ロボットのシミュレーションに関する研究*

(第1報, 位置, 速度および加速度の数値解析)

長松 昭男**, 斉藤 俊**, 一柳 高時***

Research on Simulation of the Robot (1st Report, Numerical Analyses of Displacement, Velocity and Acceleration)

by Akio NAGAMATSU, Takashi SAITO, and Takashi ICHIYANAGI

Displacement, velocity and acceleration of a mechanism of an arbitrary type are analyzed numerically in order to simulate motion of an articulated robot. Uicker's method of analysis, based on the matrix algebra for a link mechanism of a closed loop, is extended to mechanisms of an opened loop and compound loops. How to judge a singular point of motion is explained. On each step of the iterative calculation for convergence by the Newton-Raphson method, a method is proposed to correct the angular displacement of the pairs. It is made clear that the proposed method of correction realizes the analysis of rapid convergence and of high accuracy.

Key Words: Mechanism, Robot, Simulation, Link, Pair, Numerical Analysis, Displacement, Velocity, Acceleration

1. ま え が き

産業用ロボットの多くは, 開回路の多自由度機構を有し, 各自由度に制御系を含む駆動機能を付加することによって, 種々の不等速運動を可能にしている。一方, 自動機械には古くから閉回路のリンク機構が用いられている。前者は, 柔軟性やはん用性に富む反面, モータや腕などの重量に制限があり, 同時に可搬重量も限られている。反対に後者は, 柔軟性やはん用性が欠けるが, 重量制限がゆるく, 高速性も優れている。これら両者の欠点を補い合うために, 両者を合体した複合回路のロボットも存在する。

ロボットの設計に際しては, 各自由度間や障害物との干渉を避け, 作業目的を満足する諸元を決定するために, 与えられた条件下で刻々変化していく各対偶の変位, 速度および加速度(三者をまとめて運動と呼ぶ)を正しく知ることが不可欠であるが, このことは一般には極めて困難であり, 設計の障害となってきた。

Uicker は, 任意の閉回路リンク機構の運動を, 対

偶間の座標変換行列を用いた逐次計算によって, 数値的に解析する方法を提案し, IMP (Integrated Mechanism Program) と呼ぶはん用の機構解析プログラムを作成した^{(1)~(5)}。

本報告では, この方法を発展させ, 三次元空間において, 閉回路だけでなく, 開回路および両者の複合回路の解析への適用を可能にする。また, 逐次計算の各段階において, 簡単な補正計算を付加することを提案し, これにより各段階の収束性が改善されるとともに, 誤差の蓄積が著しく減少し, Uicker の理論をそのまま適用すると発散する場合にも, 良い精度の収束計算が可能になることを示す。

本報告で作成したプログラムの主な機能は次のとおりである。

(1) 手先を有する任意の開回路および開と閉の複合回路機構に対し, 手先の運動を与えることにより, すべての対偶および節上任意点の運動を求める。逆に任意対偶の運動を与えることにより, 手先の運動を求める。

(2) 任意の閉回路リンク機構に対し, 入力節または中間節の運動を与えることにより, 各対偶またはリンク上任意点の運動を求める。またその逆を行う。

(3) 特異点の判定を行う。

* 昭和60年7月16日 第931回講演会において講演, 原稿受付 昭和60年1月16日。

** 正員, 東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 正員, 松下電器産業(株)生産技術研究所 (〒571 門真市松葉町 2-7)。

 図1 関節座標系 ($O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ は静止座標系とする)

図2 座標変換行列

2. 解析方法

2.1 位置 本報告では, Uicker⁽¹⁾が提案した, 空間リンク機構のための, 行列を用いた解析方法を, 多関節形ロボットのような開回路や開回路と閉回路の両方を含む複合回路に拡張して適用する. 対偶は, まわり対偶とすべり対偶に限定する. 開回路を有する場合には, 手先の運動を指定する場合と手先の運動が未知の場合に分けて扱う.

