接液弾性円板の固有振動数に関する研究*
(板厚, 液体密度と粘度の影響)

高 田 一**, 大 野 一 彦***

Research on Natural Frequency of a Disc in Contact with a Liquid
(Effects of Disc Thickness, Liquid Density and Viscosity)

by Hajime TAKADA and Kazuhiko ÔNO

The added mass of a vibrating plate in a fluid reduces the natural frequency of the plate in comparison with that in air. The ratio of the former to the latter is affected by the disc thickness, the liquid density and a hole in the disc. In this research, two kinds of discs, 2.05 mm and 3.05 mm in thickness, and four kinds of liquids, 0.858, 0.890, 0.965, $1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ in density, are investigated to clarify their influences. In the experimental results, the values of the nondimensional formula, which contains the disc thickness or the liquid density, are almost the same at and below 0.33 in the ratio of the liquid depth to the diameter of the disc for the modes with a free surface. The effect of a circular hole in the center is very small, provided the area ratio of the hole to the plate without a hole is smaller than 0.0178.

Key Words: Vibration, Coupled Vibration, Natural Frequency, Liquid Vibration, Added Mass, Finite Element Method

1. 結 論

弾性板が液体と接する場合の固有振動数は流体機械を設計する際には重要であるが, 報告が少ないようである。板と液体の関連振動では, 久保田ら⁽¹⁾の報告があり, 中央固定環状円板について半径方向等変位の仮定のもとで円周方向モード(節直径モード)に注目して近似式を導いている。前報⁽²⁾では円板半径 150 mm, 板厚 2.94 mm, 比重 0.858 という条件のもとで, 周辺固定円板について固有振動数が低下することを述べた。それは, 弾性板が自由表面をもつ円板と接する場合は液体の深さが大きくなるにつれて固有振動数は低下し, ある値に漸近する。自由表面のない液体と接する場合は, 液深 ∞ で前述の漸近値となり, 液深が小さくなるにつれて固有振動数は低下する。というものであり, 自由表面の場合は節直径数 $n=0$, 節円数 $s=0$ および $n=1, s=0$ の二つのモードについて, 自由表面のない場合は, $n=1, s=0$ のモードについて報告した。本研究では, 引き続き, 弾性円板の板厚, 液体の密

度を変えた場合, 円板の中央に円孔がある場合について, 固有振動数の低下がどのようになるか実験を行った。さらに, 前報で導いた式の有効性を確かめ, 相似則を確認したので報告する。

2. 実 験

実験装置図については, 前報に掲載してあるのでここでは省略する。振動板は周辺固定で直径 300 mm, 板厚は, 2.05, 2.97, 3.05 mm の 3 種類で, 板厚 2.97 mm の板は中央に円孔を設け円板の両側に液体が接する状態で実験を行った(図 1 参照)。この場合, 下側には液体が満たされており, 上側の液体は自由表面をもつ場合と固定壁で覆われ自由表面を持たない場合の

図 1 実験モデル

* 昭和 60 年 11 月 2 日 東北支部仙台地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 60 年 5 月 23 日.

** 正員, 横浜国立大学工学部 (〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台 156).

*** 日本電気(株) (〒108 東京都港区芝 5-33-1).

2とおりがある。振動板に接する液体は、密度 $0.858 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、動粘度 $110 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (15°C)、密度 $0.890 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、動粘度 $790 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、密度 $0.965 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、動粘度 $120 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、密度 $1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、動粘度 $1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ の 4 種類である。実験は 15°C 付近で行い、固有振動数を測定して空中値に対する比を求めた。

3. 実験結果

3.1 記号

a : 弾性円板の半径 mm

h : 弾性円板の板厚 mm

n : 節直径数

s : 節円数

H : 液深 mm

α : 固有振動数比 (空気中に対する)

ϕ : 円孔の径 mm

ρ_l : 液体の密度

ρ_s : 弾性円板の密度

$$\Omega_h = (1/\alpha^2 - 1)h/a$$

$$\Omega_p = (1/\alpha^2 - 1)\rho_s/\rho_l$$

$$\Omega_p = 1/\alpha^2 - 1$$

3.2 弾性円板の板厚の影響 弾性円板の板厚が変われば空気中における固有振動数は変わるが、液体に接しているときの固有振動数と空気中での固有振動数との比 (以下固有振動数比という) α にも影響がでくる。非粘性、非圧縮の液体の場合、固有振動数を求めたい板-液系の α を、異なる板厚の板-液系のデータから求める式は次の形で表せる。

$$\frac{1}{\alpha^2} = 1 + 0.180 \cdot \frac{\rho_l}{\rho_s} \cdot \frac{a}{h} \left(\frac{1}{\alpha_1^2} - 1 \right) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 α_1 は弾性円板の半径 $a_1 = 150 \text{ mm}$ 、板厚 $h_1 = 2.94 \text{ mm}$ 、密度 $\rho_{s1} = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、液体の密度 $\rho_{l1} = 0.858 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、液深 $H_1 = H \times a_1/a$ のときの固有振動数比であり、 ρ_l 、 ρ_s 、 a 、 h 、 H は固有振動数を求めたい板-液系の諸量である。これによると弾性円板の密度、半径、液体の密度、液深、振動モードが同じで板厚だけが異なるのであれば、 $1/\alpha^2 - 1$ は板厚に反比例し、 $(1/\alpha^2 - 1)h/a$ は板厚によらず同じ値になる。本実験では弾性円板の上側にだけ液体を入れ、板厚が 2.05 mm と 3.05 mm の 2 種類で固有振動数を求めた。

