ラグランジュ乗数を用いたレーレー・リッツ法 による板の自由振動解析*

築地恒夫**, 山下 務***

A Free Vibration Analysis of Plates by the Rayleigh-Ritz Method Using Lagrange Multipliers

by Tsuneo TSUIJI and Tsutomu YAMASHITA

A method of analyzing free vibrations of plates with arbitrary shape and boundary conditions is proposed in this report. The procedure presented is based on the Rayleigh-Ritz method using Lagrange multipliers. The deflection of plates is expressed by a double power series of x and y . Since this function, in general, does not satisfy geometrical boundary conditions, the Lagrange multiplier method is applied to fulfill them. The strain and kinetic energies are evaluated by a single integral along the edge of plates. The theoretical values obtained are compared with exact values and test results. The comparison shows that the method proposed is useful to analyze the free vibration of plates with arbitrary shape and boundary conditions.

Key Words: Vibration, Free Vibration, Plate, Rayleigh-Ritz Method, Lagrange Multiplier

1. はじめに

力学的問題の数値解析法の一つであるレーレー・リッツ法は、従来から多くの研究者によって板の自由振動解析に適用され、その有効性が明らかにされている⁽¹⁾⁽²⁾。また、平板ばかりでなく、板状の構造物の振動解析にも応用されている⁽³⁾。

レーレー・リッツ法を用いる場合、まず問題となるのは、幾何学的境界条件を満たす解(一般に変位)をどのように仮定するかである。仮定した解が適切であれば、少ない計算で精度のよい結果が得られるが、すべての幾何学的境界条件を完全に満たす解を仮定することは、単純な問題を除き、一般に困難である。ただ、特別な場合として、凸多角形板に対しては、幾何学的境界条件を満たす変位として、次式が提案されている⁽⁴⁾。

$$w = (a_1x + b_1y + c_1)^{p_1} (a_2x + b_2y + c_2)^{p_2} \times \cdots \times (a_ix + b_iy + c_i)^{p_i} \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n$$

ここに、 w は板のたわみ、 $a_rx + b_ry + c_r = 0$ ($r=1, \dots, i$) は板の r 番めの辺の方程式、 A_{mn} は未知係数、

p_r ($r=1, \dots, i$) は r 番めの辺の幾何学的境界条件によって決まる定数で、 r 番めの辺が自由辺の場合は零、支持辺は1、固定辺では2となる。しかし、上記の変位関数を使用できるのは、次に示す板に限られる。

- (1) 凸多角形である。
- (2) 一辺上の境界条件は均一である。
- (3) 板の形が単純で、板全体にわたる二重積分が容易に計算できる。

このような制限があるため、現在、形状および境界条件が複雑な板の自由振動解析には、有限要素法が用いられている。しかし、有限要素法はその性質上高次振動までよい精度の解を得るためには、要素分割数を増すか、複雑な要素を用いねばならない。これに反しレーレー・リッツ法では、板の変位を一つの関数で表す

図1 板の座標軸

* 昭和60年6月1日 東海支部岐阜地方講演会において講演、原稿受付 昭和59年12月24日。

** 正員、長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町1-14)。

*** 長崎大学工学部。

ため、適切な変位関数を選ぶことにより、高次まで比較的精度のよい解を得ることができる利点がある。

そこで、本報告では、板の形状、境界条件に左右されないレーレー・リッツ法を提案し、二・三の問題に適用してその有効性を明らかにするとともに、使用上の注意事項にもふれることにする。

2. 解析に必要な基礎式

2・1 板の自由振動に関するはん関数 図1に示すように、 x, y 軸を板厚の中央面内に、 z 軸を x, y 軸に垂直に x, y 軸と右手系をなすように定める。また、板の周辺に沿って s 軸、 s 軸に垂直に板から外向きに n 軸を設ける。

板の z 方向微小変位を $w(x, y)$ とし、厚さ方向のせん断変形および回転慣性を無視すると、板の自由曲げ振動に関する汎関数 π は次のように書ける⁽⁵⁾。

