部分構造合成法による振動解析*

(第5報, 同定した特性行列を用いる方法)

大熊政明**, 長松昭男**

Vibration Analysis by Substructure Synthesis Method (5th Report, A Method with Identified Characteristic Matrices)

by Masaaki OOKUMA and Akio NAGAMATSU

A new substructure synthesis method is proposed. A total structure is divided into some components(substructures). The characteristic matrices(the mass, the damping and the stiffness matrices) of reduced degrees of freedom are identified for each component by a theoretical way or by a vibration test. The identified characteristic matrices of all components are composed to make the reduced equation of motion for the total structure. The three methods are adopted to identify the characteristic matrices of each component, namely Guyan's reduction, identification from the transfer functions and identification from the modal parameters. The vibration of a model structure composed of three triangular plates is calculated by the proposed methods, and the results are compared with the calculated result by direct use of the finite element method. Next, the vibration of an actual crank shaft of an internal combustion engine is calculated by the proposed method, and the result is compared with the experimental result and the calculated result by the component mode synthesis method.

Key Words: Vibration, Natural Frequency, Natural Mode, Modal Parameter, Identified Characteristic Matrices, Substructure Synthesis Method

1. ま え が き

部分構造合成法は、機械または構造物(全系と呼ぶ)をいくつかの部品または部分構造(分系と呼ぶ)に分け、各分系の動特性を実験または理論解析によって求め、すべての分系の動特性を結合して全系の運動方程式を作成し、それを解いて全系の動特性や挙動を求める方法の総称である⁽¹⁾。著者らはこれまで、部分構造合成法を伝達関数合成法とモード合成法に大別してきた。そして、これまでに、伝達関数合成法の一つとして縮小インピーダンス合成法⁽²⁾を、またモード合成法の一つとして区分モード合成法⁽³⁾⁽⁶⁾を提案した。

本報告では、これらのどちらにも属さない一つの方法を提案する。この方法は、分系の動特性を、小自由度の特性行列(質量行列、減衰行列および剛性行列をいう)の形で表現するものであり、特性行列合成法と呼ぶことができる。

特性行列合成法の考え自体は別に新しいものではなく、従来から超要素(スーパーエレメント)法⁽⁴⁾と呼ばれる方法がこれに該当する。超要素法では、有限要素

法によって作成した分系の特性行列をグヤンの静縮小法によって近似的に縮小する方法である。本報告で示す方法は、この超要素法とは異なり、振動試験や理論解析により求めた動特性を用いて小自由度の特性行列を同定する。用いる動特性としては、伝達関数とモード特性が考えられる。伝達関数から特性行列を同定するには、著者らが提案した方法⁽⁵⁾を用いればよい。モード特性を用いて特性行列を同定する方法は、本報告で説明する。

いったん分系の特性行列が求められれば、その分系は有限要素法における一つの要素と全く同一の扱いをし、通常の有限要素法と同一の手順で、全系の小自由度運動方程式を作成して解けばよい。

特性行列合成法には、モード解析など通常の有限要素法に用いられるすべての解法を用いることができる。有限要素法や他の部分構造合成法と自由に一体化できお互いの長所を生かした解析ができる、同定した特性行列は分系の結合状態を変えても有効であるからデータベース化に適している、分系の入力伝達関数でもモード特性でもよい、実験との結合が簡単である、などの特色がある。しかし他方では、同定する自由度の選定が不適当であれば特性行列が求まらないことがある、という欠点があり、今後検討を要する。本

* 昭和60年7月17日 第931回講演会において講演、原稿受付 昭和60年1月21日。

** 正員、東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

報告では、まず超要素法、伝達関数を用いる方法およびモード特性を用いる方法の3種類の特性行列合成法の理論を説明する。次に、平板模型とエンジン実機のクランク軸に特性行列合成法を適用し、相互に比較するとともに、精度や有用性に関する検討を行う。

2. 解析方法

2.1 超要素(スーパーエレメント)法 ある部分構造の質量行列を $[M]$ 、剛性行列を $[K]$ とし、超要素法の縮小過程で消去される自由度を添字 a 、残される自由度を添字 b で表す。自由度 a には外力が作用しないとすれば、不減衰振動の運動方程式は、周波数領域で次のようになる。

