任意形状コイルばねの振動*

長屋 幸助**, 武田 定彦**, 中田 貴隆***

Vibration of Coil Springs with Arbitrary Shape

by Kosuke NAGAYA, Sadahiko TAKEDA, and Yoshitaka NAKATA

This paper is concerned with the method for analyzing the vibration of coil springs with arbitrary shape. In the analysis, the field transfer matrix is derived from the solution of the fundamental equation of the curved beam theory. The transfer matrix is given by combining this field transfer matrix and the point transfer matrix. The analysis derives the frequency equation which is applicable to the coil spring of general shape. Numerical calculations have been carried out for HYPERBOLOIDAL springs and barrel springs. Experimental tests are also carried out to verify the present theoretical results.

Key Words: Machine Elements, Vibration, Coil Spring, Surging, Transfer Matrix, HYPERBOLOIDAL Spring, Barrel Spring

1. 結 言

ばねは機械の基礎的な要素で古くから注目され、その応力問題^{(1)~(11)}、および振動問題^{(12)~(14)}については多くの研究がなされてきた。とくに、ばねのサージンは機械に重大な悪影響を及ぼすため、井上、清水ら⁽¹²⁾⁽¹³⁾および沢登ら⁽¹⁴⁾により、詳細な検討がなされている。しかし、これらはいずれも円筒コイルばねの問題を取扱っており、それ以外の形状のばねの振動を取扱ったものはほとんど見受けられないようである。しかし実際には異形ばねも多くの分野で使用されており、今後ますますその使用範囲が広がりつつあり、その振動特性を解明することは重要なことと思われる。本報はこれらの現状にかんがみ、任意形状ばねの振動問題の理論解析を行うとともに、実験も行い、理論結果の妥当性を検証したものである。理論解析では曲りばり理論に基づく基礎方程式の解より格間マトリックスを求め、それに格点マトリックスを組合せて伝達マトリックスを作製し、伝達マトリックス法により振動方程式を誘導した。具体的数値例としては、鼓形コ

イルばねならびにたる形コイルばねを取り上げ、これらの振動数を求め、形状の変化に対する振動数の変化を明らかにした。また従来解析されてきた円筒コイルばねの結果をも求め、本解との比較検討を行った。

2. 解 析

2.1 格間マトリックスの作製 円筒コイルばねについては、曲りばり理論を用いて Love⁽¹⁵⁾および高田⁽⁶⁾らにより静力学の基礎方程式が与えられ、応力問題が解析された。一方、沢登⁽¹⁴⁾はその方程式を用いて剛性マトリックスを作製し、有限要素法により円筒コイルばねの振動を解析した。本報ではこれらの研究と同じく曲りばり理論を用いて格間マトリックスを作製する。静荷重を受ける曲りばりの基礎方程式は、

$$(\partial X / \partial s) - \kappa Y = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1 \cdot a)$$

$$(\partial Y / \partial s) + \kappa X - \tau Z = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1 \cdot b)$$

$$(\partial Z / \partial s) + \tau Y = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1 \cdot c)$$

$$(\partial T / \partial s) - \kappa H = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1 \cdot d)$$

$$(\partial H / \partial s) + \kappa T - \tau M - Z = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1 \cdot e)$$

$$(\partial M / \partial s) + \tau H + Y = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1 \cdot f)$$

ここで X, Y, Z は断面力の x, y, z 成分, T, H, M は断面モーメントの x, y, z 成分, κ は素線軸の曲率, τ は素線軸のねじれ率, s は素線軸に沿っ

* 昭和59年10月17日 第62期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和59年11月27日.

** 正員, 群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1).

*** 学生員, 群馬大学大学院.

て測った素線の長さである (図 1)。

また、断面力、断面モーメントと変位および角変位の間の関係式は次のようになる。

$$X = EA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \kappa v \right) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot a)$$

$$T = GI_p \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} + \kappa \frac{\partial w}{\partial s} + \kappa \tau v \right) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot b)$$

$$H = -EI_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2\tau \frac{\partial v}{\partial s} - \kappa \beta - \tau^2 w + \kappa \tau u \right) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot c)$$

$$M = EI_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial u}{\partial s} - 2\tau \frac{\partial w}{\partial s} - \tau^2 v \right) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot d)$$

$$\delta = -\{(\partial w / \partial s) + \tau v\} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

$$\phi = (\partial v / \partial s) + \kappa u - \tau w \quad \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

$$\kappa = (\cos^2 \alpha) / R, \quad \tau = (\sin 2\alpha) / (2R)$$

$$\partial s / \partial \theta = R / \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (3 \cdot c)$$

ここで、 I_p は素線軸まわりの断面二次極モーメント、 I_y 、 I_z はそれぞれ y 軸、 z 軸まわりの断面二次モーメント、 u 、 v 、 w は素線軸変位のそれぞれ x 、 y 、 z 成分、 β 、 δ 、 ϕ は素線断面の回転角のそれぞれ x 、 y 、 z 成分、 α はピッチ角、 R はばね半径、 θ はばね中心軸まわりの角座標である。また E は縦弾性係数、 G は横弾性係数、 A は素線断面積である。式(1)と式(2)が静的平衡状態で厳密に解けるので、コイルばね要素内の変位を表す式として、変位 u 、 v 、 w と角変位 β 、 δ 、 ϕ を用いる。

