多自由度非線形系の周波数応答解析*

渡部 和**, 佐藤 壽 芳***

Frequency Response Analysis for Nonlinear Multi-Degrees-of-Freedom System

by Kazushi WATANABE and Hisayoshi SATOH

An analysis method for frequency response of multi-degrees of-freedom vibration system is proposed. In spite that practical structural systems have nonlinear element and experimental results of the vibration test for such systems show the evident nonlinear characteristics, the analytical approaches which have been used so far regarded the system as linear system. In this investigation quasi-linear functions are adopted for the nonlinear elements, and the frequency response was obtained for three-degrees-of-freedom system with three hardening stiffness. The result shows good agreement with those by time historical analysis which spends 600 times of the computation time as that of the proposed method.

Key Words: Dynamics of Machinery, Frequency Response, Nonlinear Vibration, Multi-Degrees-of-Freedom-System, Describing Function

1. 緒 言

工作機械や一般の機械構造物の動的な剛性評価の手段としては、正弦波加振による周波数応答解析がなされている。周波数応答解析は有限要素法やモーダル解析、最近ではビルディング・ブロック法などの手段が使用されている。これらの手法は動的解析に関して、大半は線形系を対象にしている。

一方実機の構造物が一体の連続体で構成されていることはまれであり、種々の接合部を有している。この接合部は厳密には非線形性を有しており、減衰や応答の加振力依存性などについては線形解析では対応できない。

非線形系に関する従来の研究は古くから位相面解析による方法があり、これは安定性の傾向もグラフで判断できるが、多自由度非線形系に対する適用は難しい。他の解析的手法としては、非線形性の小さい系に対して適用される摂動法⁽¹⁾や平均法⁽²⁾などがある。また非線形性の大きい系に対しては Ritz-Galerkin 法⁽³⁾

がある。分数、倍数調波振動を求める時には調和バランス法⁽⁴⁾などがある。また非線形自動制御では基本波に着目した記述関数法⁽⁵⁾がある。これらの解析手法は1自由度系に対する解析を主としており、多自由度系に対する展開はあまり見られていない。

現在使用されている多自由度非線形系の応答解析法に、微分方程式の直接積分法による時刻歴応答解析がある。これは耐震構造設計等にしばしば利用されているが、この方法は時間領域の解析であるために周波数応答解析を行うには莫大な計算時間を必要とする。

このような観点から、実用的な多自由度非線形系の周波数応答解析法の開発が望まれており本研究に着手した。

本研究では基本周波数成分に着目した非線形要素を等価伝達関数(記述関数)に置き換えることによって準線形化し、数値計算により解析する方法を示した。

本方法の検証手段として、1自由度非線形系の厳密解との比較と、3自由度非線形系における時刻歴応答解析との比較検討を行った。この結果本方法は近似解法ではあるがよい近似を与えることが判明した。

記 号

 m : 質量

* 昭和60年4月2日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月31日。

** 正員、日立精工(株) (〒243 海老名市上今泉2100)。

*** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

$f(x, \dot{x})$: 減衰と剛性の関数

x : 変位

F : 外力

A : 振幅

f_k : バネの復元力

ω : 周波数

$\Delta\omega$: 周波数の刻み幅

$G_N(A)$: 等価伝達関数

$G_{NH,i}$: 非線形要素 i における等価伝達関数の上限

$G_{NL,i}$: 非線形要素 i における等価伝達関数の下限

$[\bar{K}]$: 非線形剛性マトリックス

$[M]$: 質量マトリックス

$[C]$: 減衰マトリックス

$\{X\}$: 変位ベクトル

$\{P\}$: 荷重ベクトル

j : 虚数単位

2. 周波数応答解析

2.1 非線形要素の等価伝達関数 非線形系の正

弦波加振による運動方程式は式(1)で示される。

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = Fe^{j\omega t} \quad (1)$$

式(1)の周期解は式(2)のようにフーリエ級数で表すことができる。

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n e^{jn\omega t} \quad (2)$$

