ロボットのシミュレーションに関する研究*

(第3報, 振動解析, その1)

長松 昭男**, 斉藤 俊**, 桜井 康雄***

Research on Simulation of the Robot (3rd Report, Vibration Analysis, Part 1)

by Akio NAGAMATSU, Takashi SAITO, and Yasuo SAKURAI

The vibration of link mechanisms of a closed loop, an opened loop and compound loops is analyzed numerically, in order to simulate motion of articulated robots at the design stage. It is assumed that all parts of the mechanisms have linear characteristics against small displacements around the equilibrium positions. First, the equation of motion is composed with the inertia, damping and spring forces calculated in the authors' previous report. The natural frequency, natural mode and transfer function of the link mechanism are analyzed by this equation. Next, the displacement and the stiffness of the hand of the articulated robot are analyzed. The vibration of the actual robot for industry is calculated numerically by the present method under the assumption of structural damping. The damping and stiffness coefficients of each pair are determined by the basic experiment. The calculated results are compared with the results of the vibration test.

Key Words: Mechanism, Robot, Simulation, Link, Pair, Vibration Analysis, Natural Frequency, Natural Mode, Transfer Function

1. ま え が き

産業用ロボットは、目的に応じて多様な機能を持たせるために、その形態は変化に富み、従来一般に機械と呼ばれていたものとは異なる様相を有する新しい機械である。したがって、その設計にあたっては、まず新しい発想を必要とする。そしてその発想を、機械として具現し、さらに商品として経済的に成立させるためには、新しい設計理論の展開が不可欠になる。しかし、このような設計理論は、従来の技術を新しい概念に基づいて総合した結果として生み出さざるを得ず、そのためには、地味な基礎研究の積重ねが欠かせない。産業用ロボットは、一見取り組みやすい商品であるために、ブームに乗じて手をつける企業は多いが、必然的な過当競争に直面し、基礎研究の裏付けの有無が運命を決定する時期にきていると思われる。この観点から、ロボットに関する研究がさまざまな工学分野で急増しているが、著者らもその一端に加わるべく、本研究を行っている⁽¹⁾⁽²⁾。

まず第1報では、Uickerの理論⁽³⁾⁻⁽⁷⁾を拡張し、閉回路だけでなく、開回路や両者の複合回路の、位置、速度および加速度の数値解析方法を示し、同時に精度向上の方法を提案した。次に第2報では、運転中のロボットに作用する外力、慣性力、重力、弾性力および減衰力を補償するために入力対偶に加えるべき力またはトルクの数値解析方法を示した。

産業用ロボットの構造は、一般に柔軟性に富んでおり、運動の高速化と位置決め精度の向上を、軽量化と低価格化の中で実現するための最大の障害の一つは、振動問題であると考えられる。ロボットの振動の特色は、振動と運動の連成、駆動系や関節のがたなどに起因する非線形性にあるが、それらを知る前にまず、基本的な線形振動解析が設計に不可欠であることは、他の機械と同様である。本報告では、閉回路、開回路および両者の複合回路の線形振動の解析方法を述べる。まず、固有振動数と関節座標系における固有モードを解析する。次に、比例粘性、一般粘性およびヒステリシスの3種類の減衰仮定に基づく、関節座標系の伝達関数を求める。さらに、手先の変位と剛性について説明する。最後に、実機ロボットを対象にして、本報告に示す方法による振動解析を行い、実験結果と比較する。

* 昭和60年7月16日 第931回講演会において講演、原稿受付 昭和60年1月16日。

** 正員、東京工業大学(〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 正員、松下電器産業(株)生産技術研究所(〒571 門真市松葉町 2-7)。

2. 運動方程式

本報告で用いる座標系とパラメータは, Uicker⁽³⁾によって提案された, 閉回路空間リンク機構のための, 行列を用いた方法を, 開回路や開回路と閉回路の両方を組合せた複合回路に拡張したものである。すでに本研究の第1報で, これらに関する詳しい説明を行ったが, 本報告でも簡単に触れる。