式(1・a)～(1・c)より X と Z を消去することにより、

$$(\partial^2 Y / \partial \theta^2) + Y = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(1・c)～(1・f)より T 、 M 、 Z を消去することにより、

$$(\partial^2 H / \partial \theta^2) + H = -(2R \tan \alpha) Y \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(2)から、

$$\kappa Y = EA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \kappa \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

図 1 ばね要素と座標系

$$\kappa H = GI_p \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \kappa \tau \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

$$H = -EI_z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2\tau \frac{\partial v}{\partial s} - \kappa \beta - \tau^2 w + \kappa \tau u \right) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot c)$$

$$-\tau H - Y = EI_y \left(\frac{\partial^3 v}{\partial s^3} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \tau^2 \frac{\partial v}{\partial s} \right) \quad \dots\dots\dots (6 \cdot d)$$

また式(6)から、 u 、 w 、 β が消去され、

$$\frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5} + 2 \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R^2}{EI_z} (Rc_1 Y + c_2 H) \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

ここに

$$\begin{aligned} c_1 &= (4 / \cos \alpha) (1 + I_z / I_y) \tan^2 \alpha \\ c_2 &= (2EI_z / GI_p) \sin \alpha + (2 \tan \alpha) / \cos \alpha \\ &\quad + (2I_z / I_y) \sin \alpha \cdot \tan^2 \alpha \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b) \end{aligned}$$

ここで断面が円形の場合を考えると、断面二次極モーメントの関係は次のようになる。

$$I_p = 2I_y = 2I_z \quad \dots\dots\dots (8)$$

よって式(7・b)は式(8)を考慮すると次式になる。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (8 / \cos \alpha) \cdot \tan^2 \alpha \\ c_2 &= (E / G) \cdot \sin \alpha + 2 \sin \alpha \tan^2 \alpha \\ &\quad + (2 \tan \alpha) / \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b')$$

式(4)、(5)、(7)を解くことによって、 v 、 Y 、 H が求まる。また、式(1・a)～(1・e)、式(2・a)～(2・d)、式(3・a)、(3・b)を解くことにより、 X 、 Z 、 T 、 M 、 u 、 w 、 β 、 δ 、 ϕ が求まる。それらを代表荷重 Q_0 と代表半径 R_0 を用いて次のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \frac{EI_z}{Q_0 R_0^3} u, \quad v^* = \frac{EI_z}{Q_0 R_0^3} v, \quad w^* = \frac{EI_z}{Q_0 R_0^3} w \\ \beta^* &= \frac{EI_z}{Q_0 R_0^2} \beta, \quad \delta^* = \frac{EI_z}{Q_0 R_0^2} \delta, \quad \phi^* = \frac{EI_z}{Q_0 R_0^2} \phi \\ X^* &= X / Q_0, \quad Y^* = Y / Q_0, \quad Z^* = Z / Q_0 \\ T^* &= \frac{T}{Q_0 R_0}, \quad H^* = \frac{H}{Q_0 R_0}, \quad M^* = \frac{M}{Q_0 R_0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)を導入することにより、角度 θ における状態量 $X(\theta)$ は次のように書くことができる。

$$X(\theta) = D(\theta) \cdot E \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$$\begin{aligned} X(\theta) &= [u^* v^* w^* \beta^* \delta^* \phi^* X^* Y^* Z^* T^* H^* M^*]^T, \\ D(\theta) &= \begin{bmatrix} d_{1,1} & \dots & d_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{12,1} & \dots & d_{12,12} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

また、 $d_{1,1} \sim d_{12,12}$ は付録 1 に示すとおりであり、

$D(\theta)$ は解マトリックス, E は積分定数マトリックスである. 基本要素として角度 $0 \sim \theta_i$ の i 番めの曲りばり要素を考えると,

$$\theta=0 \text{ で } X(0)=X_{i-1}$$

$$\theta=\theta_i \text{ で } X(\theta_i)=X_i$$

となり, これを用いて未定の積分定数マトリックスを消去すると, 格間マトリックス F_i が誘導される.

$$X_i = D(\theta_i) \cdot D(0)^{-1} X_{i-1} = F_i X_{i-1},$$

$$F_i = D(\theta_i) \cdot D(0)^{-1} \dots\dots\dots (12)$$

2.2 格点マトリックスの作製 格点の左右の関係は素線の変位, 断面の回転角が連続であるとする次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} u_i^R &= u_i^L, v_i^R = v_i^L, w_i^R = w_i^L \\ \beta_i^R &= \beta_i^L, \delta_i^R = \delta_i^L, \phi_i^R = \phi_i^L \\ X_i^R &= X_i^L + m_i(\partial^2 u_i / \partial t^2)_i^L \\ Y_i^R &= Y_i^L + m_i(\partial^2 v_i / \partial t^2)_i^L \\ Z_i^R &= Z_i^L + m_i(\partial^2 w_i / \partial t^2)_i^L \\ T_i^R &= T_i^L + J_P(\partial^2 \beta / \partial t^2)_i^L \\ H_i^R &= H_i^L + J_H(\partial^2 \delta / \partial t^2)_i^L \\ M_i^R &= M_i^L + J_M(\partial^2 \phi / \partial t^2)_i^L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで, m_i は格点要素の質量, J_P, J_H, J_M はそれぞれ素線軸, y 軸, z 軸まわりの回転慣性モーメントである. 上記関係に式(9)および $\lambda = pR_0\sqrt{\rho/G}$ を用いて無次元化を行うと, 格点 i の右側 R と左側 L を結ぶマトリックス方程式は,

$$X_i^R = P_i X_i^L \dots\dots\dots (14)$$

ここに λ は無次元固有振動数, p は円振動数, ρ は密度であり, 格点マトリックス P_i は,

$$P_i = \begin{bmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{12,1} & \dots & f_{12,12} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

上式のマトリックス要素 $f_{1,1} \sim f_{12,12}$ は付録2に示すとおりである.