非線形系に生じる復元力は式(3)となる。

$$f(x, \dot{x}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n g_n e^{jn\omega t} \quad (3)$$

g_n は基本波と高調波成分における複素数で表されたゲインである。基本波の応答に注目すれば、基本波に関する項 g_1 のみを採用し、等価伝達関数として解を求めてもよい近似値を与える。 g_1 を G_N とした等価伝達関数の概念を図1に示す。この等価伝達関数は非線形自動制御の分野では記述関数となっている。この等価伝達関数は位相遅れのない剛性の非線形性のみならず、位相遅れを伴う過去の履歴にも依存する系にも適用できる。

図2で示された非線形バネについて具体的に G_N を求める方法を説明する。非線形バネの入力として $x = A \sin \omega t$ の変位がある時の出力としての復元力 f_k は式(4・a), (4・b), (5・a), (5・b), (6・a), (6・b)で表される。 C_1, C_2 は直線の正接である。

$$0 < \omega t < \sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) \quad (4\cdot a)$$

$$f_k(t) = C_1 A \sin \omega t \quad (4\cdot b)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) \leq \omega t \leq \pi - \sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) \quad (5\cdot a)$$

$$f_k(t) = C_2 A \sin \omega t + x_0(C_1 - C_2) \quad (5\cdot b)$$

$$\pi - \sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) < \omega t \leq \pi \quad (6\cdot a)$$

$$f_k(t) = C_1 A \sin \omega t \quad (6\cdot b)$$

復元力 $f_k(t)$ のフーリエ変換を実数形で書くと式(7)になり、その係数は式(8), (9)で示す。

$$f_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) \cos n\omega t d(\omega t) \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t) \sin n\omega t d(\omega t) \quad (9)$$

この場合 $f_k(t)$ は1価の奇関数であるから $a_n = 0$ である。 $n=1$ として等価伝達関係 G_N を求めると式(12), (13)になる。

$$u = \frac{x_0}{A} \quad (10)$$

$$k(u) = \frac{2}{\pi} \{ \sin^{-1}(u) + u\sqrt{1-u^2} \} \quad (11)$$

として

$$G_N(A) = \frac{b_1}{A} \quad (12)$$

$$G_N(A) = C_2 + (C_1 - C_2)k(u) \quad (13)$$

図3の非線形バネの場合には等価伝達関数は式(14)となる。

図1 非線形要素の等価伝達関数の概念

図2 折線で構成された非線形バネ

図3 $f_k = ax + \beta x^3$ 形非線形バネ

$$G_N(A) = \alpha + \left(\frac{3}{4}\right)\beta A^2 \quad (14)$$

このように等価伝達関数なる概念は $f(x, \dot{x})$ が時間領域の伝達特性を表すのに対して周波数関数領域での伝達特性を表す。これにより運動方程式を準線形系として解くことが可能となる。

2.2 非線形系の周波数応答解析 1自由度系でバネ定数 $\bar{k}$ が非線形の場合を考える。運動方程式は式(15)となるが、 $\bar{k}$ の等価伝達関数 G_N を使用して書く式(16)となる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \bar{k}x = f(t) \quad (15)$$

$$(-\omega^2 m + j\omega c + G_N(A))Ae^{j\varphi} = F \quad (16)$$

ただし、

$$f(t) = Fe^{j\omega t} \quad (17\cdot a)$$

$$x = Ae^{j(\omega t + \varphi)} \quad (17\cdot b)$$

において $G_N(x)$ を線形項で表すと式(18)になる。

$$G_N(A) = m\omega^2 \pm \sqrt{(F/A)^2 - (\omega c)^2} \quad (18)$$

式(18)とフーリエ変換して求めた式(13)、(14)を等しく置くことにより解が得られる。図4に式(18)、式(13)のグラフの交点を解として示す。A₁、A₂、A₃の振幅は非線形振動特有の跳躍現象を示す解である。

多自由度系の場合は、有限要素法などで離散化する。運動方程式は式(19)となる。 $[\bar{K}]$ は非線形剛性マトリックスである。

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [\bar{K}]\{X\} = \{P\} \quad (19)$$