図 2 に、節直径が 1 本存在するモードの Ω_h の値を示す。図の縦軸で値の大きいほうが固有振動数が小さいことを示し、液深が増すにつれて上昇していく点群は、液体に自由表面がある場合、液深が増すにつれて

低下していく点群は、液体に自由表面がない場合である。この図の実験点をみると液深比 $H/a = 0.33$ 以下では自由表面のある場合の Ω_h の値は、板厚によらないことがわかる。また、実線は有限要素法により求めた計算値である。計算では、 Ω_h の値は、板厚によらず、固有振動数の低下傾向をよく示しているといえる。

図 3 は、節直径が 2 本存在するモードの Ω_h を示す。図 2 と比較すると、液深が大きい場合は $n=1$ のモードのほうが $n=2$ の場合より Ω_h の増大、すなわち固有振動数の低下が著しいことがわかる。液体が自由表面をもつ場合と密閉されている場合とをみると、図 2、図 3 とともに液深が大きくなるにつれて両方に共通な値に漸近していくようすは前報で述べた結果と同じである。

図 4 は、 $n=0, s=1$ のモードの結果である。この場合も 2 種類の板厚での実験値 Ω_h は、よく一致している。このモードの Ω_h は、 $n=1, s=0$ と $n=2, s=0$ の間に存在し、 $n=0, s=1$ のモードのほうが、 $n=2, s=0$ より低下が著しいことがわかる。

3.3 液体の密度、粘度の影響 式(1)によると、弾性板の密度、板厚、半径、液深、振動モードが同じであれば、 $1/\alpha^2 - 1$ は液体の密度に比例し、 $(1/\alpha^2 - 1)\rho_s/\rho_l$ は液体の密度によらず、同じ値となる。本実

図 2 板厚を変えた場合の Ω_h ($n=1, s=0$)

験では、密度が $0.858, 0.890, 0.965, 1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ の4種類の液体を弾性板の上側に入れ、自由表面モードの Q_p の値を求めた。

図5は、最低次のモードの Q_p を示したものでこれによると4種類の液体を用いた場合のそれぞれの Q_p は、 $\rho = 1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ の場合がやや小さい傾向がある。これは、他の3種類の動粘度が、 $\nu = 110, 120, 790 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} (15^\circ\text{C})$ に比べて $\rho = 1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (水) は $\nu = 1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} (15^\circ\text{C})$ と小さいため、粘度の影響が出たためと思われる。

図6は、節直径が1本存在するモードで、 Q_p の値は液深が大きくなるにつれて、 $n=0$ の結果と異なっ

ていき、 $H/a=1.1$ では、 $n=0$ のときの半分ほどになっている。図5, 6とも、実線は計算値であり、低下傾向をよく示している。

図7, 8は、それぞれ $n=2, s=0$ および $n=0, s=1$ のモードの Q_p の値であり、 $n=0, s=1$ の場合は、前述と同様、 $n=1, s=0$ と $n=2, s=0$ の間に存在している。

3・4 弾性円板に孔を開けた場合 この節では、弾性円板の中央に円孔 ($\phi=0, 5, 12.5, 20, 40$) をあけ、円板の両面に液体が接するようにした場合の固有振動数低下について述べる。この実験では、円板の下側には液体が満たされており (底までの距離=122mm),

図3 板厚を変えた場合の $Q_p (n=2, s=0)$

図5 液体密度を変えた場合の $Q_p (n=0, s=0)$

図4 板厚を変えた場合の $Q_p (n=0, s=1)$

図6 液体密度を変えた場合の $Q_p (n=1, s=0)$

上側の液体は自由表面を持つ場合と密閉されている場合の2とおりがある。下側の液深を変えればもちろん固有振動数は変わってくるが、下側の液体は密閉されており、上側の液体をカバーで密閉した場合と固有振動数が低下する様子は同じである。したがって、ここでは、下側の液深は122 mmと一定で行い、上側の液深を変えて、固有振動数を測定する。また、 $H=0$ （上側の液深）のときでも、下側に液体が満たされているので Q_p は零にはならない。