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_b \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)において、 $\{\chi\}$ は変位振幅ベクトル、 $\{f_b\}$ は外力ベクトルを表す。式(1)において慣性項を省略し、上半分の関係式から消去される自由度の変位 $\{\chi_a\}$ を残される自由度の変位 $\{\chi_b\}$ で表す。すなわち、

$$\{\chi_a\} = -[K_{aa}]^{-1}[K_{ab}]\{\chi_b\} = [T]\{\chi_b\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)の関係を用いて元の質量行列と剛性行列を $\{\chi_b\}$ の自由度に等しい行列に縮小する。縮小後の質量行列を $[\bar{M}_{bb}]$ 、剛性行列を $[\bar{K}_{bb}]$ とすれば、

$$[\bar{M}_{bb}] = [T^T I] \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$[\bar{K}_{bb}] = [T^T I] \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

これらの行列で表現される分系モデルを超要素と呼ぶ。分系の超要素法による特性行列を構造物の結合状態のように重ね合せ、全系の縮小した運動方程式を作成して解く。

上記の説明からわかるように、この方法は縮小過程で慣性項を無視し、その補正も行わないので、剛性項が支配的となる低次周波数領域でのみ適用できる。また、残す自由度の選び方(どの節点の自由度を残すか)によって解析精度がかなり変化する。隣接分系との結合部自由度は必ず残す必要があるが、精度のよい解析を行うためには、そのほかに、振幅の大きくなる自由度、質量の大きい自由度および減衰の大きい自由度は残す必要がある。また、残す自由度は分系全体になるべく均等に分布しているほうがよい。しかし、これらを同時に満足させるのは、一般にかなり困難である。

2.2 振動応答から特性行列を同定する方法 この方法は、実験で得た強制振動応答(通常は伝達関数)のデータから直接特性行列(質量、剛性、減衰の各特

性行列)を同定するために研究され始めている方法である。

粘性減衰を仮定するときの運動方程式は、

$$[K]\{x\} - \omega^2[M]\{x\} + j\omega[C]\{x\} = \{f\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

構造物の励振点を励振力 $\{f\}$ で励振して測定点の応答 $\{x\}$ を測定すれば、それらのデータは式(5)の関係を満たすはずである。そこで、式(5)の $\{f\}$ と $\{x\}$ にそれらを代入すれば、式中での未知数は特性行列のみとなる。特性行列は対称行列であることを考慮しながら、式(5)を転置し、測定されたすべての周波数のデータを代入してできる関係式を一つにまとめると、

$$[X][K] - [\omega^2][X][M] + j[\omega][X][C] = [F] \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、行列 $[X]$ は、各行に各周波数における応答(変位振幅)が入った行列である。行列 $[\omega]$ と $[\omega^2]$ は、対角成分に各測定周波数の角振動数とその自乗が入った対角行列である。行列 $[F]$ は、各行に各測定周波数における励振力ベクトルが入った行列である。

式(6)を実部と虚部に分けると、

$$\begin{bmatrix} [X_R] - [\omega^2][X_R] - [\omega][X_I] \\ [X_I] - [\omega^2][X_I] \quad [\omega][X_R] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K] \\ [M] \\ [C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_R] \\ [F_I] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

のようになる。なお添字 R は実部、 I は虚部を意味する。式(7)を、未知行列がそれぞれ対称行列であることを考慮しながら解く。こうして実験的に同定された特性行列を用いて部分構造合成法など各種の解析に利用する。

2.3 モード特性から特性行列を同定する方法

この方法が、本報告で提案する解析方法である。本方法で必要な入力データは、固有振動数と固有モードである。これらはどのような方法で準備してもよい。例えば、モード解析の曲線適合により、実験データから得たものでもよいし、有限要素法などの計算で求めたものでもよい。ここでは、これらのデータを有限要素法で求めるとして説明する。

準備段階として、分系を節点数 n で有限要素分割し、剛性行列 $[K]$ と質量行列 $[M]$ を有限要素法で作成する。ここでは、1節点の自由度を6とする。これらの特性行列を用いて固有値解析し、1次から p 次($p < 6n$)までの固有振動数 f_i ($i=1 \sim p$) と、質量行列に関して正規化された自由度 $6n$ の固有モード $\{\phi_i\}$ ($i=1 \sim p$) を求める。