2.3 振動解析 状態量ベクトル X_i は, 格間マトリックス F_i と格点マトリックス P_i を用いて導かれる.

すなわち,

$$X_i = T X_0 \dots\dots\dots (16)$$

ここに

$$T = F_i P_{i-1} F_{i-1} \dots F_2 P_1 F_1 \dots\dots\dots (17)$$

したがって, T はマトリックス形で

$$T = \begin{bmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{12,1} & \dots & B_{12,12} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

式(18)における行列要素 $B_{1,1} \sim B_{12,12}$ は式(17)の行列の乗算を数値的に行うことにより求められる.

両端固定の境界条件を考慮すると, 端点 $i=0$ およびばね素線を N 分割した場合他端 $i=N$ で素線軸変位および素線断面の回転角はすべて零になるので, 式(16)は次のように書かれる.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} B'_{1,7} & \dots & B'_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ B'_{6,7} & \dots & B'_{6,12} \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} X^* \\ \vdots \\ M^* \end{bmatrix}_0 \dots\dots (19)$$

ここに $B'_{1,7} \sim B'_{6,12}$ は, 端部 $i=N$ における $B_{1,7} \sim B_{6,12}$ の値である. 式(19)の係数行列式を零とおき, これを数値的に解くことにより無次元固有振動数 λ を決定することができる.

3. 数値計算例

数値計算例は, 曲りばり理論に基づく基礎方程式の解より格間マトリックスを求め, それに格点マトリックスを組合せて伝達マトリックスを作製し, 伝達マトリックス法を用いて行った. まず本解の精度を検討するために, 素線径 4 mm, コイル中心径 26 mm, 有効巻数 6.5 巻, ピッチ角 4.8° の諸元の円筒ばねについて計算を行った. 円筒ばねの無次元固有振動数 $\lambda (=pR_0\sqrt{\rho/G})$ を表1に示す. 表1から, 本解の結果と沢登・福島⁽¹⁴⁾の結果はよく一致しており, また回転慣性モーメントの影響は極めて少ないことがわかる. したがって, 以下の計算では回転慣性モーメントの項を省略し, 分割は1巻を12分割として行う.

さて, 任意形状ばねとしてはじめに図2のような鼓形ばねを想定する. R_1 は中央半径, R_2 は端部半径で,

表1 円筒コイルばねの無次元固有振動数 ($\lambda = pR_0\sqrt{\rho/G}$) の値

Mode	1	2	3	4
Authors (Rotatory inertia included)	0.00835	0.00914	0.01039	0.01063
Authors (Rotatory inertia neglected)	0.00835	0.00925	0.01039	0.01065
Sawanobori -Fukushima	0.00826	0.00923	0.01038	0.01056

図2 鼓形ばね

計算では R_1 を代表半径 ($R_0 = R_1$) にとる。このばねで、端部巻から数えて N' 番めの半径 R は、

$$R = R_1 + (R_2 - R_1)(1 - 2N'/N)^2 \quad \cdots \cdots (20)$$

ここに N は有効巻数である。

図3では R_1 に対して R_2 を変化させたときの無次元固有振動数の変化を示したものである。縦軸は無次元固有振動数 λ を横軸は R_2/R_1 である。 R_1/d は、代表半径と素線半径の比である。 R_1 に比べて R_2 が大きくなるにつれて固有振動数は減少し、 R_2/R_1 が 1.0 のとき、三次と四次が近接しているのに対し、 R_2/R_1 が大きくなるにつれて三次は四次から離れて二次にある程度近づいてくることがわかる。

図4では巻数 N を変化させたときの無次元固有振動数 λ の変化を示したものである。まず一次に整数巻

から数えて、0.25~0.5 巻めのところで一度振動数が上がる傾向がある。二次は整数巻から数えて、0.5 巻め付近で下がり、0.75 巻め付近で上がる傾向がある。それは巻数が少ないほど顕著にみられる。三次、四次においても巻数の位置はずれているが似たような傾向がみられる。

図5はピッチ角 α を変化させたときの無次元固有振動数 λ の変化を示したものである。ピッチ角が大きくなるにつれて一次、二次、三次が近接してくることがわかる。

次に図6のようなたる形ばねを考える。この場合も、鼓形ばねと同様に R_1 は中央半径、 R_2 は端部半径とし、 R_1 を代表半径 ($R_0 = R_1$) とした。このばねにおいて、端部巻から数えて N' 番めの半径 R は次のように表される。

$$R = R_1 - (R_1 - R_2)(1 - 2N'/N)^2 \quad \cdots \cdots (21)$$

ここに N は有効巻数である。

図7では R_1 に対して R_2 を変化させたときの無次元固有振動数の変化を示したものである。縦軸は無次元固有振動数 λ を横軸は R_2/R_1 である。 R_1 に比べて R_2 が小さくなるにつれて振動数が上がり、一次と二

