任意の子午線形状を有する軸対称中実体の自由振動*

入江 敏博**, 山田 元**, 岡田 一路***

Free Vibration of Axisymmetrical Solid Bodies
with a Variable Meridional Profile

by Toshihiro IRIE, Gen YAMADA, and Ichiro OKADA

An analysis is presented for the three-dimensional vibration problem of determining the natural frequencies and the mode shapes of axisymmetrical solid bodies, with a variable meridional profile expressed as an arbitrary function. For this purpose, the solid body is transformed into a solid cylinder of unit axial length and unit radius by a transformation of variables. With the displacements of the transformed solid cylinder assumed in the forms of algebraic polynomials, the frequency equation is derived by means of the Ritz method. This method is applied to solid bodies of revolution with a linear or a parabolic meridional profile under two combinations of boundary conditions at the edges. The natural frequencies and the mode shapes are calculated numerically up to higher modes, and the results are presented in some figures.

Key Words: Vibration, Axisymmetrical Solid Body, Variable Meridional Profile, Natural Frequency, Mode Shape

1. は し が き

本論文では、任意の子午線形状を有する軸対称中実体の自由振動をリッツ法によって解析する。円柱を含めて、これらの中実体は種々の電気、機械部品や構造物に用いられており、したがってその振動問題が重要であるにもかかわらず、これを取扱った研究は、極めて少ない。両端が自由な円柱の軸対称振動について、McNiven-Perry⁽¹⁾は級数近似式により、Rumerman-Raynor⁽²⁾と Hutchinson⁽³⁾⁻⁽⁵⁾は級数解によって研究している。また、非軸対称振動について、Hutchinson⁽⁶⁾が同じ級数解により解いており、McMahon⁽⁷⁾は円柱の振動を実験的に研究し、その結果を他の著者の解析的な近似解と比較している。これとは別に、平行六面体の振動をリッツ法により解析した Leissa-Zhang⁽⁸⁾や Hutchinson-Zillmer⁽⁹⁾の論文もあるが、本論文で取扱う任意の子午線形状を有する軸対称な中実体の振動に関する研究は全く見当たらない。

この研究のために、まず変数変換によって、任意の

子午線形状を有する軸対称中実体を、単位の子午線長と半径を有する円柱に変換する。この変換された円柱の半径方向、円周方向および軸方向の変位を、軸方向と半径方向の座標に関するべき関数と三角関数との積の級数で表し、ついで、その運動エネルギーとひずみエネルギーの最大値を求め、ラグランジュ関数の停留条件によって振動数方程式を導く。そしてこの方法を両端が自由な鼓形ないし樽形中実体と、一端が固定され、他端が自由な中実円すいに適用して、その固有振動数(振動の固有値)と振動モードを高次まで数値計算し、その結果をいくつかの図にまとめる。

2. 理 論 解 析

軸対称な中実体の半径方向、周方向、および軸方向に円筒座標系 (r, θ, z) をとる。この物体の運動エネルギーの最大値は、これら各方向の変位 u, v, w を用いて

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iiint_V (u^2 + v^2 + w^2) r dr d\theta dz \cdots \cdots (1)$$

で与えられる。ここで、 ρ は密度、 ω は円振動数である。一方、ひずみエネルギーの最大値は

$$V = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{zr}) r dr d\theta dz \cdots \cdots (2)$$

* 昭和60年9月29日 北海道支部第27回講演会において講演、原稿受付 昭和60年3月1日。

** 正員、北海道大学工学部(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

*** 学生員、北海道大学工学部。

で、一般に応力とひずみの関係式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2G\varepsilon_r, \sigma_\theta = \lambda e + 2G\varepsilon_\theta \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}, \tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z}, \tau_{zr} = G\gamma_{zr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 e は体積ひずみ

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z \dots\dots\dots (4)$$

で、 λ と G は、縦弾性係数 E とポアソン比 ν を用いて

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \nu E / \{(1+\nu)(1-2\nu)\} \\ G &= E / \{2(1+\nu)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

で表されるラメの定数である。さらに、円筒座標系に

おけるひずみと変位の関係は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= u_{,r}, \varepsilon_\theta = u/r + v_{,\theta}/r, \varepsilon_z = w_{,z} \\ \gamma_{r\theta} &= u_{,\theta}/r + v_{,r} - v/r \\ \gamma_{\theta z} &= v_{,z} + w_{,\theta}/r, \gamma_{zr} = u_{,z} + w_{,r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