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \iint_A D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy \\ & + \sum_{r=1}^m Q_r w(x_r, y_r) + \sum_{r=1}^m \int_0^{l_r} V_r(s) w ds + \sum_{r=1}^m \int_0^{l_r} M_r(s) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \alpha_r + \frac{\partial w}{\partial y} \beta_r \right) ds \\ & - \frac{1}{2} \iint_A \gamma h \omega^2 w^2 dx dy \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここに、 D は板の曲げ剛性、 ν はポアソン比、 γ は密度、 h は板厚、 ω は角振動数である。また、 m は辺の数、 l_r は r 番めの辺 (r 辺) の長さ、 α_r, β_r は r 辺の外向き法線方向余弦である。 Q_r はラグランジュ乗数、 V_r, M_r はラグランジュ乗数関数で s の関数である。式(1)の第1項は板の曲げひずみエネルギー、第2項は r 点 (X_r, Y_r) の変位を零とする拘束条件、第3項は r 辺上の変位零の条件、第4項は r 辺での n 方向のたわみ角を零とする拘束条件、最後の項は板の運動エネルギーである。したがって、使用変位関数が幾何学的境界条件を満たしていない場合、支持辺に対しては第2、第3項を、固定辺では第4項も合わせて使用する。

2・2 振動数方程式 解析の都合上、汎関数式(1)を次の方法に従って無次元化する。

$$\begin{aligned} \bar{\pi} = \pi/D, \quad W = w/a, \quad X = x/a, \quad Y = y/a, \quad \bar{A} = A/a^2, \quad \bar{s} = s/a, \\ L_r = l_r/a, \quad \bar{Q}_r = Q_r a/D, \quad \bar{V}_r = V_r a^2/D, \quad \bar{M}_r = M_r a/D \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 a は板の代表寸法である。式(1)は、

$$\begin{aligned} \bar{\pi} = & \frac{1}{2} \iint_{\bar{A}} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right\} \right] dX dY \\ & + \sum_{r=1}^m \bar{Q}_r W(X_r, Y_r) + \sum_{r=1}^m \int_0^{L_r} \bar{V}_r(\bar{s}) W d\bar{s} + \sum_{r=1}^m \int_0^{L_r} \bar{M}_r(\bar{s}) \left(\frac{\partial W}{\partial X} \alpha_r + \frac{\partial W}{\partial Y} \beta_r \right) d\bar{s} \\ & - \frac{1}{2} \lambda^2 \iint_{\bar{A}} W^2 dX dY \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 λ は板の自由振動固有値で次式で表される。

$$\lambda^2 = \frac{\gamma h a^4 \omega^2}{D} \dots\dots\dots (4)$$

板のたわみはいろいろな関数を用いて近似的に表すことができるが、本報告では、板の形に左右されず、取扱いが簡単な X, Y のべき級数を用いることにする。すなわち、

$$W = \sum_i \sum_j a_{ij} X^i Y^j = \sum_i \sum_j a_{ij} w_{ij} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $w_{ij} = X^i Y^j$ であり、 a_{ij} は未知係数である。

また、ラグランジュ乗数およびラグランジュ乗数関数は $\bar{s}$ のべき級数で表す。

$$\bar{Q}_r = b_r, \quad \bar{V}_r(\bar{s}) = \sum_{p=0}^{n_p} c_{rp} \bar{s}^p = \sum_{p=0}^{n_p} c_{rp} v_{rp}, \quad \bar{M}_r(\bar{s}) = \sum_{q=0}^{n_q} d_{rq} \bar{s}^q = \sum_{q=0}^{n_q} d_{rq} m_{rq} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $v_{rp} = \bar{s}^p$ 、 $m_{rq} = \bar{s}^q$ であり、 b_r, c_{rp}, d_{rq} は未知係数である。