図1は, 一つの回路に注目し, それに示す $i-1, i$ および $i+1$ 番めの対偶に固有の関節座標系を示す。図2(a)のように, 関節座標系間の変換行列を A_{li} とすれば,

$$x_i = A_{li} x_{i+1} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで

$$x_i = (x_i y_i z_i)^T \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$A_{li} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

添字 l は回路番号を示す。単一回路のときは $l=1$ とし, 複合回路のときには, 主回路を $l=1$ とする。対偶を回り対偶またはすべり対偶に限定すれば, α_i と a_i は, 各対偶に固有の不変値である。そして, 対偶の変位とともに変化するパラメータは, θ_i または s_i であり, これらを q_{li} と記す。また, 一般に回路 l の中にある入力対偶は複数とし, それらを添字 p, r, s で表現する。

さて, 本研究の第1報では, 作業目的を満足させるために, リンク機構や産業用ロボットの一部の対偶や手先の動作を指定するときに, 他の部分を含む系全体に生ずる変位, 速度および加速度を計算する方法を示した。

機構やロボットは, 作業中に物を持ち上げたり他の物体の干渉を受けたりするために, 外部から力 F_{pa} を受ける。次に, 自重による力 F_{pg} を受ける。また第1報で計算した加速度と速度は, それぞれ慣性力 F_{pi} と減衰力 F_{pc} を生じる。さらに, 機構やロボットがなんら

かの変位をするときには, それによる弾性力 F_{pe} も生じる。第2報では, これらの諸力の各々を個別に補償するために入力対偶に加えるべき力を計算する方法を示した。このうち慣性力 F_{pi} , 減衰力 F_{pc} および弾性力 F_{pe} の結果を再記すると

$$F_{pi} = \sum_m \sum_r T_r \{ (U_{lmr} E_{lm} U_{lms}^T) \ddot{q}_r + \sum_s V_{lmrs} \dot{q}_s \dot{q}_r \} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで

$$U_{lmr} = \begin{cases} W'_{l(m-1)r} T_{lm} & (l=1) \\ (W'_{l(k-1)r} T_{lk} C_l + T_{lk} C_l W'_{l(m-1)r}) T_{lm} & (l \neq 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

であり, また V_{lmrs} , W'_{emr} などについては, 第2報⁽²⁾を参照されたい。

$$F_{pc} = \sum_m \sum_r C_{lm} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_r} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_p} \dot{q}_r \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$F_{pe} = \sum_m \sum_r K_{lm} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_r} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_p} \dot{q}_r \quad \dots\dots\dots (7)$$

しかしながら, これらの力の和, すなわち $F_{pa} + F_{pg} + F_{pi} + F_{pc} + F_{pe}$ を入力対偶に加えたからといって, 必ずしも目的の動作をするわけではない。確かに, 上記の各力は, 外力, 重力, 慣性力, 減衰力および弾性力の各々と個別につりあっている。しかしそれらのもとになる, 加速度, 速度および変位は, 各々が独立ではなく, 運動という一つの現象の3側面にすぎない。したがって, 慣性力, 減衰力および弾性力も互いに独立ではなく, 互いに密接に影響しあって時間とともに変動する。そこで, 上記の力の和が作用するときの運動は, これらがからみあった一つの系としての運動方程式を改めて作成し, それを解いて求めなければならない。この方程式は非線形であるが, 入力を与えられれば, 逐次積分によって数値的に解くことは可能である。

しかし本報告では, まずその第1歩として, 設計の基本である固有振動数, 固有モードおよび伝達関数を求める。そのために, 第1に変位は平衡位置からの微小量である, 第2に線形系である, という2とおりの仮定を設ける。第1の仮定により, 外力による準静的

図1 関節座標系 ($O_1-x_1y_1z_1$ は静止座標系とする)