この問題を解析するためには、変数変換

$$r = H\eta f(\xi), z = H\xi, J = H^2 f(\xi) \dots\dots\dots (7)$$

によって、任意の子午線形状を有する軸対称中実体を、単位の軸長と半径を有する円柱に変換するのが便利である。ここで、 H は中実体の高さ、 J は変換のヤコビアンである。その結果、この新しい座標系 (η, θ, ξ) を用いて、力学的エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \rho H^3 \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 (u^2 + v^2 + w^2) f^2(\xi) \eta d\eta d\xi d\theta \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} GH \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 & \left[\bar{\nu} \left\{ u_{,\eta} + \frac{u}{\eta} + \frac{1}{\eta} v_{,\theta} + f(\xi) w_{,\xi} - f'(\xi) \eta w_{,\eta} \right\}^2 + 2u_{,\eta}^2 + 2 \left(\frac{u}{\eta} + \frac{1}{\eta} v_{,\theta} \right)^2 \right. \\ & + 2 \{ f(\xi) w_{,\xi} - f'(\xi) \eta w_{,\eta} \}^2 + \left(\frac{1}{\eta} u_{,\theta} + v_{,\eta} - \frac{v}{\eta} \right)^2 + \left\{ f(\xi) v_{,\xi} - f'(\xi) \eta v_{,\eta} + \frac{1}{\eta} w_{,\theta} \right\}^2 \\ & \left. + \{ f(\xi) u_{,\xi} - f'(\xi) \eta u_{,\eta} + w_{,\eta} \}^2 \right] \eta d\eta d\xi d\theta \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $\bar{\nu} = 2\nu / (1-2\nu)$ を表す。いま、この物体の各変位を次のべき関数と三角関数の積の級数

$$\begin{aligned} u_{(n)} &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij(n)} \eta^i \xi^j \cos n\theta, v_{(n)} = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M b_{lm(n)} \eta^l \xi^m \sin n\theta, w_{(n)} = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q c_{pq(n)} \eta^p \xi^q \cos n\theta \\ & (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

で与える。ここで、 n は円周方向の波数を表す。特に $n=0$ のときは、式(10)は中心軸に対称、いわゆる軸対称な振動を表し、この場合円周方向の変位 $v_{(0)}$ は常に零となる。 $a_{ij(n)}$, $b_{lm(n)}$, $c_{pq(n)}$ は未定係数である。 (i, j) , (l, m) , (p, q) はすべて零あるいは正の整数で、中実体の境界条件を満足するようにその下限を適当に選ばなければならない。式(10)を式(8)と(9)とに代入して得られる式をラグランジュ関数 $L = T - V$ の停留条件

$$\partial L / \partial a_{i'j'(n)} = 0, \partial L / \partial b_{l'm'(n)} = 0, \partial L / \partial c_{p'q'(n)} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

に代入することによって、次の振動数方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} A_{ij}^{(i'j')} - \Omega^2 T_{ij}^{(i'j')} & F_{ij}^{(l'm')} & G_{ij}^{(p'q')} \\ F_{ij}^{(l'm')} & B_{lm}^{(l'm')} - \Omega^2 T_{lm}^{(l'm')} & H_{lm}^{(p'q')} \\ G_{ij}^{(p'q')} & H_{lm}^{(p'q')} & C_{pq}^{(p'q')} - \Omega^2 T_{pq}^{(p'q')} \end{bmatrix}_{(n)} \begin{Bmatrix} a_{ij} \\ b_{lm} \\ c_{pq} \end{Bmatrix} = 0, (n=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 Ω は

$$\Omega^2 = \rho H^2 \omega^2 / G \dots\dots\dots (13)$$

で定義される無次元振動数パラメータである。式(12)の係数マトリックスから作られる行列式を零とする振動の固有値 Ω を計算することによって中実体の固有振動数が決定され、その固有値に対応する固有ベクトル $\{a_{ij} b_{lm} c_{pq}\}^T$ を計算することによって式(10)から振動形が決定される。式(12)の係数マトリックスの各要素 $A_{ij}^{(i'j')}$, $B_{lm}^{(l'm')}$, $C_{pq}^{(p'q')}$, ... は次式より計算される。