図3 固有振動数に対する形状変化の影響

図4 固有振動数に対する巻数変化の影響

図5 固有振動数に対するピッチ角変化の影響

図6 たる形ばね

次は R_2/R_1 が 0.7 付近で特に近接している。

図 8 では巻数 N を変化させたときの無次元固有振動数 λ の変化を示したものである。巻数を変化させても一次と二次、三次と四次は近接している。

図 9 ではピッチ角 α を変化させたときの無次元固有振動数 λ の変化を示したものである。このばねの場合は固有振動数に関して、ピッチ角の影響が少ないことがわかる。

4. 実験

ひずみゲージをはりつけた前述の異形ばねを、一端固定、他端加振の取付け治具を用いて、加振器に結合する。ここにひずみゲージは鼓形ばねでは端部から 1 巻め、たる形ばねでは端部から 2 巻めに取付けた。加振器によりコイル中心軸方向に加振し、ばねの応答を動ひずみ測定器とオシロスコープによって測定し、固有振動数を決定した。図 10 は実験装置を示したもので

図 7 固有振動数に対する形状変化の影響

図 8 固有振動数に対する巻数変化の影響

ある。また実験で用いたばねの材料は SWOSC-V でその他の諸元は以下に示すとおりである。

鼓形ばね: $\alpha = 0.08378 \text{ rad} \{4.8^\circ\}$, $N = 6.5$

$R_1 = 13.0 \text{ mm}$, $d = 1.3 \text{ mm}$

$R_2 = 13.0, 15.6, 20.8, 26.0 \text{ mm}$

たる形ばね: $\alpha = 0.08378 \text{ rad} \{4.8^\circ\}$, $N = 6.5$

$R_1 = 25.0 \text{ mm}$, $d = 1.0 \text{ mm}$

$R_2 = 25.0, 20.0, 15.0, 10.0 \text{ mm}$

鼓形ばね、たる形ばねにおける固有振動数に対する形状変化について、ピッチ角 α 、巻数 N 、中央半径 R_1 と素線半径 d の比 R_1/d を一定にして、数値計算結果と実験結果の比較を行った。

図 11 は、 $\alpha = 4.8$, $N = 6.5$, $R_1/d = 10.0$ の時の鼓形ばねの場合である。縦軸は固有振動数 $f (= p/2\pi) [\text{Hz}]$ を横軸には R_2/R_1 をとっている。丸印は $R_2/R_1 = 1.0, 1.2, 1.6, 2.0$ のときの実験値を示し、実線は理論値を示す。

図 12 は、 $\alpha = 4.8$, $N = 6.5$, $R_1/d = 25.0$ の時のたる形ばねの場合である。縦軸は固有振動数 $f [\text{Hz}]$ を横軸には R_2/R_1 をとっている。丸印は $R_2/R_1 = 0.4, 0.6$,

図 9 固有振動数に対するピッチ角変化の影響

図 10 実験装置

図 11 理論値と実験値の比較(鼓形ばね)

0.8, 1.0 のときの実験値を示し、実線は理論値を示す。図 11 と図 12 より本解の理論計算値と実験値は多少の差はあるもののほぼ一致している。よって多少の実験誤差はあるが、本解の妥当性が検証されたものと思われる。

5. 結 言

本報では、任意形状ばねの振動を取扱い、伝達マトリックス法を適用して、固有振動数を求め、また実験も行い、両結果の比較検討を行い、一般形状ばねの振動解析法を確立したものである。

その内容を要約すると、

(1) 曲りばり理論に基づく基礎方程式の解より格間マトリックスを求め、それに格点マトリックスを組合せて伝達マトリックスを作製し、伝達マトリックス

図 12 理論値と実験値の比較(た形ばね)

法を用いて、数値計算を行い、固有振動数を決定した。

(2) 数値計算では、素線の回転慣性モーメントを考慮した場合としない場合の計算を行ったところ、両者の差は極めて小さく、実用上は素線の回転慣性モーメントの影響を省略してもさしつかえないことがわかった。

(3) 具体例として、鼓形ばねおよびた形ばねをとりあげ、それらの振動数に対する理論結果と実験結果の比較検討を行ったところ両結果はよく一致し、本報の理論を使用して任意形状ばねの固有振動数を計算できることが明らかにされた。