図2 座標変換行列 A_n (添字 l は省略)

な力 F_{pa} と重力による力 F_{pg} は無視できる。また、第2の仮定により、式(4)の F_{pl} のうちでコリオリ力を意味する右辺第2項は省略できる。そして運動方程式は、式(4)、(6)と(7)の和から

$$\{F\} = M\{\ddot{q}\} + C\{\dot{q}\} + K\{q\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで $\{F\}$ は、入力対偶に入力する力を並べたベクトルであり、その各要素は、 $F_p = F_{pl} + F_{pc} + F_{pe}$ である。また、 $\{q\}$ は入力対偶の変位を表すベクトルである。さらに、行列 M, C, K の s 行 r 列は

$$M_{sr} = \sum_m T_r(U_{lmr} E_{lm} U_{lms}^T) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$C_{sr} = \sum_m C_{lm} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_r} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_s} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$K_{sr} = \sum_m K_{lm} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_r} \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_s} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(9)～(11)から、 $M_{sr} = M_{rs}$, $C_{sr} = C_{rs}$, $K_{sr} = K_{rs}$ であり、式(8)の M, C, K は対称行列である。

3. 振動解析

3.1 不減衰系 いったん運動方程式ができれば、これを通常の方法で解いて振動解析を行えばよい。まず、固有振動数と固有モードを求めるためには、式(8)において $\{F\} = 0$ (外力が作用しない)、 $C = 0$ (減衰を無視する) とすれば

$$M\{\ddot{q}\} + K\{q\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、各入力対偶は同一の振動数で振動するとすれば

$$\{q\} = \{X\} e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)を式(12)に代入すれば

$$(-\Omega^2 M + K)\{X\} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)は一般固有値問題であり、これを解けば、不減衰固有角振動数 Ω_u と個有モード $\{\phi_u\}$ ($u=1 \sim v$, v は入力対偶の数) が得られる。異なる固有モード間には直交性が成立するから

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_u\}^T M \{\phi_c\} &= 0 \\ \{\phi_u\}^T K \{\phi_c\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (u \neq c) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\phi_u\}^T M \{\phi_u\} &= m_u \\ \{\phi_u\}^T K \{\phi_u\} &= k_u \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(14)に $\{X\} = \{\phi_u\}$ を代入し、前から $\{\phi_u\}^T$ を乗じて、さらに式(16)を用いれば

$$k_u = \Omega_u^2 m_u \quad \dots\dots\dots (17)$$

系が角振動数 ω の調和励振を受けるときの励振力と変位は、それぞれ

$$\{F\} = \{f\} e^{j\omega t}, \{q\} = \{x\} e^{j\omega t} \quad \dots\dots\dots (18)$$

式(18)の変位振幅 $\{x\}$ が固有モードの1次結合で表現できるとすれば

$$\{x\} = \sum_{u=1}^v \xi_u \{\phi_u\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

式(8)に式(18)と(19)を代入し、前から $\{\phi_c\}^T$ を乗ずれば

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^v \xi_u (-\omega^2 \{\phi_c\}^T M \{\phi_u\} + j\omega \{\phi_c\}^T C \{\phi_u\} \\ + \{\phi_c\}^T K \{\phi_u\}) = \{\phi_c\}^T \{f\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここでは不減衰系を考えているから、式(20)に、 $C=0$ とおき式(15)と(16)を代入すれば

$$\xi_u = \{\phi_u\}^T \{f\} / (-\omega^2 m_u + k_u) \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(19)に式(17)と(21)を代入すれば、二つの入力対偶 r と s 間の伝達関数 $G(\omega)$ (動コンプライアンス) は

$$G = \frac{x_r}{f_s} = \sum_{u=1}^v \frac{\phi_{ur} \phi_{us} / k_u}{1 - (\omega / \Omega_u)^2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 ϕ_{ur} と ϕ_{us} は、 $\{\phi_u\}$ の r 成分と s 成分を示す。