$[\bar{K}]$ を構成する個々の要素を等価伝達関数で置き換えて準線形化し、これを $[K_{GN}]$ において解を求める。

$$\{X\} = \{V\}e^{j\omega t} \quad (20)$$

$$\{P\} = \{F\}e^{j\omega t} \quad (21)$$

とおくと式(19)は式(22)となる。

$$[[K_{GN}] - \omega^2[M] + j\omega[C]]\{V\} = \{F\} \quad (22)$$

$$[D]\{V\} = \{F\} \quad (23)$$

$$\{V\} = [D]^{-1}\{F\} \quad (24)$$

表1 定数表

m	c	k	β	F ₀
1	0.06	1	0.1	0.15
kg	N·s/m	N/m	-	N

図4 等価伝達関数を用いた解の説明

図5 非線形周波数応答

$[D]$ は準線形化した動剛性マトリックスであり、 $\{V\}$ は式(24)となる。

$[K_{GN}]$ は振幅 $\{V\}$ の関数となるので、式(22)は代数的な非線形連立方程式となる。したがって式(24)を1回計算するだけでは解は得られず、式(22)に直接ニュートン・ラプソン法を適用するか、仮定した $[K_{GN}]$ を初期値として式(24)を解き逐次解を収束させる方法などが考えられる。ニュートン法を実際に1自由度系に適用すると解は収束するが共振点で解が不安定になるので工夫が必要である。

今回数値計算で使用した方法は後者の方法で解の発散をチェックしながら2分法により解を収束させていく方法を採用した。この方法によれば、共振点においても発散することなく、確実に解が得られる。図6にその手順を示す。

3. 数値計算例と検討

3.1 1自由度非線形系の周波数応答解析 等価伝達関数で非線形を準線形化した場合の計算精度を確認する意味で、厳密解⁽⁶⁾が求められている図3に示す非線形バネを有する1自由度系について、周波数応答を計算した。運動方程式は式(25)で示され、定数は表1のとおりである。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = F_0 \sin \omega t \quad (25)$$

図6 多自由度非線形の周波数応答解析手順

等価伝達関数を使用した周波数応答の計算結果を図7に示す。

この場合の計算結果を、 x/F_0 の周波数応答として図7(a)に示した。図7には実部、虚部の特性もあわせて示している。図7の ω において、加振周波数を増加していく場合に応答が $P_1 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow R$ の経路をた

(a) コンプライアンス

(b) 実部

(c) 虚部

(d) 複素平面表示

図7 非線形系の周波数応答 ($f_k = kx + \beta x^3$)

どり、減少していく場合には、 $R \rightarrow N_2 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$ の経路をたどる非線形特有の跳躍共振現象も、等価伝達関数で計算できていることがわかる。図7(c), 虚部の特性は、線形の場合と同様、同図(a)の応答の特性から推定できる形といえるが、同図(b)の実部の特性は、線形系の場合と全く異なった形状となっている。図中黒丸は厳密解であるが、図の上では完全に本方法の解と一致している。同図(d)には、(b), (c)を合わせ複素面上の軌跡を示しているが、 $N_1 \rightarrow N_2$ の跳躍現象に対応し、一部に弦のように直線部が生じている。表2は厳密解との比較を数値で示すが、誤差は最大でも0.13%程度であり極めてよい近似を与えている。

同様な計算は、図2に示す折線で構成された非線形バネを有する1自由度振動系についても可能である。

3.2 多自由度非線形系の周波数応答解析 図8に示す3自由度非線形振動系を例として考え、本手法によって計算を行った。非線形バネの形は図2に示す。計算に使用した定数を表3に示す。

図9, 図10, 図11に1非線形バネ形, 2非線形バネ形, 3非線形バネ形の周波数応答を示す。計算は加振周波数 ω を零から3 rad/sに増加させていく場合

表2 等価伝達関数法と厳密解の振幅比較

Frequency (rad/s)	Exact (m)	Equivalent T.F. (m)	Error (%)
1.05	1.53654	1.53654	0
1.13	2.02294	2.02290	2.0×10^{-3}
	1.72095	1.72090	2.9×10^{-3}
	0.57448	0.57449	-1.7×10^{-3}
1.16	2.15394	2.15346	0.022
	2.09277	2.09000	0.132
	0.44368	0.44372	-9.03×10^{-3}
1.19	0.36372	0.36375	-8.25×10^{-3}