本研究の実験に用いたばねは村田発條(株)の提供によるものである。ここに記して謝意を表する。

付録1. 格間マトリックスの要素

式(11)のマトリックス要素は下記のとおりである。

$$\begin{aligned}
 d_{1,1} &= \psi^3 \{ \bar{c}_3 \{ 2\theta S_\theta - (\theta^2 - 2)C_\theta \} C_\alpha - \bar{c}_4 \{ (3\theta^2 - 6)C_\theta + (\theta^3 - 6\theta)S_\theta \} C_\alpha - C_\theta / \bar{S}^2 \} \\
 d_{1,2} &= \psi^3 \{ -\bar{c}_3 \{ 2\theta C_\theta + (\theta^2 - 2)S_\theta \} C_\alpha - \bar{c}_4 \{ (3\theta^2 - 6)S_\theta - (\theta^3 - 6\theta)C_\theta \} C_\alpha - S_\theta / \bar{S}^2 \} \\
 d_{1,3} &= -\psi^3 (\bar{c}_2 / 8) \{ 2\theta S_\theta - (\theta^2 - 2)C_\theta \} C_\alpha, \quad d_{1,4} = \psi^3 (\bar{c}_2 / 8) \{ 2\theta C_\theta + (\theta^2 - 2)S_\theta \} C_\alpha \\
 d_{1,5} &= \psi^3 \theta C_\alpha, \quad d_{1,6} = \psi^3 C_\alpha S_\theta, \quad d_{1,7} = -\psi^3 C_\alpha C_\theta, \quad d_{1,8} = \psi^3 (C_\theta + \theta S_\theta) C_\alpha \\
 d_{1,9} &= \psi^3 (S_\theta - \theta C_\theta) C_\alpha, \quad d_{1,10} = \psi^3 \theta / (\bar{S}^2 C_\alpha), \quad d_{1,11} = \psi^3 / \bar{S}^2 \\
 d_{2,1} &= \psi^3 (\bar{c}_3 \theta^2 S_\theta - \bar{c}_4 \theta^3 C_\theta), \quad d_{2,2} = -\psi^3 (\bar{c}_3 \theta^2 C_\theta + \bar{c}_4 \theta^3 S_\theta), \quad d_{2,3} = -\psi^3 (\bar{c}_2 / 8) \theta^2 S_\theta \\
 d_{2,4} &= \psi^3 (\bar{c}_3 / 8) \theta^2 C_\theta, \quad d_{2,5} = \psi^3, \quad d_{2,6} = \psi^3 C_\theta, \quad d_{2,7} = \psi^3 S_\theta, \quad d_{2,8} = \psi^3 \theta C_\theta, \quad d_{2,9} = \psi^3 \theta S_\theta \\
 d_{3,1} &= \psi^3 \{ -e_{1,1} C_\theta + e_{1,2} (C_\theta + \theta S_\theta) + e_{1,3} (2C_\theta + 2\theta S_\theta - \theta^2 C_\theta) + e_{1,4} (\theta^3 S_\theta + 3\theta^2 C_\theta - 6\theta S_\theta - 6C_\theta) \} \\
 d_{3,2} &= \psi^3 \{ e_{2,1} S_\theta + e_{2,2} (S_\theta - \theta C_\theta) + e_{2,3} (\theta^2 S_\theta + 2\theta C_\theta - 2S_\theta) + e_{2,4} (-\theta^3 C_\theta + 3\theta^2 S_\theta + 6\theta C_\theta - 6S_\theta) \} \\
 d_{3,3} &= \psi^3 \{ -e_{3,1} C_\theta + e_{3,2} (\theta S_\theta + C_\theta) + e_{3,3} (-\theta^2 C_\theta + 2\theta S_\theta + 2C_\theta) \} \\
 d_{3,4} &= \psi^3 \{ e_{4,1} S_\theta + e_{4,2} (S_\theta - \theta C_\theta) + e_{4,3} (\theta^2 S_\theta + 2\theta C_\theta - 2S_\theta) \} \\
 d_{3,5} &= \psi^3 \{ e_5 \theta + \theta (e_{12} / 2g_2) / T_\alpha \}, \quad d_{3,6} = \psi^3 e_6 S_\theta, \quad d_{3,7} = -\psi^3 e_7 C_\theta \\
 d_{3,8} &= \psi^3 \{ -e_{8,1} C_\theta + e_{8,2} (C_\theta + \theta S_\theta) \}, \quad d_{3,9} = \psi^3 \{ e_{9,1} S_\theta + e_{9,2} (S_\theta - \theta C_\theta) \} \\
 d_{3,10} &= \psi^3 \{ e_{10} \theta + e_{11} \theta / T_\alpha + e_{12} \theta (g_1 / g_2) \}, \quad d_{3,12} = \psi^3 \\
 d_{4,1} &= \psi^2 (b_{1,1} C_\theta + b_{1,2} S_\theta + b_{1,3} \theta S_\theta + b_{1,4} \theta C_\theta + b_{1,5} \theta^2 C_\theta + b_{1,6} \theta^3 S_\theta) \\
 d_{4,2} &= \psi^2 (b_{2,1} S_\theta + b_{2,2} C_\theta + b_{2,3} \theta C_\theta + b_{2,4} \theta S_\theta + b_{2,5} \theta^2 S_\theta + b_{2,6} \theta^3 C_\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{4,3} &= \psi^2(b_{3,1}C_\theta + b_{3,2}S_\theta + b_{3,3}\theta S_\theta + b_{3,4}\theta^2 C_\theta) \\
d_{4,4} &= \psi^2(b_{4,1}S_\theta + b_{4,2}C_\theta + b_{4,3}\theta C_\theta + b_{4,4}\theta^2 S_\theta) \\
d_{4,5} &= \psi^2\{b_5\theta - (e_{12}\theta S_\alpha C_\alpha)/(2g_2) + 1/(2g_2 S_\alpha^2)\}, \quad d_{4,6} = \psi^2 b_6 S_\theta, \quad d_{4,7} = \psi^2 b_7 C_\theta \\
d_{4,8} &= \psi^2(b_{8,1}C_\theta + b_{8,2}\theta S_\theta), \quad d_{4,9} = \psi^2(b_{9,1}S_\theta + b_{9,2}\theta C_\theta) \\
d_{4,10} &= \psi^2\{(-e_{10}S_\alpha^2 + S_\alpha/\bar{S}^2 - e_{11}S_\alpha C_\alpha - (g_1/g_2)e_{12}S_\alpha^2)\theta - 1/(C_\alpha^2 S_\alpha^2) + (g_1/g_2)/(C_\alpha S_\alpha)\} \\
d_{4,11} &= \psi^2 S_{2\alpha}/(2\bar{S}^2), \quad d_{4,12} = -\psi^2 S_\alpha^2 \\