まず一つの回路に注目する. 座標系は, 図1に示すように, 静止座標系 $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ に対して, 各対偶に固有な関節座標系を次のように指定する. すなわち, こ

の回路の i 番めの対偶の運動軸を z_i, z_{i-1} 軸から z_i 軸への共通垂線を x_i, z_i 軸と x_i 軸の交点を $O_i, O_{i-1}-z_{i-1}x_i$ に対して右手系となる直交座標軸を y_i として, 各対偶に固有な関節座標系 $O_i-x_iy_iz_i$ を設定する. さらに, z_i 軸回りに x_{i+1} 軸が x_i 軸となす角度を θ_i , x_{i+1} 軸と z_i 軸との交点の z_i 座標値を s_i , x_{i+1} 軸回りに z_{i+1} 軸が z_i 軸となす角度を α_i , z_i 軸と z_{i+1} 軸との共通垂線の長さを a_i とすると, i 番めと $i+1$ 番めの座標の間の座標変換は次のように表される⁽⁶⁾.

$$x_i = A_i x_{i+1} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで

$$x_i = \{x_i, y_i, z_i, 1\}^T \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

であり, α_i, a_i は各対偶に固有の不変値である. さらに, 開回路が存在する場合には, 手先に固有の座標系 $O_h-x_hy_hz_h$ を考え, オイラ角を用いて手先座標系から静止座標系への変換行列を次のように定める.

$$A_h = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi & x_{0h} \\ \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi & y_{0h} \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta & z_{0h} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (4)$$

ここで, x_{0h}, y_{0h}, z_{0h} は手先座標系原点 O_h の静止座標系に関する座標値である. 閉回路, 開回路それぞれについて, 図2(a)と(b)のように座標変換行列 A_n を定義すれば, 回路方程式は次のようになる.

$$\text{閉回路: } I = A_1 A_2 \dots A_n \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{開回路: } A_h = A_1 A_2 \dots A_n \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで I は4行4列の単位行列である. 入力対偶あるいは位置指定節あるいは手先が微小量だけ動き, 座標変換行列が $\bar{A}_{\text{move}}$ あるいは $\bar{A}_h$ となったときの各パラメータ q_i (θ_i または s_i), p_j ($j=1 \sim 6$ それぞれに対して $x_h, y_h, z_h, \theta, \varphi, \psi$ を対応させ $P = \{p_j\}^T$ とおく) の変化をそれぞれ dq_i, dP とする. そうすると, (A) 閉回路, (B) 手先指定の開回路, (C) 手先未知の開回路の各問題に対して, それぞれ

$$(A) \quad I = A_1(q_1 + dq_1) A_2(q_2 + dq_2) \dots \bar{A}_{\text{move}} \dots A_n(q_n + dq_n) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$(B) \quad \bar{A}_h = A_1(q_1 + dq_1) A_2(q_2 + dq_2) \dots A_n(q_n + dq_n) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$(C) \quad A_h(P + dP) = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる. 変化量の2次以上の項を微小量として無視すると, 変化後の座標変換行列は, 式(3), (4)より

$$A(\theta_i + d\theta_i) = A(\theta_i) + Q_{\theta_i} A(\theta_i) d\theta_i \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$A(s_i + ds_i) = A(s_i) + Q_{s_i} A(s_i) ds_i \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$A_h(P+dP)=A_h+\sum_{j=1}^6 Q_{hpi} dp_j \dots\dots\dots (12)$$

ここで、二次元、三次元、四次元の零ベクトル $0_2=\{0, 0\}$, $0_3=\{0, 0, 0\}$, $0_4=\{0, 0, 0, 0\}$ を定めると

$$Q_{\theta i}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0_2 \\ 1 & & 0_3 \\ & 0_4 & \\ & 0_4 & \end{bmatrix}, \quad Q_{s_i}=\begin{bmatrix} & 0_4 & \\ & 0_4 & \\ 0_3 & & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_{hxh}=\begin{bmatrix} 0_3 & 1 \\ & 0_4 \\ & 0_4 \\ & 0_4 \end{bmatrix}, \quad Q_{hyh}=\begin{bmatrix} & 0_4 & \\ 0_3 & & 1 \\ & 0_4 & \\ & 0_4 & \end{bmatrix},$$

$$Q_{hzh}=\begin{bmatrix} & 0_4 & \\ & 0_4 & \\ 0_3 & & 1 \\ & 0_4 & \end{bmatrix}$$

$$Q_{h\theta}=\begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \sin \psi & \cos \theta \cos \varphi & 0 \\ -\sin \theta \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta & 0 \\ & 0_4 & & \end{bmatrix}$$

$$Q_{h\varphi}=\begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \sin \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \\ & 0_4 & & \\ & 0_4 & & \end{bmatrix}$$

$$Q_{h\psi}=\begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & -\cos \theta \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi & 0_2 \\ -\cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & -\cos \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & 0_2 \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & 0_2 \\ & 0_4 & \end{bmatrix}$$