さて、1次から $6n$ 次までのすべての固有モードを求め、それらを各列に並べた自由度 $6n$ のモード行列

$[\Phi]$ (正方行列) を作成すれば, この行列 $[\Phi]$ は正則行列 (逆行列の存在する行列) であり, 元の特性行列である剛性行列 $[K]$ と質量行列 $[M]$ は,

$$[K] = ([\Phi]^{-1})^T [k_i] [\Phi]^{-1} \dots\dots\dots (8)$$

$$[M] = ([\Phi]^{-1})^T [I] [\Phi]^{-1} \dots\dots\dots (9)$$

ここで, $[k_i]$ は自由度 $6n$ の対角行列であり, その対角成分は $k_i = (2\pi f_i)^2$ である. また, 式(9)中の $[I]$ は自由度 $6n$ の単位行列である.

こうして構造物は n 点の全自由度を用いて解析されるが, その結果の出力情報として必要なものは, 一般に観測点や後で他の分系と結合する点のような特別な節点間の伝達関数や振動モードの比率 (固有モード形) および固有振動数のみである. そして, そのような自由度数は一般に少ない場合が多い. そこで解析対象周波数範囲内の振動特性を十分な精度で表現することができる自由度の小さい特性行列をはじめから同定して利用することは有効である.

解析対象周波数範囲の振動を 1 次から r 次 ($r \leq p$) までのモード特性で十分よく近似表現できる場合を考える. 自由度 $6n$ の固有モード $\{\phi_i\} (i=1 \sim r)$ から, 残しておきたい自由度のみの成分 $\{\psi_i\}$ を抜き出し, 各次数についてのそれらの成分を列に並べた部分固有モード行列 $[\Psi]$ を作成する. 残しておきたい自由度の合計が r より小さい場合には, 行列 $[\Psi]$ は列数のほうが行数より大きくなるので, 別の自由度の成分を加えて行列 $[\Psi]$ を正方行列にする. 逆に, 残しておきたい節点の自由度の合計が r より大きい場合には, r 次より高次のいくつかの固有モード成分を行列 $[\Psi]$ に加えて正方行列とする. このように追加される固有モードは, 解析対象周波数範囲内の伝達関数の精度に悪影響をあまり与えない限り, 必ずしも十分な精度を有する必要はない. もちろん精度のよい固有モードを利用することができれば, 好ましいことは明らかである.

このようにしてできた部分固有モード行列 $[\Psi]$ に逆行列が存在すれば,

$$[\bar{K}] = ([\Psi]^{-1})^T [\Omega_i^2] [\Psi]^{-1} \dots\dots\dots (10)$$

$$[\bar{M}] = ([\Psi]^{-1})^T [I] [\Psi]^{-1} \dots\dots\dots (11)$$

によって小さい自由度の特性行列を同定することができる. なお, 式(10)中の行列 $[\Omega_i^2]$ は自由度 r (行列 $[\Psi]$ に r 次より高次の固有モードも加わる場合はそれをも加えた合計次数) の対角行列であり, $\Omega_i = 2\pi f_i$ は i 次の固有角振動数である.

式(10)と(11)で求められる特性行列の自由度は, 重要な節点の自由度のみとなり小さく, かつ, 振動特性は解析周波数範囲内では元の系と一致しているので,

分系の特性行列データとして保存利用することができる.

ただし, 次の点に注意する必要がある. それは, 式(10)と(11)で用いる逆行列 $[\Psi]^{-1}$ をうまく求めることができない場合があり, そのために特性行列を同定できない場合が生ずる, ということである. 現在のところ, これは次のような場合に生じることがわかっている. (i) 振動モードの節となる点の自由度や無意味な方向自由度成分ばかり選択してしまう場合 (例えば, 平板の振動において, 面外振動となる曲げモードを解析するにもかかわらず, 面内方向自由度ばかりを選択してしまう場合), (ii) 部分的な場所の連続した点ばかりを選択したり, 選択した自由度成分の固有モードが同じような振幅比になり, 行列 $[\Psi]$ が数値計算上特異に近くなる場合, などである. そのような場合には, 選択して残す節点の自由度の数を変えたり, 組合せを変えて同定し直す. それでも同定が困難な場合には, 本方法の適用は避ける.