汎関数 $\bar{\pi}$ の極値条件 $\delta \bar{\pi} = 0$ に、式(5)、(6)を代入すると、未知係数 $a_{ij}, b_r, c_{rp}, d_{rq}$ に関する次の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \sum_i^{n_i} \sum_j^{n_j} (F_{ij} - \lambda^2 G_{ij}) a_{ij} + \sum_{r=1}^m S_{ijr} b_r \\
& + \sum_{r=1}^m \sum_{p=0}^{n_p} T_{ijrp} c_{rp} + \sum_{r=1}^m \sum_{q=0}^{n_q} U_{ijrq} d_{rq} = 0 \\
& (I = \dots, n_i, J = \dots, n_j) \\
& \sum_i^{n_i} \sum_j^{n_j} S_{Rij} a_{ij} = 0 \quad (R=1, \dots, m) \\
& \sum_i^{n_i} \sum_j^{n_j} T_{RPIj} a_{ij} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} R=1, \dots, m \\ P=0, \dots, n_p \end{array} \right) \\
& \sum_i^{n_i} \sum_j^{n_j} U_{RQij} a_{ij} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} R=1, \dots, m \\ Q=0, \dots, n_q \end{array} \right)
\end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \iint_A \left[\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial Y^2} \right. \\
& + \nu \left(\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial X^2} \right) \\
& \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial X \partial Y} \right] dX dY \\
G_{ij} &= \iint_A w_{ij} w_{ij} dX dY \\
S_{ijr} &= X_{r1}^i Y_{r1}^j, \quad T_{ijrp} = \int_0^{L_r} w_{ij} v_{rp} d\bar{s} \\
U_{ijrq} &= \int_0^{L_r} \left(\frac{\partial w_{ij}}{\partial X} \alpha_r + \frac{\partial w_{ij}}{\partial Y} \beta_r \right) m_{rq} d\bar{s} \dots\dots\dots (8)
\end{aligned}$$

である.

式(7)より振動数方程式が次のように導かれる.

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda^2 B_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12}^T & 0 & 0 & 0 \\ A_{13}^T & 0 & 0 & 0 \\ A_{14}^T & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ここに, 0 は零マトリックス, マトリックス A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{14} および B_{11} の各要素は, 式(8)の F_{ij} , S_{ij} , T_{ij} , U_{ij} および G_{ij} によって計算される.

2・3 数値計算式 式(8)の二重積分および線積分は以下に示す方法に従って計算する.

まず, 二重積分の各項は一般に次のように書くことができる.

$$\begin{aligned}
& \iint_A \frac{\partial^{p+q} w_{ij}}{\partial X^p \partial Y^q} \frac{\partial^{p+q} w_{ij}}{\partial X^p \partial Y^q} dX dY \\
& = \iint_A \frac{\partial^p X^i}{\partial X^p} \frac{\partial^q Y^j}{\partial Y^q} \frac{\partial^p X^i}{\partial X^p} \frac{\partial^q Y^j}{\partial Y^q} dX dY \\
& = \frac{I!}{(I-p)!} \frac{J!}{(J-q)!} \frac{i!}{(i-p)!} \frac{j!}{(j-q)!} \\
& \times \iint_A X^{i+p-p} Y^{j+q-q} dX dY \dots\dots\dots (10)
\end{aligned}$$

式(10)の二重積分は部分積分することによって, 板の辺に沿った線積分に変形される. すなわち,

$$\begin{aligned}
& \iint_A X^M Y^N dX dY \\
& = \iint_A \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{X^{M+1}}{M+1} \right) Y^N dX dY \\
& = \sum_{r=1}^m \frac{\alpha_r}{M+1} \int_0^{L_r} X^{M+1} Y^N d\bar{s} \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

ここに $\bar{s}$ は点 (X_{r1}, Y_{r1}) から r 辺に沿った長さである (図2参照).