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^{(i',j')} &= \int_0^1 \int_0^1 [(\bar{\nu}(i+1)(i'+1)+2(ii'+1)+n^2)\xi^2 \\
 &\quad + \eta^2\{jf(\xi)-i\zeta f'(\xi)\}\{j'f(\xi)-i'\zeta f'(\xi)\}]\eta^{i+i'-1}\xi^{j+j'-2}d\eta d\xi \\
 B_{lm}^{(l',m')} &= \int_0^1 \int_0^1 [(\bar{\nu}+2)n^2+(l-1)(l'-1)]\xi^2 \\
 &\quad + \eta^2\{mf(\xi)-l\zeta f'(\xi)\}\{m'f(\xi)-l'\zeta f'(\xi)\}]\eta^{l+l'-1}\xi^{m+m'-2}d\eta d\xi \\
 C_{pq}^{(p',q')} &= \int_0^1 \int_0^1 [(\bar{\nu}+2)\eta^2\{qf(\xi)-p\zeta f'(\xi)\}\{q'f(\xi)-p'\zeta f'(\xi)\} \\
 &\quad + (p p' + n^2)\xi^2]\eta^{p+p'-1}\xi^{q+q'-2}d\eta d\xi \\
 T_{ij}^{(i',j')} &= \int_0^1 \int_0^1 f^2(\xi)\eta^{i+i'+1}\xi^{j+j'}d\eta d\xi \\
 F_{ij}^{(i',j')} &= \int_0^1 \int_0^1 n[\bar{\nu}(i+1)-l'+3]\eta^{i+l'-1}\xi^{j+m'}d\eta d\xi \\
 G_{ij}^{(i',j')} &= \int_0^1 \int_0^1 [\bar{\nu}(i+1)\{q'f(\xi)-p'\zeta f'(\xi)\}+p'\{jf(\xi)-i\zeta f'(\xi)\}]\eta^{i+p'}\xi^{j+q'-1}d\eta d\xi \\
 H_{lm}^{(l',m')} &= \int_0^1 \int_0^1 n[\bar{\nu}\{q'f(\xi)-p'\zeta f'(\xi)\}-\{mf(\xi)-l\zeta f'(\xi)\}]\eta^{l+p'}\xi^{m+q'-1}d\eta d\xi
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

3. 計算結果と考察

本方法は、種々の境界条件のもとで、任意の子午線形状を有する軸対称な中実体に適用することができるが、ここでは次の二つの物体について計算する。

3・1 両端が自由な鼓形ないし樽形軸対称中実体

図1は中央面の半径が C_1 で、両端の半径が C_2 に等しく、かつ両端が自由な樽形中実体を示す。この図のように、座標系の原点 O を中央面を選び、式(7)の子午線の形状を与える関数 $f(\xi)$ を

$$f(\xi) = c_1 - 4(c_1 - c_2)\xi^2 \tag{15}$$

とする。ここで

$$(c_1, c_2) = (C_1, C_2)/H \tag{16}$$

を表す。 $c_1 < c_2$ のときこの物体は鼓形となり、 $c_1 > c_2$ のときは樽形となる。一般に軸対称な物体には、 $n=0$ の軸対称振動と $n \neq 0$ の非軸対称振動が起こるが、なおこの中実体には中心軸に垂直な中央面に関しても対称な(S形)振動と逆対称な(A形)振動とが生じる。これらの振動に対して、式(10)で与えられる変位関数のべきは表1に示すようにとればよい。

図2は、等しい高さで、これに対して一定の自由端

図1 両端が自由な樽形軸対称中実体

半径比 c_2 をもつ軸対称中実体の振動の固有値 Ω と、中央横断面の半径比 c_1/c_2 との関係を示す。図(a), (b), (c)は、それぞれ波数 $n=0, 1, 2$ に対応しており、 $c_1/c_2=1$ における縦線上の値は、円柱の固有値を与えている。半径比 c_1/c_2 が増加するにつれ、低次振動では固有値はいったん増加したのち減少するのに対して、高次振動では単調に減少する。

図3は、半径比が $c_1/c_2=0.5, 1.0$ および 1.5 の3種の中実体の振動の固有値と振動モードを示す。物体

表1 変位関数のべき
(a)

Vibration mode	i, j	l, m	p, q
Axisymmetrical Vibration	1 0	- -	0 0
Unaxisymmetrical vibration	1 0	1 0	1 0

(b)

Vibration mode	j	m	q
S-type Vibration	even	even	odd
A-type Vibration	odd	odd	even

図4 一端が自由、他端が固定された中実円すい

図 2 両端が自由な鼓形ないし
樽形軸対称中実体の振動の固有値
($c_2=0.4, \nu=0.3$
(a) $n=0$; (b) $n=1$; (c) $n=2$)