3.2 比例粘性減衰 比例粘性減衰とは、粘性減衰行列 C が質量行列 M と剛性行列 K の一次結合として表現できるという仮定を意味し

$$C = \alpha M + \beta K \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 α と β は比例定数であり、実験や経験により決定するのが普通である。式(23)に式(15)、(16)と(17)を代入すれば

$$\{\phi_u\}^T C \{\phi_c\} = 0 \quad (u \neq c) \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\{\phi_u\}^T C \{\phi_u\} = \alpha m_u + \beta k_u \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{2\Omega_u} + \frac{\beta\Omega_u}{2} \right) \frac{2k_u}{\Omega_u}$$

$$= 2\zeta_u k_u / \Omega_u \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 ζ_u はモード減衰比である。

式(15)、(16)、(24)および(26)を式(20)に代入すれば、式(21)と同様に ζ_u を求めることができる。これを式(19)に代入すれば、動コンプライアンスは

$$G = \sum_{u=1}^v \frac{\phi_{ur} \phi_{us} / k_u}{1 - (\omega / \Omega_u)^2 + 2j\zeta_u (\omega / \Omega_u)} \quad \dots\dots\dots (27)$$

3.3 一般粘性減衰 式(8)に $M\{\ddot{q}\} - M\{\ddot{q}\} = 0$ という自明の式を付加して

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

あるいはこれを書きかえて

$$A\{\dot{Y}\} + B\{Y\} = \{P\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

式(28)において、 $\{P\} = 0$ とし、また

$$\{Y\} = \{y\} e^{st} \quad \dots\dots\dots (29)$$

とおけば、式(28)は

$$(sA + B)\{y\} = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

式(30)は一般固有値問題であり、これを解けば、固有値として互いに共役な v 組 ($u=1 \sim v$) の複素数が得られる。

$$s_u = -\sigma_u + j\omega_u, s_u^* = -\sigma_u - j\omega_u \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで*印は、共役複素数を意味する。また、 ω_u は減衰固有角振動数であり、これらに対応する固有モードは

$$\{\Psi_u\} = \begin{Bmatrix} \phi_u \\ s_u \phi_u \end{Bmatrix}, \{\Psi_u^*\} = \begin{Bmatrix} \phi_u^* \\ s_u^* \phi_u^* \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32)$$

式(19)と同様に $\{y\}$ が固有モードの一次結合で表されるとすれば

$$\{y\} = \sum_{u=1}^v (\xi_u \{\Psi_u\} + \xi_u^* \{\Psi_u^*\}) \quad \dots\dots\dots (33)$$

異なる固有モード間には直交関係が成立し

$$\begin{Bmatrix} \{\Psi_u\}^T A \{\Psi_c\} = 0 \\ \{\Psi_u\}^T B \{\Psi_c\} = 0 \end{Bmatrix} \quad (u \neq c) \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\begin{Bmatrix} \{\Psi_u\}^T A \{\Psi_u\} = a_u \\ \{\Psi_u\}^T B \{\Psi_u\} = b_u \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (35)$$

共役な固有モードについても同様の関係が成立し、 a_u^* と b_u^* が定義される。式(30)の $\{y\}$ に固有モードを代入すれば

$$\begin{Bmatrix} s_u a_u + b_u = 0 \\ s_u^* a_u^* + b_u^* = 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(28)において、励振力を $\{P\} = \{P\}e^{st}$ とし、これと式(29)を式(28)に代入する。その結果に式(33)を代入し、前から固有モードの転置を乗じ、式(34)～(36)を用いれば、 ξ_u と ξ_u^* が得られる。これを式(33)に代入すれば、伝達関数は

$$G = \sum_{u=1}^v \left\{ \frac{\phi_{ur}\phi_{us}}{a_u(s-s_u)} + \frac{\phi_{ur}^*\phi_{us}^*}{a_u^*(s-s_u^*)} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