次に, 式(8)の線積分項は一般に,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_r} \frac{\partial^{p+q} w_{ij}}{\partial X^p \partial Y^q} \bar{s}^t d\bar{s} \\
& = \frac{I!}{(I-p)!} \frac{J!}{(J-q)!} \int_0^{L_r} X^{I-p} Y^{J-q} \bar{s}^t d\bar{s} \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

と書けるが, $t=0$ の場合には, 式(11)の線積分と同形となる. したがって, 式(12)の線積分が計算できれば, 式(8)の各係数の値がすべて求まることになる.

さて, 図2に示すように, r 辺の外向き法線方向余弦 α_r, β_r は r 辺の両端の座標 $(X_{r1}, Y_{r1}), (X_{r2}, Y_{r2})$ によって次のように表される.

$$\begin{aligned}
\alpha_r &= \frac{Y_{r2} - Y_{r1}}{L_r}, \quad \beta_r = -\frac{X_{r2} - X_{r1}}{L_r} \\
L_r &= \sqrt{(X_{r2} - X_{r1})^2 + (Y_{r2} - Y_{r1})^2} \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

方向余弦 α_r, β_r を用いると, r 辺上の任意点の X, Y 座標が

$$X = X_{r1} - \beta_r \bar{s}, \quad Y = Y_{r1} + \alpha_r \bar{s} \dots\dots\dots (14)$$

と書ける.

式(14)を式(12)に代入することにより, 線積分の被積分関数は $\bar{s}$ のみの関数となり, 容易に積分ができる.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_r} X^p Y^q \bar{s} d\bar{s} \\
& = \int_0^{L_r} (X_{r1} - \beta_r \bar{s})^p (Y_{r1} + \alpha_r \bar{s})^q \bar{s} d\bar{s} \\
& = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \frac{P!}{(P-i)! i!} \frac{Q!}{(Q-j)! j!} \\
& \times \alpha_r^j (-\beta_r)^i X_{r1}^{P-i} Y_{r1}^{Q-j} \frac{L_r^{i+j+R+1}}{i+j+R+1} \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

図2 方向余弦 α_r, β_r

式(10)～(15)を使用し、式(8)から振動数方程式(9)の全要素が決まると、板の自由振動固有値が式(9)から計算できる。しかし、式(9)は零要素が多く、複雑な境界条件の場合、解が安定して求まらないことがある。そこで、本報告では、ラグランジュ乗数、ラグランジュ乗数関数の独立変数の数だけ、たわみ W の未知係数 a_{ij} を消去し、縮小した振動数方程式を用いた。

以上に示すように、本法は、ラグランジュ乗数法によって幾何学的境界条件を満たし、板の周辺に沿った線積分によってエネルギーを算定するため、板の形、境界条件のいかんにかかわらず適用できる振動解析法である。

3. 解 析 例

以下、4種類の板の自由振動解析を行い、厳密解または実験値と比較し、得られた結果の妥当性を検討する。

板の変位 W は X, Y の双 n 次多項式を基本とし、問題に応じ二、三の項を増減した関数で仮定する。ポアソン比は 0.33 とする。

図 3 周辺支持長方形板

表 1 周辺支持長方形板の振動固有値

Mode	No.	Present method	Exact
X: Sym. Y: Sym.	1	3.5640	3.5640
	2	12.337	12.337
	3	23.303	23.303
	4	29.947	29.883
X: Sym. Y: Anti-sym.	1	6.8539	6.8539
	2	20.014	20.014
	3	26.593	26.593
X: Anti-sym. Y: Sym.	1	10.996	10.996
	2	19.739	19.739
X: Anti-sym. Y: Anti-sym.	1	14.256	14.256
	2	27.416	27.416
Number of terms	$\bar{W}$	28	
	$\bar{Q}_2$	1	
	$\bar{V}_{2,3}$	5, 4	

3.1 周辺支持長方形板 図 3 に示す周辺支持長方形板の振動固有値を厳密解と比較して表 1 に示す。この問題は、 X, Y 軸が対称軸となるため、 X, Y 軸に関して対称振動、逆対称振動に分けて解析した。図 3 の斜線部が解析対称領域である。辺①、④の幾何学的境界条件は仮定変位関数で満たすことができ、したがって、辺②、③での変位零と点 3 の変位零の条件を、ラグランジュ乗数関数およびラグランジュ乗数を用いて満足させればよい。