式(10)~(12)を式(7)~(9)にそれぞれ代入して整理すると、各問題に対する方程式は次のようになる。

$$(A) \quad I=A_1 A_2 \cdots \bar{A}_{\text{move}} \cdots A_n + \sum_i^n B_i dq_i \dots\dots\dots (13)$$

$$(B) \quad \bar{A}_h=A_1 A_2 \cdots A_n + \sum_i^n B_i dq_i \dots\dots\dots (14)$$

$$(C) \quad \sum_{j=1}^6 Q_{hpi} dp_j = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n - A_h \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$B_i=A_1 A_2 \cdots Q_{q_i} A_i \cdots A_n \dots\dots\dots (16)$$

ここで、開回路を含む空間機構であることを考慮して、各式における未知数を6個以下とし、開回路で手先未知の場合について、 $Q_{h\theta}$, $Q_{h\varphi}$, $Q_{h\psi}$ 行列の回転部分行列 $Q'_{h\theta}$, $Q'_{h\varphi}$, $Q'_{h\psi}$ として

$$Q'_{h\theta}=\begin{bmatrix} & 0_2 & \cos \varphi \\ & 0_2 & \sin \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{bmatrix} A'_h, \quad Q'_{h\varphi}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & & 0_2 \\ & 0_3 & \end{bmatrix} A'_h$$

$$Q'_{h\psi}=\begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} A'_h$$

$$A'_h=\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

と変形すれば、文献(1)に示されている方法を式(13)~(15)に適用することができ、式(13)~(15)を解くための必要十分条件は、各行列要素の並進を示す第4列めの要素、回転部分行列の上三角要素または下三角要素および対角要素に関する合計9個の方程式が成り立てばよいことになる。したがって、 $A_1 \cdots A_n$ の行列要素を a^{ij} , A_h の行列要素を a_h^{ij} , B_h の行列要素を b_h^{ij} , さらに Q_{hpi} の行列要素を q_{hpi}^{ij} として各問題に対して次のような方程式を作る。

$$(A) \quad M\{q\} = \{a_c\} \dots\dots\dots (17)$$

$$(B) \quad M\{q\} = \{a_0\} \dots\dots\dots (18)$$

$$(C) \quad D\{p\} = \{a_h\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで

$$M = \begin{bmatrix} b_1^{11} & b_2^{11} & \dots & b_n^{11} \\ b_1^{12} & b_2^{12} & \dots & b_n^{12} \\ b_1^{22} & b_2^{22} & \dots & b_n^{22} \\ b_1^{13} & b_2^{13} & \dots & b_n^{13} \\ b_1^{23} & b_2^{23} & \dots & b_n^{23} \\ b_1^{33} & b_2^{33} & \dots & b_n^{33} \\ b_1^{14} & b_2^{14} & \dots & b_n^{14} \\ b_1^{24} & b_2^{24} & \dots & b_n^{24} \\ b_1^{34} & b_2^{34} & \dots & b_n^{34} \end{bmatrix}, \quad \{a_c\} = \begin{bmatrix} 1-a^{11} \\ -a^{12} \\ 1-a^{22} \\ -a^{13} \\ -a^{23} \\ 1-a^{33} \\ -a^{14} \\ -a^{24} \\ -a^{34} \end{bmatrix}, \quad \{a_0\} = \begin{bmatrix} a_h^{11}-a^{11} \\ a_h^{12}-a^{12} \\ a_h^{22}-a^{22} \\ a_h^{13}-a^{13} \\ a_h^{23}-a^{23} \\ a_h^{33}-a^{33} \\ a_h^{14}-a^{14} \\ a_h^{24}-a^{24} \\ a_h^{34}-a^{34} \end{bmatrix}, \quad \{a_h\} = \begin{bmatrix} a^{11}-a_h^{11} \\ a^{12}-a_h^{12} \\ a^{22}-a_h^{22} \\ a^{13}-a_h^{13} \\ a^{23}-a_h^{23} \\ a^{33}-a_h^{33} \\ a^{14}-a_h^{14} \\ a^{24}-a_h^{24} \\ a^{34}-a_h^{34} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} q_{hx}^{11} & q_{hy}^{11} & \dots & q_{h\phi}^{11} \\ q_{hx}^{12} & q_{hy}^{12} & \dots & q_{h\phi}^{12} \\ q_{hx}^{22} & q_{hy}^{22} & \dots & q_{h\phi}^{22} \\ q_{hx}^{13} & q_{hy}^{13} & \dots & q_{h\phi}^{13} \\ q_{hx}^{23} & q_{hy}^{23} & \dots & q_{h\phi}^{23} \\ q_{hx}^{33} & q_{hy}^{33} & \dots & q_{h\phi}^{33} \\ q_{hx}^{14} & q_{hy}^{14} & \dots & q_{h\phi}^{14} \\ q_{hx}^{24} & q_{hy}^{24} & \dots & q_{h\phi}^{24} \\ q_{hx}^{34} & q_{hy}^{34} & \dots & q_{h\phi}^{34} \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = \{dq_1, dq_2, \dots, dq_n\}^T$$