3・4 構造減衰 式(8)の C を無視し、その代わりに K を複素行列 $K+jD$ に変える。ただし、ここでは比例構造減衰を仮定し、行列 D に対しても、式(14)から求めた固有モード $\{\phi_u\}$ に関し、式(15)、(16)と同様の直交関係が成立するとする。すなわち

$$\{\phi_u\}^T (K+jD) \{\phi_c\} = 0 \quad (u \neq c) \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\{\phi_u\}^T (K+jD) \{\phi_u\} = k_u(1+ig_u) \quad \dots\dots\dots (39)$$

したがって、伝達関数は、式(22)の代わりに

$$G = \sum_{u=1}^v \frac{\phi_{ur}\phi_{us}/k_u}{1+jg_u-(\omega/\Omega_u)^2} \quad \dots\dots\dots (40)$$

3・5 全体の固有モード これまでに求めてきた固有モード $\{\phi_u\}$ は、入力対偶の自由度であったが、第2報⁽²⁾で求めたヤコビ行列 H を用いれば、全体の固有モードは容易に求められる。例えば、回路 l の中にある対偶 J_{lm} の変位 q_{lm} は

$$q_{lm} = \sum_{r=1}^v \frac{\partial q_{lm}}{\partial q_r} q_r = H_{lm} \{\phi_u\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで、 q_r は $\{\phi_u\}$ の要素であり、また $\partial q_{lm}/\partial q_r$ は行列 H の一部である。

4. 手先のたわみと剛性

開回路の手先の固有モードを

$$\{p\} = (\delta x_h \ \delta y_h \ \delta z_h \ \delta \theta \ \delta \varphi \ \delta \psi) \quad \dots\dots\dots (42)$$

とし、ヤコビ行列 H のうち、入力対偶と手先を関係づける部分を H_h とすれば

$$\{p\} = H_h \{\phi_u\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

手先上のある点の座標を、式(2)で定義した関節座標系で表現したベクトルを x_h とする。 x_h は、関節座標系に固定された点であり、時間に関係せず一定である。変形前の静止座標系を x_1 とすれば、式(1)に従って

$$x_1 = A_h x_h \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで、行列 A_h は、図2(b)に示すように、手先の関節座標から静止座標への変換行列であり、前報⁽¹⁾⁽²⁾で説明したように、運動とともに変化するパラメータである並進 $(x_h \ y_h \ z_h)$ とオイラの回転角 $(\theta \ \varphi \ \psi)$ により構成されている。それらのパラメータの変位は、式(43)により求められているから、これを用いて変位による A_h の変化量を計算すれば、式(44)により、 x_1 の変化量すなわち静止座標によって表した手先のたわみ(この場合は固有モード)が明らかになる。

次に、手先の位置剛性を求める⁽⁶⁾。式(7)と式(8)の右辺第3項と同じ表現で表せば

$$\{F_e\} = K \{q\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここで $\{F_e\}$ は、入力対偶に作用する弾性力である。これとつりあわせるために、手先を加えるべき力を、 $\{F_{eh}\}$ とする。この状態で入力対偶に $\{\delta q\}$ の仮想変位を与えたときに、それに応じて手先が $\{\delta p\}$ だけ変化したとすれば、両者の間には、式(43)の関係が成立し

$$\{\delta p\} = H_h \{\delta q\}, \{p\} = H_h \{q\} \quad \dots\dots\dots (46)$$

仮想仕事の原理から

$$\{\delta p\}^T \{F_{eh}\} = \{\delta q\}^T \{F_e\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

