	1688
12	1714	1484	1589	1485	1481
13		1743	2200	1734	1734
14		1748	2233	1734	1734
15	2084	2191	2499	2195	2192
16	2300	2181	3066	2182	2178
17	2683	2492	3604	2497	2493
18	3278	3044	3851	3048	3043

* The residual compliance matrix is calculated by the authors' proposed method. Hansteen's can not be used because all substructures are on free-free boundary condition.

(2) 従来の方法により求めた剰余コンプライアンス行列を用いると、解析精度が悪い。

(3) 剰余コンプライアンス行列の計算には、Hansteenの方法と著者らの方法が有効である。実際の解析ではほとんどの分系は周辺自由境界条件となる。このような場合には、Hansteenの方法を使用できず、著者らの方法だけが有効である。

(4) 剰余成分の影響は低次周波数域にまで及ぶ。

(5) 剰余コンプライアンス行列を用いない方法では、分系同士が柔らかく結合している系に関しては精度良い解を得られるが、剛結合の系では精度が悪化する。しかし、区分モード合成法と剰余コンプライアンス行列を用いる方法では、剛結合の系も精度良く解析できる。

(6) 区分モード合成法は拘束モード形の解法なので、曲線適合で求められる実験データ(モード特性)を利用するのは難しい。しかし、他の2方法は不拘束モード形なので、可能である。実験データを使用する場合は、精度の観点から剰余コンプライアンス行列を用いる方法がよい。

(7) 実機のクランク軸・フライホイール系の振動

解析を、区分モード合成法と剰余コンプライアンス行列を用いる不拘束モード形の方法で試みた。それらの計算結果は、実験結果と実用的に十分な精度で一致した。

(8) 計算速度と計算精度の両者を考慮に入れて判断すると、区分モード合成法が三者の中でいちばん良い。

文 献

- (1) 長松, 日本機械学会第574回講習会資料, (昭59-5).
- (2) 長松・大熊, 機論, 46-407, C (昭55), 703.
- (3) 長松・長池, 機論, 48-433, C (昭57), 1380.
- (4) 長松・ほか4名, 機論, 48-432, C (昭57), 1129.
- (5) 長松, 日本機械学会関西支部第123回講習会資料, (昭59), 37.
- (6) 大熊・長松, 機論, 49-443, C (昭58), 1120.
- (7) 大熊・長松, 機論, 50-450, C (昭59), 260.
- (8) 大熊・長松, 機論, 49-446, C (昭58), 1876.
- (9) 大熊・長松, 文献(6)の1883ページ.
- (10) 大熊・長松, 機論, 50-457, C (昭59), 1563.
- (11) Hansteen, O. E., *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, 7-405 (1979), 405.
- (12) 長松, 日本機械学会第535回講習会資料, (昭57), 1.

討 論

〔質問〕 中 村 友 道

〔三菱重工業(株)高砂研究所〕

各種の解法を簡明に整理されており参考になった。

(1) 表3の解釈として、剰余コンプライアンス行列はすべて求めるべきであるとされているが、極端に精度を要求される場合以外は、一般にはこの程度一致していれば十分であると考えられるのではないか。

(2) CMS法によれば式(5)と式(8)の2回固有値解析の必要があり、不拘束モード合成法では式(16)の1回だけで済む。一般に計算時間は固有値解析部分で支配されるように思うが、CMS法のほうが短い計算時間になっている。部分構造モードの計算時間など各ステップごとの計算時間で比較すればどのようなか。

〔回答〕 (1) 本解析対象モデルにおいて表3に示す設定条件では実用上十分な精度の解を得ているともいえる。しかし、表2の結果の精度と表3の結果の精度を比較すると精度悪化はかなり大きいといえると思う。そこで、できれば剰余コンプライアンスをすべて考慮したほうがよいと思う。ただし、実用上の精度評価基準は個々の場合で異なるから、この点は適宜判

断していただきたい。

(2) 著者の作成したプログラムにおいては、固有値解析と逆行列の計算部分が計算時間の多くを消費している。本報における剰余コンプライアンス行列を用いる不拘束モード合成法による解析では、式(9)の剰余コンプライアンス行列を解析的に求めているので逆行列の計算を行っていないし、式(13)および式(16)の作成段階でも逆行列の計算を行っていない。そのためにCMSのほうが計算時間が短い。

〔質問〕 藤 川 猛・頭 井 洋

〔(株)神戸製鋼所〕

(1) 図2のような平板の曲げ振動の場合、回転ばねを板の曲げ剛性で評価すれば、図2Bのモデルにも剰余コンプライアンスを用いない非拘束モード法も適用可能と思われるが、そのような検討はされていないのか。

(2) 質問(1)に関連して、表4あるいは表5において回転の結合ばねをどのようにして求められたのかご教示願いたい。

〔回答〕 (1) その検討は行っていない。ただし、別の機会に同じような検討を簡単に行ったことはあ

る。それによると、たしかに回転ばねで板の結合部の曲げ剛性を評価することはできるが、理論的には剛結合を実現するためにはそのばね定数は無限大の値にすべきである。ところが、具体的な数値計算では他の剛性値と大きくけたの違った値を方程式に含ませては正しい答を得ることができない。通常は他の剛性(板の内部領域)の値の 10^3 倍程度の値を回転ばねのばね定数として用いれば、ほぼ剛結合となるようである。この値の目安は対象の系によって多少変化するものであり、いわゆるノウハウが必要である。今回の報告は基本的な検討を目的としており、そのような検討は行わなかった。

(2) 図2の(c)に示すように、分系1と分系2の間に結合点のみから構成される結合分系を用いている。すなわち、この曲げ剛性が結合ばねの役割をはたしている。このように結合分系を有限要素法などで定式化して求めれば、回答(1)中で述べたような回転ばねの不確かな値を用いなくて済む。

〔質問〕 太田 和 秀

〔三菱重工業(株)長崎研究所〕

剰余コンプライアンス行列を用いれば、計算精度はかなりよくなっているが、実験的に剰余コンプライアンス行列を精度よく求める方法についてご教示願いた

い(特にモーメント加振について)。

〔回答〕 実験的に精度よい剰余コンプライアンス行列を得るには、高解析精度の適切な曲線適合を用いてモード特性を抽出する。その際、結合領域内の測定点はすべて励振点としたデータを用いる必要がある(同時多点励振の必要はない)。

モーメント加振と回転角変位測定に関しては現時点ではひじょうに困難であり、今後の研究開発に期待せざるを得ないと感じている。

〔質問〕 本 田 巖

〔三菱重工業(株)長崎研究所〕

表6中の13次、14次モードは、実験で固有振動数が記入されていないが、計測できなかったモードなのか、それともダミーの共振点なのか。

もし、ダミーの共振点であれば、そのように判断された理由をおきかせ願いたい。

〔回答〕 13次、14次のモードはクランク軸上での計測で検出できなかったものであり、ダミーの共振点ではないと思う。計算によるモード形をみるとフライホイール部が主に振動しているモードであり、測定は軸部分を主に行ったために検出できなかったようである。