表3 計算に使用した定数 (KN/m)

Nonlinear Type	$\tilde{k}_1$ N/m	$\tilde{k}_2$ N/m	$\tilde{k}_3$ N/m
1 Nonlin. Spring	$^3C_1=1, C_2=2$	$k=1$	$k=1$
2 Nonlin. Springs	$^3C_1=1, C_2=2$	$^3C_1=1, C_2=2$	$k=1$
3 Nonlin. Springs	$^3C_1=1, C_2=2$	$^3C_1=1, C_2=2$	$^3C_1=1, C_2=2$
$m_1=1\text{kg}, C_1=0.01\text{kgs/m}, F_3=1\text{N}, X_0=1$			

(*は図2の非線形バネを示す)

図8 3自由度非線形系

と逆に3から0 rad/sに減少させていく場合について行った。 ω を増加していく場合には、 $\omega - \Delta\omega$ における等価伝達関数を初期値として図6に示す収束計算をすすめた。一方 ω を減少していく場合は、 $\omega + \Delta\omega$ における等価伝達関数を初期値にしている。これによって収束計算の時間を節約する一方、周波数の増加、減少に対応する周波数応答をたどれるようにしている。

図9に示す1非線形バネの系では、2次の共振周波数に跳躍現象がみられる。図10に示す2非線形バネ形、図11に示す3非線形バネ形では3共振周波数とも跳躍現象がみられた。3次の共振周波数の応答は、 ω を減少していく場合の応答のほうが、 ω を増加する場合の応答より大きくなる周波数領域がみられる点で特徴的である。

表4にバネ定数を $k_i=1$, $k_i=2$ と線形とした場合と、これを組合せて非線形とした場合について、 $F=1$ Nとして共振周波数を比較している。この場合は k が等価的に $k=1$, $k=2$ の間にあると考えられ、したがって共振周波数も線形系の中間の値になっていることがわかる。

図12に非線形バネの系と線形の振動モードを示すが、この計算例では、共振周波数の変化が大きい割には線形の場合とほぼ同様な振動モードになっている。

図13に3非線形バネの系と線形系（すべてのバネ $k_i=1$ ）について加振力を増加させた場合の応答を示す。各々の共振周波数は入力 F の大きさに対応して顕著に変化している。

これらの多自由度非線形系については厳密解を得ることができないので、上記の非線形系の中で最も複雑な場合として、図11の周波数応答を検証するために、直接積分法による時刻歴応答解析を実施した。

周波数応答を得るために正弦波の荷重による応答をNewmark- β 法⁽⁷⁾により計算した。応答の振幅は基本波成分以外の高調波成分に含むため、外力と応答をそれぞれフーリエ変換して、基本調波について応答と位相を求めた。非線形系に対する時刻歴応答解析は、時間刻みを極端に小さくしても数値計算の誤差が大きくなる場合もあり、試行錯誤により各区分における時間刻み幅を決めた。基本的には最高次モードの周期の1/50~1/200にしている。

この結果を図11に示すが、すでに求めている周波数応答によく一致している。3次の共振周波数の近傍においては、山頂が時刻歴解析によっては求められていない部分があるが、これは時刻歴応答解析における数値計算上の不安定性による誤差が一因とも考えられ、本方法も含め今後の検討課題である。

表4 共振周波数の比較 (rad/s) $F=1$ N

Vibration Model	1 st	2 nd	3 rd
Linear All $k_i=1$	0.445	1.247	1.802
Linear All $k_i=2$	0.629	1.760	2.550
3 Nonlinear-Springs	0.627	1.729	2.307