$$\{p\} = \{dx_n, dy_n, dz_n, d\theta, d\phi, d\psi\}^T$$

である。複合回路の場合には、各回路ごとに式(17)～(19)が成立するから、これらをまとめる。この場合には、回路数を l 、位置指定でない対偶数を m とすると、行列 M と行列 D はそれぞれ $(l \times 9)$ 行 m 列となる。

式(17)～(19)は最小二乗法の手法を用いて解くことができる。例えば、式(17)については

$$(M^T M)\{q\} = M^T \{a_c\} \dots\dots\dots (20)$$

したがって、 $M^T M$ が正則であれば

$$\{q\} = (M^T M)^{-1} M^T \{a_c\} \dots\dots\dots (21)$$

となるから、ニュートンラプソン法を適用することができる。すなわちまず、式(17)または(18)を解いて、最初の $\{q\}$ を求める。式(10)または式(11)にこの $\{q\}$ を代入して $A(\theta_i + d\theta_i)$ または $A(s_i + ds_i)$ を作成し、これらを次の段階の $A(\theta_i)$ または $A(s_i)$ とする。これらをもとに、式(13)または式(14)すなわち式(17)または式(18)を新しく作成して解く。この手順を、 $\{q\}$ が十分小さくなるまで繰返す。

式(19)も、 $D^T D$ が正則の場合には、最小二乗法を用い、式(21)と同様に解き、 $\{p\}$ を求めることができる。この場合には上記のような繰返しを行う必要はなく、 $\{p\}$ が手先の変位になる。

2・2 特異点の判定と誤差修正

式(20)左辺の $M^T M$ が正則でない場合は、式(17)または式(18)の未知数に対する式の数不足している場合であり、式が重複していることを示す。 $D^T D$ が正則でない場合にも、式(19)に対して同様のことがいえる。これらは、自由度の重複を意味し、特異点を示している。その形態としては、図3に示すように、(a)回転の重複、(b)すすみの重複、(c)リンクの思案点の3とおりが考えられる。

さて、式(10)の左辺を構成する $\sin(\theta_i + d\theta_i)$ と $\cos(\theta_i + d\theta_i)$ に対しては、当然

$$\sin^2(\theta_i + d\theta_i) + \cos^2(\theta_i + d\theta_i) = 1 \dots\dots\dots (22)$$

が成立しなければならない。しかし、 $d\theta_i = \varepsilon$ とし、式(10)を導いたと同様に、式(22)の左辺の2次以上の項を省略すると、左辺は

$$(\sin \theta_i + \varepsilon \cos \theta_i)^2 + (\cos \theta_i - \varepsilon \sin \theta_i)^2 = 1 + \varepsilon^2 \dots\dots\dots (23)$$

となる。すなわち、式(10)を用いることにより、誤差の蓄積が生ずることがわかる。そこで、式(10)をそのまま用いて、いったん行列 $A(\theta_i + d\theta_i)$ を作成する。この行列の上2行の各項から、 $\sin(\theta_i + d\theta_i)$ と $\cos(\theta_i + d\theta_i)$ を計算し、これらの平均値を求める。両者の平均値のうち、小さいほうを基準にし、式(22)が正しく成立するように大きいほうを修正する。これらを用いて、修正後の $A(\theta_i + d\theta_i)$ を作成し直す。前に述べた式(17)と式(18)の繰返し計算ごとにこの修正を付加す