d_{5,1} &= \psi^2\{(e_{1,1}S_\theta + e_{1,2}\theta C_\theta + e_{1,3}\theta^2 S_\theta + e_{1,4}\theta^3 C_\theta)C_\alpha + (\bar{c}_3\theta^2 S_\theta - \bar{c}_4\theta^3 C_\theta)S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{5,2} &= \psi^2\{(e_{2,1}C_\theta + e_{2,2}\theta S_\theta + e_{2,3}\theta^2 C_\theta + e_{2,4}\theta^3 S_\theta)C_\alpha - (\bar{c}_3\theta^2 C_\theta + \bar{c}_4\theta^3 S_\theta)S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{5,3} &= \psi^2\{(e_{3,1}S_\theta + e_{3,2}\theta C_\theta + e_{3,3}\theta^2 S_\theta)C_\alpha - (\bar{c}_2\theta^2 S_\theta/8)S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{5,4} &= \psi^2\{(e_{4,1}C_\theta + e_{4,2}\theta S_\theta + e_{4,3}\theta^2 C_\theta)C_\alpha + (\bar{c}_2\theta^2 C_\theta/8)S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{5,5} &= \psi^2\{e_{12}C_\alpha/(2g_2 T_\alpha) + e_5 C_\alpha + S_\alpha C_\alpha\}, \quad d_{5,6} = \psi^2(e_6 C_\theta C_\alpha + C_\theta S_\alpha C_\alpha) \\
d_{5,7} &= \psi^2(e_7 S_\theta C_\alpha + S_\theta S_\alpha C_\alpha), \quad d_{5,8} = \psi^2\{e_{8,1}S_\theta + (e_{8,2} + S_\alpha)\theta C_\theta\}C_\alpha \\
d_{5,9} &= \psi^2\{e_{9,1}C_\theta + (e_{9,2} + S_\alpha)\theta S_\theta\}C_\alpha, \quad d_{5,10} = \psi^2\{e_{10} + e_{11}/T_\alpha + e_{12}(g_1/g_2)\}C_\alpha \\
d_{6,1} &= \psi^2\{(\bar{c}_3(2\theta S_\theta + \theta^2 C_\theta) - \bar{c}_4(3\theta^2 C_\theta - \theta^3 S_\theta))C_\alpha + \bar{c}_3\{2\theta S_\theta - (\theta^2 - 2)C_\theta\}C_\alpha^3 \\
&\quad - \bar{c}_4\{(3\theta^2 - 6)C_\theta + (\theta^3 - 6\theta)S_\theta\}C_\alpha^3 - C_\alpha^2 C_\theta/\bar{S}^2 - \{-e_{1,1}C_\theta + e_{1,2}(C_\theta + \theta S_\theta) \\
&\quad + e_{1,3}(2\theta S_\theta - \theta^2 C_\theta + 2C_\theta) + e_{1,4}(3\theta^2 C_\theta - 6C_\theta + \theta^3 S_\theta - 6\theta S_\theta)\}S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{6,2} &= \psi^2\{-\{\bar{c}_3(2\theta C_\theta - \theta^2 S_\theta) + \bar{c}_4(3\theta^2 S_\theta + \theta^3 C_\theta)\}C_\alpha - \bar{c}_3\{2\theta C_\theta + (\theta^2 - 2)S_\theta\}C_\alpha^3 \\
&\quad - \bar{c}_4\{(3\theta^2 - 6)S_\theta - (\theta^3 - 6\theta)C_\theta\}C_\alpha^3 - C_\alpha^2 S_\theta/\bar{S}^2 - \{e_{2,1}S_\theta + e_{2,2}(S_\theta - \theta C_\theta) \\
&\quad + e_{2,3}(2\theta C_\theta + \theta^2 S_\theta - 2S_\theta) + e_{2,4}(3\theta^2 S_\theta - 6S_\theta - \theta^3 C_\theta + 6\theta C_\theta)\}S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{6,3} &= \psi^2\{-(\bar{c}_2/8)(2\theta S_\theta + \theta^2 C_\theta)C_\alpha - (\bar{c}_2/8)\{2\theta S_\theta - (\theta^2 - 2)C_\theta\}C_\alpha^3 \\
&\quad - \{-e_{3,1}C_\theta + e_{3,2}(C_\theta + \theta S_\theta) + e_{3,3}(2\theta S_\theta - \theta^2 C_\theta + 2C_\theta)\}S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{6,4} &= \psi^2\{(\bar{c}_2/8)(2\theta C_\theta - \theta^2 S_\theta)C_\alpha + (\bar{c}_2/8)\{2\theta C_\theta + (\theta^2 - 2)S_\theta\}C_\alpha^3 \\
&\quad - \{e_{4,1}S_\theta + e_{4,2}(S_\theta - \theta C_\theta) + e_{4,3}(2\theta C_\theta + \theta^2 S_\theta - 2S_\theta)\}S_\alpha C_\alpha\} \\
d_{6,5} &= \psi^2\theta\{C_\alpha^3 - e_5 S_\alpha C_\alpha - e_{12}S_\alpha C_\alpha/(2g_2 T_\alpha)\}, \quad d_{6,6} = \psi^2(-C_\alpha S_\theta + C_\alpha^3 S_\theta - e_6 S_\alpha C_\alpha S_\theta) \\
d_{6,7} &= \psi^2(C_\alpha C_\theta - C_\alpha^3 C_\theta + e_7 S_\alpha C_\alpha C_\theta) \\
d_{6,8} &= \psi^2\{(C_\theta - \theta S_\theta)C_\alpha + (C_\theta + \theta S_\theta)C_\alpha^3 - \{-e_{8,1}C_\theta + e_{8,2}(C_\theta + \theta S_\theta)\}C_\alpha S_\alpha\} \\
d_{6,9} &= \psi^2\{(S_\theta + \theta C_\theta)C_\alpha + (S_\theta - \theta C_\theta)C_\alpha^3 - \{e_{9,1}S_\theta + e_{9,2}(S_\theta - \theta C_\theta)\}C_\alpha S_\alpha\} \\
d_{6,10} &= \psi^2\theta\{C_\alpha/\bar{S}^2 - (e_{10} + e_{11}/T_\alpha + e_{12}g_1/g_2)C_\alpha S_\alpha\} \\