解析に用いたたわみ関数 W の項数は表 1 に示すとおり 28 項、辺②、③のラグランジュ乗数関数の項数は 5, 4 である。

このような単純な形状、境界条件の場合には精度のよい解が求まることが表 1 からわかる。なお、解の収束は固有値の変化および幾何学的境界条件がどの程度満たされているかによって判定する。

3.2 周辺固定平行四辺形板 座標軸と平行でな

図 4 周辺固定平行四辺形板

表 2 周辺固定平行四辺形板の振動固有値

No.	α°	0	15	30	45
1	A	27.01	28.75	34.98	50.68
	B	27.01	28.74	35.01	50.79
2	A	41.71	43.75	50.95	69.15
	B	41.72	43.74	51.04	69.19
3	A	66.13	69.86	75.74	97.03
	B	66.14	68.29	75.94	96.62
4	A	66.58	70.67	87.06	128.2
	B	66.55	70.77	87.45	124.4
5	A	79.81	86.03	103.2	141.1
	B	79.85	85.87	105.7	135.2
6	A	101.0	100.8	107.2	146.9
	B	100.9	99.1	106.2	151.0
Number of terms	$\bar{W}$	28	35	42	39
	$\bar{Q}_{3,4}$	1	1, 1	1, 1	1, 1
	$\bar{V}_{2,3,4}$	4, 4	3, 4, 3	3, 4, 3	3, 4, 3
	$\bar{M}_{2,3,4}$	4, 4	3, 4, 3	3, 4, 3	3, 4, 4

A: Values by present method, B: Values by Durvasula

い辺をもつ板の例として、図4に示す周辺固定平行四辺形板の振動解析を行う。振動は原点に関して点対称・点逆対称となるため、これを考慮した変位関数を用いた。ただ、 $\alpha=0^\circ$ の長方形板に対しては、3・1節と同様、 X 、 Y 軸に関して対称、逆対称に分けて解析した。得られた固有値を Durvasula⁽⁶⁾の解析結果と比較して表2に示す。解析に使用した変位関数 W の項数、ラグランジュ乗数、ラグランジュ乗数関数の項数は表2に示すとおりである。

$\alpha=30^\circ, 45^\circ$ の平行四辺形板の高次振動で、本解析法による値と Durvasula の値に多少差が認められるが、ほかはほぼ一致している。

3・3 部分固定正方形板 一辺上の境界条件が異なる例として、図5に示す一辺上の一部分を固定した正方形片持ち板の振動解析を行い、実験結果と比較する。

板は 200 mm×200 mm、厚さ 2 mm のアルミニウム

図5 部分固定正方形板

表3 部分固定正方形板の共振振動数 (Hz)

No.	α mm				
		60	100	140	200
1	A	23.6	33.7	38.8	41.8
	B	23.5	31.1	36.6	40.5
2	A	59.0	73.7	89.7	101
	B	55.2	73.1	90.0	—
3	A	142	171	219	255
	B	141	170	218	255
4	A	267	284	319	328
	B	263	276	304	326
5	A	304	323	336	370
	B	304	320	333	—
6	A	396	431	512	649
	B	390	414	481	637
Number of terms	$\bar{W}$	44	44	44	44
	$\bar{Q}_2$	1	1	1	1
	$\bar{V}_1$	2	2	3	3
	$\bar{M}_1$	1	2	2	3

A:Theoretical values, B:Experimental values

合金板 (ヤング率 71 GPa, ポアソン比 0.33, 比重 2.8) である。図5中の α は固定部長である。

図6 部分固定正方形板の振動モード ($\alpha=100$ mm)