物理的性質として, あらゆる境界条件において同定剛性行列 $[\bar{K}]$ は非負定値, 質量行列 $[\bar{M}]$ は正定値行列とならなければならない. そこで, 式(10)で求められる剛性行列 (剛体モードを生じない境界条件下) と式(11)の質量行列が必ず正定値行列となること (証明 1) と, それらの行列 $[\bar{K}]$, $[\bar{M}]$ を用いた固有値問題から求められる第 i 次の固有振動数が f_i となり, それに対応する固有モードが $\{\psi_i\}$ (行列 $[\Psi]$ の第 i 列) となること (証明 2) を, 以下に証明する.

(証明 1) 行列 $[\Psi]$ は正則行列 (逆行列の存在する行列) と仮定しているので, 自由度が行列 $[\Psi]$ と等しい任意のベクトル $\{x\}$ は, 次のように行列 $[\Psi]$ の一次結合で表すことができる (このことは証明 3 で証明する).

$$\{x\} = [\Psi] \{\xi\} \dots\dots\dots (12)$$

ベクトル $\{\xi\}$ は行列 $[\Psi]$ の各列の $\{x\}$ への寄与率を示すベクトルである. 行列 $[\bar{K}]$ が正定値行列であることを示すには, 次の 2 次形式の値が必ず正になることを示せばよい.

$$\{x\}^T [\bar{K}] \{x\} \dots\dots\dots (13)$$

式(13)に式(10)と式(12)を代入して変形すると,

$$\begin{aligned} \{x\}^T [\bar{K}] \{x\} &= \{\xi\}^T [\Psi]^T \{([\Psi]^{-1})^T [\Omega_i^2] [\Psi]^{-1}\} [\Psi] \{\xi\} \\ &= \{\xi\}^T [\Omega_i^2] \{\xi\} \\ &= \sum_{j=1}^s \Omega_j^2 \xi_j^2 > 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで, s はベクトル $\{x\}$ と行列 $[\Psi]$ の自由度数, ξ_j はベクトル $\{\xi\}$ の第 j 成分を表す. 式(14)から, 式

(12)の $\{x\}$ が零でない限り同定特性行列は正定値になることがわかる。

同定質量行列 $[\bar{M}]$ が必ず正定値行列になることは、式(14)において $[\bar{K}]$ を $[\bar{M}]$ に、また、 $\Omega_i^2=1$ とすれば証明できる。

(証明2) 次の固有値問題を解く。

$$([\bar{K}]-\lambda[\bar{M}])\{x\}=\{0\} \quad (15)$$

式(15)に式(10)~(12)を代入し、左側から $[\Psi]^T$ を乗ずれば

$$([\Omega_i^2]-\lambda[I])\{\xi\}=\{0\} \quad (16)$$

式(16)から、固有値は S 個求められ、第 i 次の固有振動数は $\Omega_i/2\pi$ 、すなわち f_i となる。また、式(16)の λ に Ω_i^2 を代入すれば $\xi_i=1$ 、 $\xi_j(j \neq i)=0$ となるので、 $\lambda=\Omega_i^2$ に対応する固有モードは、式(12)から行列 $[\Psi]$ の第 i 列のベクトルにほかならない。

(証明3) 行列 $[\Psi]$ は正則行列であるからその逆行列はただ一つ存在する。そこで、その逆行列を $[\Psi]^{-1}$ で表せば、

$$[\Psi][\Psi]^{-1}=[I] \quad (17)$$

自由度 S の任意のベクトル $\{x\}$ は、明らかに

$$\{x\}=[I]\{x\} \quad (18)$$

と表現できるから、式(18)に式(17)を代入すれば

$$\{x\}=[\Psi][\Psi]^{-1}\{x\} \quad (19)$$

ここで、

$$\{\xi\}=[\Psi]^{-1}\{x\} \quad (20)$$

と書き換えると、式(19)は

$$\{x\}=[\Psi]\{\xi\} \quad (21)$$

すなわち、任意ベクトル $\{x\}$ は行列 $[\Psi]$ の一次結合で一義的に表すことができる。

3. 解 析 例

ここでは、2種類の解析例を示す。第1は図1に示すように、三角形平板3枚が並進成分のみで結合するモデルである。第2に、実際のクランク軸を対象に、本報告で提案するモード特性から特性行列を同定し利用する例を示す。なお減衰は無視する。