図3 特異点の例 (3種類)

ることを提案する。

一方、手先が未知の場合には、式(22)の代わりに

$$\left. \begin{aligned} \sin^2(\theta + d\theta) + \cos^2(\theta + d\theta) &= 1 \\ \sin^2(\varphi + d\varphi) + \cos^2(\varphi + d\varphi) &= 1 \\ \sin^2(\psi + d\psi) + \cos^2(\psi + d\psi) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

が正しく成立するように、上と同じ方法で式(12)の $A_h(P + dP)$ を修正する。

2.3 速度 速度解析に関しても、閉回路の場合について示された文献(2)の方法を、開回路が存在する場合について適用することができる。すなわち、回路方程式(5)、(6)の両辺を時間微分し整理すると、閉回路、開回路それぞれに対して次の方程式を得る。

$$\sum_i B_i \dot{q}_i = - \sum_j B_j \dot{q}_j \dots\dots\dots (25)$$

$$\sum_k Q_{hpk} \dot{p}_k = \sum_j B_j \dot{q}_j \dots\dots\dots (26)$$

ここで(・)は時間に関する全微分を表している。したがって前節と同様各問題に対して次の方程式を得る。

$$(A) \quad M\{\dot{q}\} = \{a'_c\} \dots\dots\dots (27)$$

$$(B) \quad M\{\dot{q}\} = \{a'_o\} \dots\dots\dots (28)$$

$$(C) \quad D\{\dot{p}\} = \{a'_h\} \dots\dots\dots (29)$$

よって、位置解析により収束した場合、前節と同様の手法により例えば式(27)は

$$\{\dot{q}\} = (M^T M)^{-1} M^T \{a'_c\} \dots\dots\dots (30)$$

となるから、各対偶の速度、角速度あるいは手先の速度、角速度を求めることができる。

2.4 加速度 式(25)、(26)の両辺をさらに時間微分し、整理すると次の形となる。

$$\sum_i B_i \ddot{q}_i = - \left\{ \sum_j \ddot{B}_j \dot{q}_j + \dot{W}_1 B_1 \dot{q}_1 + \sum_{i=2}^n (\dot{W}_{i-1} + \dot{W}_i) B_i \dot{q}_i \right\} \dots\dots\dots (31)$$

$$\sum_k Q_{hpk} \ddot{p}_k + S' = \sum_i \ddot{B}_i \dot{q}_i + \dot{W}_1 A_h^{-1} B_1 \dot{q}_1 + \sum_{i=2}^n (\dot{W}_{i-1} + \dot{W}_i) A_h^{-1} B_i \dot{q}_i \dots\dots\dots (32)$$

ここで

$$\dot{W}_i = \sum_{k=1}^i B_k \dot{q}_k$$

であり、 S' は式(4)を時間について2回微分し整理することにより得られる4行4列の行列である。よって各問題に対し式(31)、(32)を並べ直し、右辺をそれぞれ $\{a''_c\}$ 、 $\{a''_o\}$ 、 $\{a''_h\}$ とおけば、2.1、2.3節と同様にして

$$(A) \quad \{\ddot{q}\} = (M^T M)^{-1} M^T \{a''_c\} \dots\dots\dots (33)$$

$$(B) \quad \{\ddot{q}\} = (M^T M)^{-1} M^T \{a''_o\} \dots\dots\dots (34)$$

$$(C) \quad \{\ddot{p}\} = (D^T D)^{-1} D^T \{a''_h\} \dots\dots\dots (35)$$

となるから、各対偶または手先の加速度と角加速度を求めることができる。

2.5 絶対系による表示 これまで求めてきた運動は、図1で定義した相対座標系に関する運動すなわち隣接対偶からの相対運動であった。ここではそれらを絶対座標系に変換する。

複合回路の解析も行うので、回路に番号をつける。その際静止節を含む回路の一つを選び、それを主回路としてその番号を1とする。単一回路の場合には、それは主回路になる。対偶番号は、各回路別に独立に付けられている。副回路の対偶番号は、主回路と共通の対偶を1とする。すなわち、回路番号 l 、対偶番号 m の対偶を J_{lm} で示すと、 J_{11} は主回路内にも含まれなければならない。