d_{6,11} &= \psi^2 C_\alpha^2/\bar{S}^2, \quad d_{6,12} = -\psi^2 C_\alpha S_\alpha \\
d_{7,1} &= S_\theta C_\alpha, \quad d_{7,2} = -C_\theta C_\alpha, \quad d_{7,10} = 1, \quad d_{8,1} = C_\theta, \quad d_{8,2} = S_\theta \\
d_{9,1} &= -S_\theta S_\alpha, \quad d_{9,2} = C_\theta S_\alpha, \quad d_{9,10} = 1/T_\alpha \\
d_{10,1} &= -\psi S_\alpha(S_\theta - \theta C_\theta), \quad d_{10,2} = \psi S_\alpha(C_\theta + \theta S_\theta), \quad d_{10,3} = \psi S_\theta C_\alpha, \quad d_{10,4} = -\psi C_\theta C_\alpha \\
d_{10,5} &= \psi/(2g_2 T_\alpha), \quad d_{10,10} = \psi(g_1/g_2) \\
d_{11,1} &= -\psi\theta S_\theta/T_\alpha, \quad d_{11,2} = \psi\theta C_\theta T_\alpha, \quad d_{11,3} = \psi C_\theta, \quad d_{11,4} = \psi S_\theta \\
d_{12,1} &= -\psi(S_\theta C_\alpha + \theta C_\theta S_\alpha T_\alpha), \quad d_{12,2} = \psi(C_\theta C_\alpha - \theta S_\theta S_\alpha T_\alpha) \\
d_{12,3} &= -\psi S_\theta S_\alpha, \quad d_{12,4} = \psi C_\theta S_\alpha, \quad d_{12,5} = \psi/(2g_2 T_\alpha^2), \quad d_{12,10} = \psi\{-1/S_\alpha^2 + (g_1/g_2)/T_\alpha\} \\
\bar{c}_1 &= 8T_\alpha^2/C_\alpha, \quad \bar{c}_2 = (E/G)S_\alpha + 2S_\alpha T_\alpha^2 + 2T_\alpha/C_\alpha, \quad \bar{c}_3 = -\bar{c}_1/8 + \bar{c}_2 T_\alpha/4, \quad \bar{c}_4 = \bar{c}_2 T_\alpha/24 \\
e_{1,1} &= \bar{c}_3/S_\alpha + 1/(2\bar{S}^2 T_\alpha) + \varepsilon/S_{2\alpha}, \quad e_{1,2} = (2\bar{c}_3 - 3\bar{c}_4)/S_\alpha + \varepsilon T_\alpha/(2C_\alpha^2) \\
e_{1,3} &= (6\bar{c}_4 - \bar{c}_3)/(2S_\alpha) + \bar{c}_3 C_\alpha/(2T_\alpha) - \bar{c}_3 S_\alpha/2, \quad e_{1,4} = (\bar{c}_4/2)(1/S_\alpha - C_\alpha/T_\alpha + S_\alpha) \\
e_{2,1} &= -e_{1,1}, \quad e_{2,2} = e_{1,2}, \quad e_{2,3} = -e_{1,3}, \quad e_{2,4} = e_{1,4} \\
e_{3,1} &= -\bar{c}_2/(8S_\alpha) + \varepsilon/(2C_\alpha^2), \quad e_{3,2} = -\bar{c}_2/(4S_\alpha), \quad e_{3,3} = (\bar{c}_2/16)(1/S_\alpha - C_\alpha/T_\alpha + S_\alpha) \\
e_{4,1} &= -e_{3,1}, \quad e_{4,2} = e_{3,2}, \quad e_{4,3} = -e_{3,3} \\
e_5 &= 0.5(C_\alpha/T_\alpha - S_\alpha), \quad e_6 = 0.5(-1/S_\alpha + C_\alpha/T_\alpha - S_\alpha), \quad e_7 = e_6 \\
e_{8,1} &= -1/S_\alpha, \quad e_{8,2} = e_6, \quad e_{9,1} = -e_{8,1}, \quad e_{9,2} = e_6 \\
e_{10} &= 1/(2\bar{S}^2 S_\alpha), \quad e_{11} = 2\varepsilon/(S_{2\alpha} C_\alpha), \quad e_{12} = -\varepsilon/(S_{2\alpha} S_\alpha) \\
b_{1,1} &= e_{1,1}(1 + S_\alpha^2) + e_{1,2}(1 - S_\alpha^2) - 2e_{1,3}S_\alpha^2 + 6e_{1,4}S_\alpha^2 + \bar{c}_3 C_\alpha S_{2\alpha} + 3\bar{c}_4 C_\alpha S_{2\alpha} - S_{2\alpha}/(2\bar{S}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{1,3} &= -e_{1,2}(1+S_a^2)+2e_{1,3}(1-S_a^2)+4\bar{c}_3S_a+6e_{1,4}S_a^2+\bar{c}_3S_{2a}C_a+3\bar{c}_4S_{2a}C_a \\
b_{1,5} &= e_{1,3}(1+S_a^2)+3e_{1,4}(1-S_a^2)+2\bar{c}_3S_a-6\bar{c}_4S_a-(\bar{c}_3/2)S_{2a}C_a-(3\bar{c}_4/2)S_{2a}C_a \\
b_{1,2} &= -1/C_a, \quad b_{1,4} = -T_a^2/C_a, \quad b_{1,6} = -e_{1,4}(1+S_a^2)+2\bar{c}_4S_a-(\bar{c}_4/2)S_{2a}C_a \\
b_{2,1} &= b_{1,1}, \quad b_{2,2} = -b_{1,2}, \quad b_{2,3} = -b_{1,3}, \quad b_{2,4} = b_{1,4}, \quad b_{2,5} = b_{1,5}, \quad b_{2,6} = -b_{1,6} \\
b_{3,1} &= e_{3,1}(1+S_a^2)+e_{3,2}(1-S_a^2)-2e_{3,3}S_a^2-(\bar{c}_2/8)C_aS_{2a} \\
b_{3,3} &= -e_{3,2}(1+S_a^2)+2e_{3,3}(1-S_a^2)-(\bar{c}_2/8)C_aS_{2a}-(\bar{c}_2/2)S_a \\
b_{3,2} &= -T_a/C_a, \quad b_{3,4} = e_{3,3}(1+S_a^2)-(\bar{c}_2/4)S_a+(\bar{c}_2/16)C_aS_{2a} \\
b_{4,1} &= b_{3,1}, \quad b_{4,2} = -b_{3,2}, \quad b_{4,3} = -b_{3,3}, \quad b_{4,4} = b_{3,4} \\
b_5 &= -e_5S_a^2+C_aS_{2a}/2, \quad b_6 = -e_6(1+S_a^2)-2S_a+S_{2a}C_a/2, \quad b_7 = -b_6 \\
b_{8,1} &= e_{8,1}(1+S_a^2)+e_{8,2}(1-S_a^2)+2S_a+S_{2a}C_a/2, \quad b_{8,2} = b_6, \quad b_{9,1} = b_{8,1}, \quad b_{9,2} = -b_6 \\
g_1 &= e_{10}(C_a^3-S_a^2C_a)+e_{11}(C_a^3/T_a-S_aC_a^2)+S_aC_a/\bar{S}^2 \\
g_2 &= e_{12}(S_a^2C_a-C_a^3)+EI_z/(GI_p)
\end{aligned}$$