$\alpha=60, 100, 140, 200$ mm の板の共振振動数 (Hz) を実験値と比較して表 3 に示す。

解析には、原点において変位零の条件を満たす定数項を除いた 44 項からなる関数で変位を表し、 $\bar{Q}_z$, $\bar{V}_1$, $\bar{M}_1$ の近似項数は表に示すとおりである。固定部分が長くなるにつれ、 $\bar{V}_1$, $\bar{M}_1$ の項数を増す必要がある。

実験に使用した試験片は、板厚 2 mm のアルミニウム合金板より、上記寸法に切断したものである。試験片の固定部を電動型加振機 (加振力 2.9 kN) の可動部に治具を用いて固定し、加振し、試験片に貼り付けたひずみゲージの出力最大時の加振周波数を共振振動数とした。また、共振時の振動モードを解析結果と比較するため、共振時に微かな砂を板に散布し、砂の集まった線を節として測定した。

$\alpha=100$ mm の板の共振時における節の位置を、実験結果と解析結果を比較して図 6 に示す。

共振振動数、振動モードとも両者ほぼ一致していることが表 3 および図 6 からわかる。

3・4 凹形固定板 凸形でない板の一例として、図 7 に示す凹形に固定された板の共振振動数、振動モードを解析し、実験結果と比較する。

図 7 凹形固定板

表 4 凹形固定板の共振振動数 (Hz)

α mm No.	50		100	
	A	B	A	B
1	36.4	33.0	64.6	61.0
2	69.6	63.7	114	109
3	149	149	210	203
4	308	302	361	356
5	327	316	422	403
6	428	423	540	523
$\bar{W}$	45		45	
$\bar{Q}_{1,2,6}$	1,1,1		1,1,1	
$\bar{V}_{1,6}$	1,1		1,2	
$\bar{M}_{1,6}$	1,1		1,1	

A:Theoretical values, B:Experimental values

固定部長さ α が 50, 100 mm の板の共振振動数を表 4 に示す。同表には、また、解析に使用した変位関数 W の項数、および $\bar{Q}_r$, $\bar{V}_r$, $\bar{M}_r$ の項数も示す。

図 8 凹形固定板の振動モード ($\alpha=100$ mm)

試験片は、3・3節の試験片と同じアルミニウム合金板製で、実験方法も前節と同じである。

図8は $\alpha=100$ mmの板の振動モード(節の位置)の解析結果と実験結果の比較である。

高次振動になるに従い、振動モードは複雑になるが、理論解析による共振振動数、振動モードとも実験結果とよく一致している。

4. む す び

本報で得られた結果をまとめると次のようである。

(1) ひずみエネルギー、運動エネルギーの二重積分は板の周辺に沿う線積分によって計算する。

(2) 仮定した変位関数(座標 x, y のベキ級数)が満たしていない幾何学的境界条件は、ラグランジュ乗数、ラグランジュ乗数関数を用いて満足させる。

(3) 以上の結果、複雑な形状、境界条件を持つ板の自由振動が、レーレ・リッツ法によって解析できるようになった。

(4) ラグランジュ乗数関数の項数は、適用する辺

の長さによって増減する必要がある(3・3節参照)。

(5) ラグランジュ乗数、ラグランジュ乗数関数の未知係数の数だけ、変位関数の未知係数を消去し、縮小した振動数方程式を用いると、固有値・固有ベクトルが安定して求まる。

(6) 解の収束は、固有値の変化の状況、および、幾何学的境界条件がどの程度満たされているかによって判定する。

終わりに、本研究を行うにあたり、実験に協力いただいた、太平工業(株)山田浩一氏(当時、当学部学生)にお礼申し上げる。

文 献

- (1) 川井・ほか4名, 航技研報告, TR-30(昭37).
- (2) 堀, 航空誌, 14-148(昭41), 131.
- (3) 堀・小松, 航空宇宙誌, 25-277(昭52), 80.
- (4) Timoshenko S., *Vibration Problems in Engineering*, (1955), 437, Van Nostrand.
- (5) Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, (1975), 44, Pergamon Press.
- (6) Durvasula S., *AIAA J.*, 7-6(1969), 1164.