図9 1非線形バネ形周波数応答

図10 2非線形バネ形周波数応答

図11 3非線形バネ形の周波数応答と時刻歴応答解析による解の比較

図 12 3 非線形バネ形振動モード

図 12 に示す結果では非線形バネが 3 個あるので今回の試算では最も収束に時間を要した。0~3 rad/s の間を 500 分割した ω_i に対し、各々の応答の計算をしたが、平均収束回数は各 ω_i に対し約 5 回であった。1 回の ω_i に対し、本方法の計算時間と時刻歴応答解析による計算時間を比較した結果が表 5 である。計算機は HITAC-M 160 II を使用した。

今回の試算例では、等価伝達関数を使用した方法は時刻歴応答解析に比較して約 1/600 の計算時間で解析が可能であった。時刻歴応答解析は時間刻み幅やプログラムを改良することにより上記より早くなることが考えられるが、ひとけた早くなることはないし、さらに自由度が大きくなるとこの差は大きくなるとみてよく、多自由度非線形系の振動解析における本方法の非常に有効なことが明らかである。

4. ま と め

機械や機器の性能向上を意図して、モーダル解析を始めとする各種の振動解析に盛んに行われ、非線形振動についても優れた基礎的な研究がなされていたにもかかわらず、随所に非線形特性を含む多自由度非線形系とみられる実際の構造物の振動解析についてはこれを線形として扱う手法のみが用いられてきた。本研究ではこれに関する最も基礎的な研究として、等価伝達関数を各非線形要素に用いて多自由度非線形系の周波数応答が求められることを明らかにした。結果は以下のように要約される。

(1) 非線形要素の出力として基本波成分を与える等価伝達関数を用いて硬性バネの 1 自由度系について周波数特性を求め、厳密解と比較してよい結果が得られることを示した。この際周波数応答の実部が線形の

表 5 計算時間の比較

(A)	Equivalent T.F.	0.289 S
(B)	Time History Response	182.8 S
A / B		1/598

図 13 加振力を変えた場合の周波数応答

場合と全く変わった形を示すこと、複素面上の軌跡に跳躍現象を対応した弦の部分が生じることを指摘した。

(2) 3 自由度系に本研究の方法を適用し、周波数応答が求められることを明らかにした。一方時刻歴応答の基本波成分を求めてこれと比較し、入力振動数の掃引方向によって生じる 2 価の特性を含め互いによく一致することを示した。

(3) 3 自由度系について求められた周波数応答からは、低次から高次までの共振振動数が加振力の大きさによって変化する状況が明らかである。また共振振動数が顕著なほどには振動モードは変化していない。

この時に時刻歴応答に比べて非常に短時間で求められることも本方法の大きな特徴である。

研究の遂行、論文のとりまとめに東大生研・佐藤研究室の各氏に助力を得たことに感謝する。

文 献

- (1) 清水, 非線形振動論, (昭 40), 18, 培風館.
- (2) David, e. Gilsinn, A hight oder generalized mehodt of averaging, Sim. J. Appl. Math., 42-1(1985).
- (3) Cunningham, w. J, Introduction to Nonlinear Analysis, (1958), 32, McGraw Hill Co.
- (4) 前沢, 非線形微分方程式, (昭 44), 48, ダイアモンド社.
- (5) Gibson, J. E., 非線形自動制御, (昭 54), 391, コロナ社.
- (6) 入江, 機械振動論, (昭 44), 152, 朝倉書店.
- (7) 川井, マトリックス法振動および応答, (昭 46), 81, 培風館.

討 論

〔質問〕 長 松 昭 男〔東京工業大学工学部〕

今までほとんど手がつけられていなかった非線形系の周波数応答の計算に対し、新たに有益な知見を加えられていることに対し、敬意を表す。

(1) 図2と図3はともに原点对称の非線形であるが、片あたりのような、左右非対称の場合にも同じ等価線形化法が適用できるか。

(2) 貴論文での収束回数は、最大でも平均5回程度とよいようであるが、非線形の自由度は少なくとも、実際の構造物のように全体が数百自由度程度の有限要素解析でも、このように少ない反復回数で収束するのか。また、発散の可能性は少ないのか。