3・1 平板モデル 図1に示すように3枚の三角形平板が白丸印の節点で並進成分のみの結合をしている系の5 kHzまでの面外(曲げ)振動を解析する。

まず、この系を構成する2種類の三角形平板についてそれぞれ解析する。図1の平板Aについて解析した固有振動数を表1に示す。解析対象周波数範囲内には3次までの固有振動数が含まれている。有限要素法を全体に直接適用する場合を、FEMの欄に示す。図1中で、平板Aの黒丸と白丸の4点を選択してS.E.(超要素法)で計算した結果を、「S.E.」の欄に示す。「CMS」

の欄は区分モード合成法の結果である。次に、FEMで求めたモード特性から、黒丸と白丸4点の面外方向成分を抜き出して特性行列を同定し、その同定された特性行列の固有値解析から得た固有振動数を「MK from modal P.」の欄に示す。また、同じ4点の面外方向成分の6 kHzまでの伝達関数をFEM応答解析で求め、それから特性行列を同定し、得られた特性行列から求めた固有振動数を「MK from response」の欄に示す。

三角形平板Bについても、平板Aと同様に、それぞれの解析を行う。固有振動数の結果を表2に示す。平板Bのほうは、解析周波数範囲内に5次までの固有振動が入るので、同定の際に選択する節点は、図1に示すように黒丸と白丸を合わせて6点とする。

表1と表2を見ると、まず超要素法で求めた結果は、高次になるにつれて精度が悪くなることがわかる。残す節点を4点とした平板Aについては、S.E.では1次のみしか十分な精度が得られていない。そして、誤差は周波数の高いほうが大きくなる。この原因は、2章で説明したように、超要素への自由度の縮小の際に慣性項を無視する、いわゆるグヤンの静縮小を行い、その補正手段を何も用いていないからである。

一方、CMSでは、分系の計算過程の中でグヤンの静縮小を用いているものの、内部領域(図1中の丸印で示した節点以外)についての振動モードを用いてその補正を行っているので、精度がよい。

さて、本報告で提案する、モード特性から特性行列を同定する方法では、明らかにFEMの結果とほぼ完全に一致している。これは、FEMで求めたモード特性を利用するので当然ではあるが、このようにして同定

表1 三角形平板Aの固有振動数

Order	FEM	CMS	S.E.	MK from modal P.	MK from response
1	1218	1219	1238	1218	1231
2	4720	4722	5609	4718	4751
3	5211	5228	6147	5205	5201
---	---	---	---	---	---
4	12058	12114	15994	12031	13876

(Hz)

図1 三角形平板モデル

した特性行列が有用となる場合がしばしばあると思われる。

伝達関数 (6 kHz 以下) から同定された特性行列では、用いた伝達関数の周波数範囲内にある固有振動数については、FEM とよく一致する。それより高次の固有振動数と固有モードは、伝達関数に含まれている残余成分の影響を見積る役目をはたしており、正解に一致しなくてよい。なお、この残余成分についても、測定点数を増やせば、正解に近づいていくことがわかっている。

以上で2種類の分系となる三角形平板単体の解析を終え、自由度の小さい特性行列が同定されたので、それらを重ね合わせて全体系の解析を行う。解析結果の固有振動数を表3に示す。

モード特性から同定した特性行列を用いた方法とCMSの結果は、解析周波数範囲全域で、基準となるFEMの結果によく一致している。伝達関数から同定された特性行列を用いた結果は、低次でかなり大きな誤差を生じている。この原因は、各平板単体の同定に用いた周波数範囲の伝達関数が多少の誤差を含んでいるためである。これは残余成分の影響であり、同定に用いる伝達関数の周波数範囲をもっと高域まで広げ、測定点数を増やすことによって改善される。

超要素法では、各平板単体についての結果と同様に、高次になるにつれて精度が大きく悪化している。

3・2 クランク軸への適用例 実機のスリリングエンジンのクランク軸を用いた、本方法の適用例を示す。図2は、供試クランク軸の概略図である。本例では有限要素分割の節点数が多く、FEMの直接適用は困難なために行っていない。

表2 三角形平板Bの固有振動数

Order	FEM	CMS	S.E.	M K from modal P.	M K from response
1	236	236	236	236	236
2	620	620	621	620	620
3	2827	2834	2864	2825	2825
4	4836	4895	4979	4832	4832
5	5321	5335	5599	5318	5317
---	---	---	---	---	---
6	9062	9600	9635	9055	8195