式(47)に式(45)と(46)を代入して整理すると

$$\{F_{eh}\} = (H_h^T)^{-1} K H_h^{-1} \{p\} \quad \dots\dots\dots (48)$$

式(48)から、手先の変位剛性 K_h は、手先座標系で

$$K_h = (H_h^T)^{-1} K H_h^{-1} \quad \dots\dots\dots (49)$$

次にこれを静止座標系に変換する。並進変位は、手先座標系と静止座標系で等しく、また回転角は、オイラ角の定義より明らかなので⁽⁹⁾

$$\begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta \theta_x \\ \delta \theta_y \\ \delta \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x_h \\ \delta y_h \\ \delta z_h \\ \delta \theta \\ \delta \varphi \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (50)$$

ここで、 θ と φ のまえにつくsとcは、それぞれsinとcosを意味する。式(50)の右辺の係数である座標変換行列を L とすれば、静止座標系における手先の位置剛性 K_{sh} は、式(49)を導いたときと同一の手順を適用して

$$K_{sh} = (L^T)^{-1} (H_h^T)^{-1} K H_h^{-1} L^{-1} \quad \dots\dots\dots (51)$$

5. 振動の解析例

産業用ロボット実機を対象にし、本報告の方法により振動解析を行う。ロボットは、図3に示すように、四つの対偶からなる空間4自由度開回路型である。対偶2～4は、図4に示すように、モータ、電磁ブレーキおよびハーモニックドライブ減速機からなる。このハーモニックドライブ減速機は、図5に示すような非線形の負荷特性を示す。

本章では、上記のうち3・4節で述べた構造減衰を仮定する。まず各節のばね定数 k と減衰定数 g を、個別に求める。そのために、ロボットをいったん分解し、

図3 ロボットの概略図

図4 対偶2～4の詳細図

図5 ハーモニック減速機の負荷特性

図6に示すように、1節だけを取り出して振動試験を行う。対偶に電磁ブレーキを作用させてモータ軸を固定し、先端P点に打撃を与えて同一点の自由振動を測定する。

図6のように、節の長さを l 、対偶まわりの慣性モーメントを I 、先端に付ける負荷質量を m とする。自由振動を x とすれば、この1自由度系の運動方程式は

$$(I + ml^2)\ddot{x} + k(1 + jg)x = 0 \quad \dots\dots\dots (52)$$

この自由振動解を

$$x = x_0 e^{\lambda t} \quad \dots\dots\dots (53)$$

として、式(52)に代入すれば

$$\lambda^2 = -\Omega^2(1 + jg), \quad \Omega^2 = k/(I + ml^2) \quad \dots\dots\dots (54)$$

すなわち

$$\lambda = -\Omega \sqrt{(\sqrt{1+g^2}-1)/2} + j\Omega \sqrt{(\sqrt{1+g^2}+1)/2} = -\Omega \zeta + j\omega_d \quad \dots\dots\dots (55)$$

式(55)を式(53)に代入すれば、

$$x = (x_0 e^{-\Omega \zeta t}) \cos \omega_d t \quad \dots\dots\dots (56)$$

したがって、 x_0 から n 周期遅れた振幅を x_n とすれば、対数減衰率は

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_0}{x_n} = \frac{2\pi}{g} (\sqrt{1+g^2}-1) \approx \pi g \quad \dots\dots\dots (57)$$

よって

$$g = \frac{1}{n\pi} \ln \frac{x_0}{x_n} \quad \dots\dots\dots (58)$$

次に、ばねこわさ k を求める。式(54)と(55)から

$$\Omega^2 = \frac{2\omega_d^2}{\sqrt{1+g^2}+1} = \frac{k}{I + ml^2} \quad \dots\dots\dots (59)$$

いま、負荷質量を m_1 と m_2 の2とおりに変えて実験したときの角振動数を、それぞれ ω_{d1} と ω_{d2} とすれば、式(59)にこれらを代入して

$$I = k(\sqrt{1+g^2}+1)/2\omega_{d1}^2 - m_1 l^2$$

表1 各節の g と k の実験値

Joint Number	1	2	3	4
g	0.1528	0.0383	0.2096	0.1810
k ($\times 10^4$ Nm/rad) ($\times 10^3$ kgf·m/rad)	2.39 {2.43}	10.2 {10.4}	2.90 {2.96}	2.48 {2.53}