さて主回路上の節にある点 x_{1m} および副回路上の節にある点 x_{lm} の絶対位置、速度、加速度を求める。ここで回路 l に含まれる全関節数を n_l 個とする。関節座標系で示される点の座標変換は式(1)を書き直すことにより

$$x_{lm} = A_{lm} x_{l,m+1} \dots\dots\dots (36)$$

x_{lm} を x_{lm} の絶対位置ベクトル、また図4に示すように C_l を $l \neq 1$ の時、節 J_{11} の関節座標系から主回路内の重複する関節 J_{1k} の関節座標系への座標変換行列とすると絶対位置は次のようになる。

$$X_{lm} = \begin{cases} T_{1m} x_{1m} & (l=1) \\ T_{1k} C_l T_{lm} x_{lm} & (l \neq 1) \end{cases} \dots\dots\dots (37)$$

ここで

$$T_{11} = I \quad (\text{四次元単位行列})$$

$$T_{lk} = A_{l1} A_{l2} \dots A_{l(k-1)}$$

絶対速度は式(37)の両辺を時間微分し、整理することにより次のように求められる。

$$\dot{X}_{lm} = \begin{cases} \dot{W}_{1(m-1)} T_{1m} x_{1m} & (l=1) \\ \{ \dot{W}_{1(k-1)} T_{1k} C_l T_{lm} + T_{1k} C_l \dot{W}_{l(m-1)} T_{lm} \} x_{lm} & (l \neq 1) \end{cases} \dots\dots\dots (38)$$

ここで

$$\dot{W}_{lk} = \sum_j B'_{lj} \dot{q}_{lj}$$

$$B'_{lj} = \begin{cases} B_{lj} & (\text{閉回路}) \\ B_{lj} A_h^{-1} & (\text{開回路}) \end{cases}$$

さらに絶対加速度は、式(37)を時間について2回微分し整理することにより次のように求められる。

図4 主回路と副回路の関係

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{lm} = & \begin{cases} \{\ddot{W}_{1(m-1)} + V_{1(m-1)}\} T_{1m} x_{1m} & (l=1) \\ \{(\ddot{W}_{1(k-1)} + V_{1(k-1)}) T_{1k} C_l \\ + 2\dot{W}_{1(k-1)} T_{1k} C_l \dot{W}_{l(m-1)} \\ + T_{1k} C_l (\ddot{W}_{l(m-1)} + V_{l(m-1)})\} T_{lm} x_{lm} & (l \neq 1) \end{cases} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_{lk} = & \sum_j^k B'_{lj} \ddot{q}_{lj} \\ V_{lk} = & \dot{W}_{l1} B'_{l1} \dot{q}_{l1} + \sum_{i=2}^k (\dot{W}_{l(i-1)} + \dot{W}_{li}) B'_{li} \dot{q}_{li} \end{aligned}$$

ここで

図5 模型1のシミュレーションにおけるワイヤフレーム図

図6 運動の指令値に対する誤差1

図7 ニュートンラプソン法による反復数

3. 解析例

2章で説明した理論に基づき、任意の機構やロボットの運動のシミュレーションを行うための、対話形のはん用プログラムを作成した。本章では2とおりの空間ロボットを例にとり、作成したシミュレーションプログラムの実用性を検証する。すなわち、手先または節の運動の指令値を入力し、全体偶の運動を計算する。その結果を用いて入力部の運動を計算し、元の指

図8 模型2のシミュレーションにおけるワイヤフレーム図

図9 運動の指令値に対する誤差2

令値と比較する。運動は方向と大きさを有するベクトルであるが、ここでは大きさだけの比較に留める。

運動の形態は、全節長の50～60%の軌道に沿って手先が一定方向を向いたままの2秒間で一周の等速らせん運動とし、これを100段階で計算する。運動のうち、並進運動については、出力値を指令値で除した相対誤差を示すが、角運動については、指令値が零であるから、絶対誤差を示す。また各段階において収束するまでのニュートンラプソン法による反復回数も示す。