図 5 一端が自由, 他端が固定された円柱の
振動の固有値
($c_4=0.4, \nu=0.3$
(a) $n=0$; (b) $n=1$; (c) $n=2$)

図 3 両端が自由な鼓形ないし樽形軸対称中実体の振動モード ($c_2=0.4$, $\nu=0.3$)

図 6 一端が自由、他端が固定された円柱の振動モード ($c_4=0.4$, $\nu=0.3$)

表 2 変位関数のべきの初項

Vibration mode	i.	j.	l.	m.	p.	q.
Axisymmetrical Vibration	1	1	-	-	0	1
Unaxisymmetrical vibration	1	1	1	1	1	1

表 3 両端が自由な円柱の対称な軸対称振動の固有値の収束状況と他の著者との比較 ($c_1=0.25$, $\nu=0.3$)

Number of terms	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
4×4	4.988	11.68	12.12	15.49
5×5	4.988	11.68	12.11	15.32
6×6	4.988	11.68	12.11	15.30
7×7	4.988	11.68	12.11	15.30
Hutchinson ⁽⁴⁾	4.988	11.68	12.12	15.30

Number of terms: $I \times J$, $L \times M$, $P \times Q$

の上面および側面に描かれた実線は、それぞれの表面の法線方向の(面外)変位が零となる節線を示し、破線は最大の面外変位を10としたときの変位の等高線を示す。円周方向の波数 $n=0$ の軸対称振動においては伸び変形が卓越しているものが多い。 $c_1/c_2=0.5$ の鼓形中実体には伸びと曲げの連成振動が多くみられるが、逆に、 $c_1/c_2=1.5$ の樽形中実体では連成振動は生じにくく、伸びか曲げのどちらか一方が卓越する振動が起こりやすい。

3.2 一端が自由、他端が固定された中実円すい

図4は、半径 C_3 の一端で自由、半径 C_4 の他端で固定された中実円すいを示す。図のように固定端の中心を座標原点に選べば、子午線の形状は

$$f(\xi) = c_4 - (c_4 - c_3)\xi \quad (17)$$

で与えられる。ここで、

$$(c_3, c_4) = (C_3, C_4)/H \quad (18)$$

この場合の式(10)の変位関数のべきの初項のとり方は表2に示すとおりである。

図5は、等しい高さで、これに対して一定の固定端半径比 c_4 をもつ、一端が自由、他端が固定された中実円すいの振動の固有値 Ω と、固定端に対する自由端の半径比 c_3/c_4 との関係を示す。上記と同様、図(a), (b), (c)の各々は波数 $n=0, 1, 2$ に対応しており、また $c_3/c_4=1$ は円柱に相当する。自由端半径比 c_3/c_4 の増加に従って、固有値は単調に減少する。

図6は、それぞれ半径比が $c_3/c_4=0.5, 1.0$ および 1.5 の場合の振動の固有値と振動モードを示す。上記同様、軸対称振動では伸び変形が卓越しており、また、

自由端半径が増加、すなわち半径比 c_3/c_4 が $0.5, 1.0, 1.5$ となるに従って、伸びと曲げの連成振動が優勢となってくる。図5(c)の1次と2次の振動は、それぞれ図6の $c_3/c_4=0.5$ における6次と8次振動、 $c_3/c_4=1.0$ における4次と6次振動、さらに $c_3/c_4=1.5$ における4次と5次振動に対応するが、 $c_3/c_4=0.5$ のとき側面の自由端近傍に生じやすい節線を考慮に入れなければ c_3/c_4 の値が 0.5 と 1.0 の間で側面のモード(変位分布)図に入れ換えが起こっているとみなし得る。これは、図5(c)に見るように、 c_3/c_4 の値が変化したとき二つの振動数曲線が互いに接近するものの、交差することがないときに生じる。同様のことは、図5(a)に示されている $n=0$ の2次と3次の振動の場合にも生じていることが、図6の $n=0$ の2次モードを比較することからもうなずける。

実際の数値計算では、式(10)で採用する級数の項数 ($I \times J, L \times M, P \times Q$) を、解の収束状況を十分検討した上で有限の個数で打ち切る必要がある。表3は、両端が自由な円柱の級数の項数に対する固有値の収束状況と、他の著者による計算結果との比較を示す。固有値は級数の項数が増すに従って一定値に収束し、 6×6 項ですでに有効数字4ケタの範囲内の収束値を得て、これが Hutchinson⁽⁴⁾ による数値とよく一致している。したがって、本方法によって得られる計算結果は十分な精度をもつものと考えられる。一般的には、円周方向波数 n と高さに対する半径の比によってその収束状況が異なるので、本論文ではそれぞれの場合に対して収束状況を判断しながら項数を決定した。