討 論

〔質問〕 高 橋 伸〔山形大学工学部〕

(1) 表1, 2の固有値とは何を表すか教えていただきたい。

(2) 3・2節で α はどの角を表すのかお教え願いたい。

〔回答〕 (1) 式(4)で定義した λ のことで、共振振動数を無次元表示した量である。

(2) 角 α の説明が欠落しているので、追加説明させていただく。図4において、辺④とY軸のなす角を α° とする。

〔質問〕 堀 武 敏〔芝浦工業大学〕

(1) 貴手法と境界要素法による手法との相違点ならびに数値解析上の利害得失に関する予想があればお教えいただきたい。

(2) 式(1)の第1項, 第5項のみの π の式を用い、 W には何の拘束もない式を誘導し、拘束条件には $W(x, y)$ の生の条件より得られる、 a_{mn} に関する式を用い、つまり、 Q_π , $V_\pi(s)$, $M_\pi(s)$ を用いしないで、以上の式の連立から解を求める方法もあると思うが、その場合の二者の手法の相違および対応はどのようなものになるか、お教え願いたい。

(3) 式(15)の下の記事に関連し、式(9)を直接解くことも必要な場合も生じると思うが、縮小した振動

数方程式を誘導する手法に何かうまい手があるのか、また、振動数方程式のサブルーチンに関して、よい方法があったならお教え願いたい。

〔回答〕 (1) 本解法と境界要素法との関連について考察したことはないが、大変興味あるご指摘なので今後検討したい。

(2) ご指摘の方法による解析も可能である。しかし、固定辺の長さが短い場合、複雑な境界条件の場合などでは、微分方程式と境界条件を一つの関数で同時に満足させることはなかなか困難で、変位関数 W の項の選択にかなりの経験が必要となる。これに反し、変位と独立なラグランジュ乗数、ラグランジュ乗数関数を用いると、未知変数の数は増すが、 W の項の選択には問題がなくなり、比較的簡単に解を得ることができる。

(3) 連立方程式(7)を次のようにマトリックス表示する。

$$\begin{matrix} N_2 \\ N_3 \\ N_2 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overbrace{C_{11}-\lambda^2 D_{11}}^{N_2} & \overbrace{C_{12}-\lambda^2 D_{12}}^{N_3} & \overbrace{C_{13}}^{N_2} \\ C_{12}^T-\lambda^2 D_{12}^T & \overbrace{C_{22}-\lambda^2 D_{22}}^{N_3} & C_{23} \\ C_{13}^T & C_{23}^T & 0 \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

.....(i)

ここに, $N_1 = N_2 + N_3$ は変位 W の近似項数, N_2 はラグランジュ乗数, ラグランジュ乗数関数の項数の総和, X_1, X_2 は W の未知係数 a_{ij} からなるベクトル, X_3 はラグランジュ乗数, ラグランジュ乗数関数の未知係数からなるベクトルである.

式(i)を展開し, X_1, X_3 を消去すると X_2 に関する次式が導かれる.

$$(C - \lambda^2 D)X_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

ここに,

$$C = C_{22} + C_{23}C_{13}^{-1}C_{11}(C_{13}^T)^{-1}C_{23}^T$$

$$\begin{aligned} & -C_{12}^T(C_{13}^T)^{-1}C_{23}^T - C_{23}C_{13}^{-1}C_{12} \\ D = & D_{22} + C_{23}C_{13}^{-1}D_{11}(C_{13}^T)^{-1}C_{23}^T \\ & -D_{12}^T(C_{13}^T)^{-1}C_{23}^T - C_{23}C_{13}^{-1}D_{12} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

また,

$$X_1 = -(C_{13}^T)^{-1}C_{23}^T X_2 \quad \dots\dots\dots (iv)$$

である.

本報では, 式(ii)に対応する振動数方程式から QR 法によって, 振動固有値 λ , 固有ベクトル X_2 を求め, 式(iv)からベクトル X_1 を計算している.