以上を、本報告で提案した、式(22)と式(24)を用いる修正手順を付加する場合としない場合の両者について比較する。

まず、開回路のみで構成される空間ロボットの模型(模型1とする。)について数値計算を行う。図5(a)～(e)に、指令を与えてから0.5秒ごとの位置のワイヤフレーム図を示す。次に、図6(a)～(f')に、ロボットの手先の運動の指令値に対する誤差の時間的変化を示す。図番の(a)～(f)はそれぞれ、位置、角位置、速度、角速度、加速度および角加速度に対応しており、ダッシュがついているものは、式(22)と式(24)を用いて修正手順を付加して計算を行っている場合である。並進運動を示す位置、速度、加速度に関しては、修正手順を付加しない場合でも比較的良好な精度で収束が得られているが、回転運動を示す角位置、角速度、角加速度に関しては、修正手順を付加しない場合には、誤差の変動が大きく、しかも角位置については発散してしまうことがわかる。一方、修正手順を付加した場合には、並進運動に関しては前者に比べて一段と良い精度で収束し、回転運動についても著しく良い精度で収束する。さらに、図7(a)、(a')に修正手順を付加しない場合と付加した場合のニュートンラプソン法による反復回数を示す。修正手順を付加することにより、反復回数はわずかに4回ですみ、収束も速くなっていることがわかる。

次に、閉回路の上に手先の乗った形の空間ロボットの模型(模型2とする。)についても同様の数値計算を行う。図8(a)～(e)に、模型2に指令を与えてから0.5秒ごとの位置のワイヤフレーム図を示す。また、模型1の場合と同様に、図9(a)～(f')にロボットの手先の運動の指令値に対する誤差の時間的変化を示す。図番(a)～(f)およびダッシュは図6と同じ意味である。この場合も、並進運動に関しては、修正手順を付加しない場合でも比較的良好な精度で収束が得られるが、回転運動に関しては、修正手順を付加しない場合には誤差の変動が大きく、角位置、角加速度に関し

図10 特異点のワイヤフレーム図

ては発散してしまうことがわかる。また、修正手順を付加することにより、この場合にも並進運動と回転運動を問わず小さい誤差で収束する。

4. 特 異 点

2・2節で説明した特異点の判定と誤差修正に関し、解析例に基づき、さらに説明を加える。図10(a)に模型2の特異点の例を示す。この図は行列 $M^T M$ が非正則になったことから判定した特異点近傍の図である。この点は、リンク機構の思案点を意味し、力の伝達が行われない状態である。次に、図10(b)に模型1の特異点の例を示す。この図は誤差修正に関する判定基準に用いた ε の値により判定した開回路の特異点の例で、矢印方向の自由度が失われている。このことについて説明を加える。式(23)から考えると、近似を用いた場合、回転変換によりその半径方向に $(\sqrt{1+\varepsilon^2}-1)$ 程度の誤差を生ずるが、これはリンク固有のパラメータ a_i と a_i を変化させる方向に働く。一方、仮想仕事の原理から考えると、特異点で無理に他の対偶と関連ある仮想仕事をしようとすれば、そこでは実際には無理な方向、すなわちリンク固有のパラメータを変化させる方向に動かざるを得ない。したがってニュートンラプソン法で収束したとしても、 ε が無視できないほど大きくなった場合には特異点とみなすべきである。

5. ま と め

ロボットのシミュレーションとして、位置、速度および加速度について、Uickerが提案した方法を発展させ、三次元空間において、閉回路だけでなく、開回路および両者の複合回路の解析への適用を可能にした。また、逐次計算の各段階において、修正手順を付加することを提案し、これにより各段階の収束性が改善されるとともに、誤差の蓄積が著しく減少し、Uickerの理論をそのまま適用すると発散する場合に

も、良い精度の収束計算が可能になることを示した。

さらに、特異点の判定方法を示した。

本研究をご指導いただいた松下電器産業(株)生産技術研究所 山内信也部長、並びに本研究にご助力をいただいた平田一行氏(当時東工大大学院)に感謝の意を表す。

文 献

- (1) Uicker, J. J. Jr., Denavit, J. and Hartenberg, R. S., *Trans. ASME, Ser. E*, 31 (1964), 309.
 - (2) Denavit, J. Hartenberg, R. S. Razi, R. and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. E*, 32 (1965), 903.
 - (3) Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, 91 (1969), 251.
 - (4) Sneth, P. N. and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, 93 (1971), 102.
 - (5) Sneth, P. N. and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, 94 (1972), 454.
 - (6) Richard, P. P., *Robot Manipulator*, (1981), 52, MIT Press.
-