上記以外の要素は零になる。ただし、 $\psi=R/R_0$, $C_\theta=\cos\theta$, $S_\theta=\sin\theta$, $C_a=\cos\alpha$, $S_a=\sin\alpha$, $T_a=\tan\alpha$, $S_{2a}=\sin 2\alpha$, $\varepsilon=I_z/I_y$, $\bar{S}^2=AR^2/I_z$ であり、円形断面ばねでは $\varepsilon=1$ となる。

付録2. 格点マトリックスの要素

式(15)のマトリックス要素は下記のとおりである。

$$f_{j,j}=1 \quad (j=1, 12), \quad f_{7,1}=f_{8,2}=f_{9,3}=-m_i^*, \quad f_{10,4}=-J_p^*, \quad f_{11,5}=J_H^*, \quad f_{12,6}=-J_M^*$$

上記以外の要素は零になる。また、ここに

$$\begin{aligned}
m_i^* &= \delta\theta\bar{S}^2\lambda^2/\{2(1+\nu)\}, \quad J_p^* = \delta\xi^2\theta\bar{S}^2\lambda^2/\{4(1+\nu)\} \\
J_H^* &= J_M^* = \delta\{3\xi^2+(1/\delta)^2\theta^2\}\theta\bar{S}^2\lambda^2/\{24(1+\nu)\}
\end{aligned}$$

ただし、 $\delta=R_0/R$, $\xi=d/R_0$, ν はポアソン比である。

文 献

- (1) Wahl, A. M., *Trans. ASME*, **51** (1929), 185.
- (2) Göhner, O., *Ing. Arch.*, **1** (1929), 619.
- (3) Goodier, J. N., *Trans. ASME*, **25** (1958), 466.
- (4) Ōkubo, H., *Trans. ASME*, **20** (1953), 273.
- (5) Röver, A., *VDI-Z*, **57** (1913), 1906.
- (6) Takata, M., *Proc. 7th Jpn. Natl. Congr. Appl. Mech.*, (1958), 365.
- (7) 清水・ほか2名, 機論, **27-179** (昭和35), 1119.
- (8) 下関・ほか3名, 機論, **45-396**, C(昭53), 901.
- (9) 下関・早坂, 機論, **48-435**, C(昭57), 1774.
- (10) 長屋, 機構論, No. 840-15(昭59), 138.
- (11) 佐藤・ほか5名, 機構論, No. 840-15(昭59), 146.
- (12) 井上・吉永, 機論, **27-179**(昭36), 1130.
- (13) 清水・ほか2名, 機論, **27-179**(昭36), 1138.
- (14) 沢登・福島, 機論, **49-439**(昭58), 422.
- (15) Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed. (1944), Dover.