(Hz)

表3 三角形平板モデル全系の固有振動数

Order	FEM	CMS	S.E.	M K from modal P.	M K from response
1	621	621	622	631	422
2	976	976	982	981	790
3	2102	2106	2175	2177	2481
4	2942	2943	3136	3232	3066
5	3170	3174	3270	3239	3173
6	4720	4723	5329	4718	4751
7	4720	4723	5603	4718	4751
8	5035	5075	6147	5034	4935
9	5276	5291	6147	5272	5293

(Hz)

そこで、まず図2に示すように全体を20個の分系に分割する。最左のテーパ軸部分はアイソパラメトリック立体要素 (2次要素) を用いて節点数81で要素分割し、他のすべての軸部分は同じ有限要素を用いて節点数51で要素分割する。フライホイールはアイソパラメトリックの厚肉シェル (2次要素) を用い節点数88点、腕部 (クランク部) は三次元四面体要素を用いて節点数111点で有限要素分割する。そして、それぞれの分系間の結合面は、常に平面を保ち変形しないという拘束条件を与える。図3に腕部の有限要素分割の例を示す。

表4に固有振動数の結果を示す。EXP.の欄は実験結果、CMSの欄は区分モード合成法の結果、S.E.の欄は超要素法の結果、をそれぞれ示す。超要素法では、残す節点として分系間に生じる結合点を選んだ。

「A」欄の結果は、区分モード合成法で解析した結果 (固有振動数と固有モード) を用いて、4点 (分系1, 6, 14, 19中の各1点ずつ) の自由度に相当する自由度24の特性行列を同定し、その特性行列を用いて固有値解析した結果である。

「B」欄の結果は、図4に示すように、クランク軸の左半分について区分モード合成法で解析し、得られた結果から4節点 (クランク軸の右半分と結合する点を含める) の特性行列を同定して、クランク軸の左半分の10個の部分構造物とともに用いて、クランク軸全体を区分モード合成法で解析したものである。

「C」欄は、図5に示すように、クランク軸の左右半分ずつをそれぞれ区分モード合成法で解析し、得られた結果から左半分に関しては4節点、右半分に関しては3節点の自由度に相当する特性行列を同定し、それらを結合点について重ね合わせて6節点の自由度の特性行列を作成し、固有値解析した結果である。

実験では、12次の固有振動数と固有モードを求め

図2 クランク軸の概略図

た。区分モード合成法の結果は、12次を除いては、実験結果とよく一致している。「A」欄の結果から、区分モード合成法の解析結果を再現できている特性行列が同定できていることがわかる。「B」と「C」欄も満足できる結果を示しているが、「A」欄の結果に比べると、わずかに誤差が大きいことがわかる。この原因は、前モデルに対しても述べたように、クランク軸の左半分については25次以上の固有振動成分、右半分については19次以上の固有振動成分による残余成分である。すなわち、実際には存在する残余成分の影響を考慮できないために誤差が生じる。

超要素法では、第1のモデルについての結果と同様に、高次で誤差が大きくなっている。ただ、本解析においては残す節点を21個とし、クランク軸全体にほぼ均一になるように選んだので、かなりよい結果を得ることができた。

図6には、点F(図2参照)をY方向に励振した時の点F自身のY方向の応答の伝達関数を示す。破線が実験結果である。実線は全体を区分モード合成法で直接解いた結果を示す。一点鎖線(ほとんど実線と一致)は全体に対する固定特性行列を用いた計算(A)の結果を表す。

図7も点FをY方向に励振した時の点F自身の

表4 クランク軸の固有振動数

Order	EXP.	CMS	A	B	C	S.E.
1	200	203	205	205	209	206
2	245	258	257	262	260	263
3	425	401	385	405	407	417
4	513	500	497	509	497	522
5	541	539	539	553	554	541
6	694	664	656	670	680	736
7	907	859	851	860	863	962
8	1086	1139	1134	1140	1150	1145
9	1131	1102	1103	1103	1097	1182
10	1352	1354	1355	1371	1385	1372
11	1674	1688	1687	1705	1711	2051
12	1714	1484	1484	1486	1491	1702
13	—	1743	1743	1744	1735	2223
14	—	1749	1748	1749	1741	2604

(Hz)