図6 ロボットを分解した一つの節

$$=k(\sqrt{1+g^2}+1)/2\omega_{\theta 2}^2-m_2l^2$$

したがって

$$k=\frac{2(m_1-m_2)l^2\omega_{\theta 1}^2\omega_{\theta 2}^2}{(\sqrt{1+g^2}+1)(\omega_{\theta 2}^2-\omega_{\theta 1}^2)} \dots\dots\dots (60)$$

自由振動波形から、式(58)を用いて g の値を求めた。次に、負荷質量を最大 2.75 kg の範囲で 11 とおりに変化させた減衰固有振動数 ω_g の測定結果から、式(60)を用いて k の値を求めた。その結果を、表 1 に示す。

以上求めた各節の g と k を用いて、図 3 のままの形状における振動数、固有モードおよび伝達関数を計算する。一方、実験は各対偶のモータ軸を電磁ブレーキで固定し、打撃試験を行って、小形加速度計によって応答加速度を測定した。

図 7 に、1 次から 4 次までの固有振動数と固有モー

ドを示す。(a)～(d)は実験値、(a')～(d')は計算値である。4 次以外の固有振動数は、両者が良く一致している。固有モードは、2 次が若干異なる。

図 8 に、3 とおりの伝達関数(アクセラランス)を示す。(a)は図 3 の 1 の自己伝達関数、(b)は 1 と 2 の間の相互伝達関数、(c)は 4 と 5 の間の相互伝達関数である。実線が計算結果、点線が実験結果であり、いずれも両者は良く一致している。

次に、同じ産業用ロボットの状態を図 9 のように変えて、同様の計算と実験を行う。

図 10 に 1 次から 4 次までの固有振動数と固有モードを示す。(a)～(d)は実験値、(a')～(d')は計算値である。本例でも 4 次以外の固有振動数は、両者が良く一致している。

図 11 に、3 とおりの伝達関数(アクセラランス)を

図 7 固有振動数と固有モード

図 8 伝達関数(アクセラランス)

図 9 ロボットの概略図

図 10 固有振動数と固有モード

図 11 伝達関数 (アクセラランス)

示す。(a)は図9の7と8, (b)は7と9, (c)は10と11の間の相互伝達関数である。実線が計算結果, 点線が実験結果であり, いずれも両者は良く一致している。

6. ま と め

閉回路, 開回路または両者の複合回路を有する機構やロボットを, 線形系と仮定したときの運動方程式を作成し, 不減衰, 比例と一般の粘性減衰, および構造減衰のもとにこれを解いた。また, 開回路ロボットにおける手先のたわみと剛性を導いた。次に, 実機の産業用ロボットの振動解析を, 本報告で示す方法によって行い, 実験結果と比例した。両者は良く一致し, 本解析方法の有効性が検証できた。

本研究をご指導いただいた松下電器産業(株)生産技術研究所 山内信也部長, 並びに本研究にご助力をい

ただいた平田一行氏(当時東工大大学院)に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 長松・斎藤・一柳, 第931回講演会講演前刷, 論文 No. 85-0042 A (昭60-7).
- (2) 長松・斎藤・一柳, 第931回講演会講演前刷, 論文 No. 85-0043 A (昭60-7).
- (3) Uicker, J. J. Jr., Denavit, J. and Hartenberg, R. S. *Trans. ASME, Ser. E*, 31(1964), 309.
- (4) Denavit, J., Hartenberg, R. S., Razi, R. and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. E*, 32(1965), 903.
- (5) Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, 91(1969), 251.
- (6) Sneth, P. N. and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, 93(1972), 102.
- (7) Sneth, P. N. and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, 94(1972), 454.
- (8) 内山, 機論, 45-391, C(昭54), 314.
- (9) 青木・長松, 工業力学, (昭57), 160, 養賢堂.