4. あ と が き

本報では、変数変換により軸対称中実体を単位の軸長と半径をもつ円柱に変換し、リッツ法によってその振動数方程式を導いた。そして、この方法によって、鼓形ないし樽形中実体と中実円すいの固有振動数パラメータと振動モードを数値計算し、その振動特性を定量的に明らかにした。この場合、中実体の変位を軸および半径方向座標のべき関数と三角関数との積の級数で与え、級数の項数を適正に選ぶことによって、任意の子午線形状を有する物体に対して実用上十分な精度をもつ数値が得られることを示した。

文 献

- (1) McNiven, H.D. and Perry, D.C., *Axially Symmetric Waves in Finite, Elastic Rods*, *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**-4 (1962), 433.
- (2) Rumerman, M. and Raynor, S., *Natural Frequencies of Finite Circular Cylinders in Axially Symmetric Longi-*

- tudinal Vibration*, *J. Sound Vib.*, 15-4 (1971), 529.
- (3) Hutchinson, J. R., *Axisymmetric Vibrations of a Solid Elastic Cylinder Encased in a Rigid Container*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 42-2 (1967), 398.
- (4) Hutchinson, J. R., *Axisymmetric Vibrations of a Free Finite Length Rod*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 51-1 (1972), 233.
- (5) Hutchinson, J. R., *Axisymmetric Flexural Vibrations of a Thick Free Circular Plate*, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 46-1 (1979), 139.
- (6) Hutchinson, J. R., *Vibrations of Solid Cylinders*, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-4 (1980), 901.
- (7) McMahon, G. W., *Experimental Study of the Vibrations of Solid, Isotropic, Elastic Cylinders*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 36-1 (1964), 85.
- (8) Leissa, A. W. and Zhang, Z., *On the Three-Dimensional Vibrations of the Cantilevered Rectangular Parallelepiped*, *J. Acoust. Soc. Am.*, 73-6 (1983), 2013.
- (9) Hutchinson, J. R. and Zillmer, S. D., *Vibration of a Free Rectangular Parallelepiped*, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50-1 (1983), 123.

討 論

〔質問〕 谷 順 二〔東北大学高速力学研究所〕
円周方向波数と高さに対する半径の比による収束状況の違いをお教え願いたい。

〔回答〕 付表 1 に、二、三の波数 n と高さに対する半径比 c_2 をもつ両端が自由な円柱の逆対称な振動の固有値の収束状況を示す。付表 1 (a) にみるように、 $n=0, 2, 3$ における最低次の固有値 Ω_1 の収束状況は表 3 の結果とほぼ同程度である。これに対して、付表 1 (b) に示す $n=1$ の場合は、 $c_2=2.0$, あるいは 0.5 では二次の固有値 Ω_2 はほぼ収束しているとみなされるが、最低次の固有値 Ω_1 や c_2 の値が小さい(細長い)円柱の値の収束は良いとは言えない。計算に当たっては、この点に十分注意を払う必要があろう。

付表 1 両端が自由な円柱の逆対称な振動の固有値($\nu=0.3$)

(a) 基本振動数, Ω_1

Wave number	Number of terms	c_2		
		2.0	0.5	0.1
0	4 × 4	0.8505	5.744	10.04
	5 × 5	0.8507	5.744	10.04
	6 × 6	0.8507	5.744	10.04
2	4 × 4	0.5358	3.957	21.35
	5 × 5	0.5357	3.957	21.31
	6 × 6	0.5357	3.957	21.31
3	4 × 4	1.060	6.381	33.00
	5 × 5	1.060	6.380	32.60
	6 × 6	1.060	6.380	32.53

(b) $n=1$

Number of terms	c_2					
	2.0		0.5		0.1	
	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2
9 × 9	0.1192	1.544	1.170	4.418	7.626	8.185
11 × 7	0.1139	1.543	1.130	4.410	7.369	7.968
13 × 7	0.1101	1.543	1.098	4.404	7.169	7.803
15 × 7	0.1071	1.542	1.074	4.400	7.007	7.672
17 × 5	0.1047	1.542	1.053	4.396	6.877	7.566
19 × 5	0.1026	1.541	1.036	4.393	6.746	7.476