図3 腕部の有限要素分割の概略図

Y方向の応答の伝達関数を示す。実線が全体に対する同定特性行列を用いた計算(A)である。一点鎖線はクランク軸の左半分の同定特性行列と区分モード合成法を組合せた計算(B)の結果であり、二点鎖線はクランク軸の左右半分それぞれの同定特性行列を重ね合せて作成した特性行列を用いた計算(C)の結果である。破線は超要素法で解析した結果を表す。

図6から、区分モード合成法と計算(A)による伝達関数は実験結果とかなりよく一致していることがわかる。また、計算(A)による結果は区分モード合成法の結果とほぼ完全に一致しており、同定特性行列が区分モード合成法で求めた振動特性を精度よく再現できていることがわかる。図6を参照しながら図7をみると、超要素法による結果は伝達関数においても高周波域になると精度が悪くなり、他の計算結果より精度が悪いことがわかる。

このように本報告で提案する特性行列同定法は、著者らが以前に提案した区分モード合成法⁽³⁾と自由に混

図4 計算(B)の手順

図5 計算(C)の手順

図 6 伝達関数

(励振点: 点 F (Y 方向), 応答点: 点 F (Y 方向))

合して利用し、効率のよい振動解析を行うことができる。また、同じく著者らが提案した縮小インピーダンス合成法⁽²⁾はもちろん、他の部分構造合成法すべて⁽¹⁾との混合についても、同じことがいえる。

本解析例では、わずかの自由度 (A では 24, C では 36) の運動方程式でクランク軸フライホイール系の少なくとも 2.5 kHz までの動特性が精度よく表現できることが明らかになっている。このことは、エンジン全体の振動解析を行うにあたり、各部品の自由度が制限される場合に、本解析方法が極めて有効であることを意味する。

4. む す び

本報告では、特性行列合成法という新しい部分構造

図 7 伝達関数

(励振点: 点 F (Y 方向), 応答点: 点 F (Y 方向))

合成法を提案した。そして、3種類の特性行列同定法について説明した。また平板モデルと実機エンジンのクランク軸に本方法を適用し、その有用性を検討した。

文 献

- (1) 長松, モード解析, (昭 60), 培風館.
- (2) 長松・大熊, 機論, 46-407, C(昭 55), 703.
- (3) 大熊・長松, 機論, 49-443, C(昭 58), 1120.
- (4) Gockel, M. A., *MSC/NASTRAN Handbook for Super-element Analysis*, MSC/NASTRAN Version 61, (1981), MSC Co.,
- (5) 大熊・長松, 機論, 51-464, C(昭 60), 719.
- (6) 大熊・長松, 機論, 49-446, C(昭 58), 1876.

討 論

〔質問〕 藤 川 猛・頭 井 洋

〔(株)神戸製鋼所機械研究所〕

モード特性を用いる特性行列同定法について、以下の点についてうかがいたい。

(1) 分系間の結合自由度が大きい場合、貴法の適用は難しいと思われるがどうか。また、同定自由度の数や位置、方向をどのように選べばよいか。

(2) 従来の不拘束モードを用いるモード合成法と比べ、精度や計算効率はどうか。

(3) 図 1 の平板モデルで、結合点に回転成分も含む場合の精度についてはどうか。

(4) 図 2 のクランク軸では、同定自由度は 1 点あたり 6 個とおられるようであるが、回転の自由度はどのようにして決められたのか。

〔回答〕 (1) 本方法の有効性は、同定される特性行列の自由度が小さい場合に顕著に現れる。結合自由度がひじょうに大きい場合の適用は目的としていな

い。同定自由度の数は、解析周波数範囲の伝達関数を十分な精度で表現できる程度の数とし、必ず結合点に相当する節点は選ぶ必要がある。方向については、たとえばモーメントは伝わらないとみなせる点では回転自由度は省略できるように、結合の条件によって違ってくる。

(2) 同定特性行列の自由度の設定の仕方にもよるが、不拘束モード合成法と同等の精度が得られると思う。また、本方法の計算過程は単純であり、通常自由度も小さいので、計算効率も同等によいと思う。具体的に比較はしていない。

(3) 実際には検討していないが、本報中での解析例と同等の精度になると思われる。

(4) クランク軸の結合面は常に平面を保ち変形しないと仮定し、軸円周上の節点変位と中心位置での六自由度変位を関係づけて決定している。