〔回答〕 (1) 非対称形の非線形の取扱いについては検討課題と考えている。本論文で扱った等価伝達関数は非線形要素の入力に対する出力の交流成分しか考慮していないが、非対称形の非線形の場合には、直流成分をも考慮することにより可能であると思われる。

(2) 数百自由度まではまだ実際に計算していないので平均収束回数がどの程度になるかはわからない。非線形の自由度を増加すると収束は悪くなる傾向にある。実際の構造物では全自由度が非線形である場合は少なく、種々の接合部で非線形の場合が多い。その場合非線形の自由度は全自由度の10~20%程度であるとする、本方法とBBなどを併用すれば、かなり少ない自由度で周波数応答計算が可能になると考える。発散については、今回採用している方法は等価伝達関数の上限、下限を決めて収束計算をしているので、解の発散は少ないと考える。

〔質問〕 原 文 雄〔東京理科大学工学部〕

(1) 貴論文での等価伝達関数における等価とは何か。また準線形化するの準線形とは何か。

(2) 図1で G_N が非線形要素の伝達関数とすると、 $e^{j\varphi}$ は実は G_N の内に含まれるのではないか、それとも何か特別の意味があるのか。

(3) 式(16)の G_N 以外の項は時間領域で決まる量であるが、 G_N は周波数領域で定義されるものと考えられ、両者が混在した方程式は正しいか。

(4) 式(18)を求めるとき、式(17・b)の位相角 φ はどのように処理されているか。

(5) 図4は横軸は ω でなく A ではないか。

〔回答〕 (1) 等価とは、非線形要素の正弦波入力に対する基本波の伝達関数を定義して非線形要素に置き換えることを意味する。本論文ではこの等価伝達

関数を使用して非線形系を扱うことを準線形化するとした。

(2) G_N を実数としたので $e^{j\varphi}$ を書いた。 G_N が複素数であれば $e^{j\varphi}$ を書く必要はなく、 $e^{j\varphi}$ の特別な意味はない。

(3), (5) ご指摘のとおり $G_N(X)$ は $G_N(A)$ の誤記であるので式(16)を

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + G_N(X)X = f(t)$$

から

$$(-\omega^2 m + j\omega c + G_N(A))Ae^{j\varphi} = F$$

に、図4の横軸は A と訂正させていただいた。

(4) 本論文では位相遅れがなく振幅の関数で表される非線形ばねについて数値計算をしたが、この場合には等価伝達関数を決定するパラメータとしては振幅の絶対値のみを考慮して計算している。 φ が問題となる場合は振幅と位相が最終的に解を満たすように収束計算する必要がある。

〔質問〕 清 水 信 行〔千代田化工建設(株)〕

(1) 多価非線形要素(例えば、ヒステリシマなど)を含む系に対しても適用可能か。

(2) 不規則入力に対する適用性の見通しについてお聞かせ願いたい。

(3) 非線形性の強さやタイプと(くり返しの)収束性の関係についてお教えいただきたい。特にアルゴリズム上や実際の適用上に問題はないか。

〔回答〕 (1) 本方法は多価非線形要素にも適用できる。

(2) 本論文では正弦波入力を対象としており、そのままでは不規則入力に対する適用は困難である。

不規則入力に関しては非線形要素を統計的に等価な線形要素に置き換える方法(付1)(付2)などが既に研究されており、これらの方法によってもある程度は取扱いが可能であると思われるが、これら従来方法の検討も含め今後の研究課題であると考えている。

(3) 一般に非線形性を強くすると収束の面で問題があるので、本論文ではその対策として発散を防止する意味で収束計算中に等価伝達関数の上限、下限の範囲をチェックしながら二分法により確実に収束させるような配慮をしている。今後実機へ応用し検討を行う予定であるが、基本的には本方法が使用できると考えている。

(付1) 榎木・添田, 統計的自動制御理論, (昭53), コロナ社。

(付2) 佐藤, 二つの卓越周期を有する模擬地震にたいする付加機器系の応答, 機論, 41-348(昭50), 2347-2354。