図9は、 $n=1, s=0$ のモードの結果である。本実験では、 $n=0, s=0$ のモードは現れなかった。また、孔径の影響は $\phi=40$ までの範囲ではあまりみられない。この理由は、円孔があっても孔面積が小さいため（本実験での最大の孔径である $\phi=40$ の場合、無孔振動板面積に対する比は $(40/300)^2=0.0178$ となる。）、孔を軸方向によぎる流れの影響が小さいためと考えられる。すなわち、下側の液体は、密閉された状態に近いので、 $n=0, s=0$ のモードは現れにくい。

図7 液体密度を変えた場合の $Q_p(n=2, s=0)$

図8 液体密度を変えた場合の $Q_p(n=0, s=1)$

図10は、 $n=2$ のモードの結果である。密閉されている場合の、 $H=122 \text{ mm}$ ($H/a=0.813$)での Q_p は、約2.2と推定でき、 $H=0$ での値（約1.1）のほぼ2倍になっている。これは、両面に同じ量の液体が接して

図9 有孔円板の場合の $Q_p(n=1, s=0)$

図10 有孔円板の場合の $Q_p(n=2, s=0)$

いれば、片面のときの2倍の効果があることを示している。密閉された状態での $H/a < 0.33$ では値にばらつきがあるが、それ以外では孔径に関係なくほぼ同じ値ということができる。

4. 結 論

液体に接する弾性円板の固有振動数の低下に関して、異なる板厚の場合、密度、粘度の異なる液体に接する場合、円板の中央に円孔を設けた場合について実験を行い、次の結論を得た。

(1) 異なる板厚 ($h=2.05, 3.05$ mm) でも、円板の密度、半径、液体の密度、液深が同じで、液深比 H/a が 0.27 より小さければ、 $(1/a^2-1)h/a$ の値は $n=1, s=0$, および $n=2, s=0$, ならびに $n=0, s=1$ の自由表面モードにおいてそれぞれ液深比だけの関数になる。

(2) 密度の異なる液体に接する場合 ($\rho=0.858, 0.890, 0.965, 1.000 \times 10^3$ kg/m³), 円板の密度、半径、板厚、液深が同じならば、 $(1/a^2-1)\rho_s/\rho_l$ の値は $n=0, s=0$, および $n=1, s=0$ のそれぞれの自由表面モードにおいてほぼ液深比だけの関数になるが、粘度の影響を少し受ける。

(3) 円板の中央に円孔 ($\phi=5, 12.5, 20, 40$) を設けた場合でも、 $n=0, s=0$, および $n=1, s=0$ のモードにおいては $1/a^2-1$ の値は孔なしの場合とほぼ同じである。

最後に本実験を進めるにあたり始終ご指導いただいた横浜国立大学 津田公一教授、豊倉富太郎教授に深く感謝する。実験装置の製作をはじめ、本研究に有益な助言をいただいた(株)東芝の京浜事業所技監 田中宏氏、重電技術研究所主査 長藤友建氏に厚くお礼申し上げます。また、実験の手伝いをしてくれた小出晃、奥山浩司両君に感謝する。

付 録

(1) 式(1)の誘導について

固有振動数比を $\alpha(=f/f_0)$ とする。ここで、 f_0 は空中における固有振動数である。液体は理想流体で密度にかかわらず流体の速度場が同じと仮定して

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

と書くと、 ε は液体の密度、振動板の半径に比例し、振動板の板厚、密度に反比例する⁽³⁾。したがって、

(a) 円板の要素分割図 (二次元)

(b) 液体の要素分割図 (三次元)
図の三角柱をさらに3個の四角すいに分割する

図 11 要素分割図

$$\frac{\frac{1}{a^2}-1}{\frac{\rho_l a}{\rho_s h}} = \frac{\frac{1}{a_1^2}-1}{\frac{\rho_{l1} a_1}{\rho_{s1} h_1}}$$

と表すことができ、右辺に既知の諸量を(各諸量は本文にある)、左辺に未知の諸量を代入すると式(1)が導かれる。

(2) 有限要素法について⁽⁴⁾

前報にも述べたが、液体は非圧縮性と仮定し、弾性板および液体の減衰項は無視すると、固有振動数を求める式は次のようになる。

$$[K]\{\delta\} + ([M] - \rho_l [Q])^T [H]^{-1} [Q]\{\delta\} = 0$$

この固有値を求めれば、円板が液体に接している場合の固有振動数が得られる。計算に際しては、円板については、二次元分割で三角形要素数 28, 節点数 21, 液体については三次元分割で四角すい要素数 168, 節点数 63 である(図 11 参照)。なお、自由表面では $\phi=0$ として計算を行った。

文 献

- (1) 久保田・鈴木, 機論, 50-449, C (昭59), 243.
- (2) 高田・大野, 液体に接する周辺固定円板の固有振動数, 機論, 51-469, C (昭60), 2393.
- (3) 機械工学便覧, 第6版第8編, (昭52), 8-49.
- (4) Zienkiewicz, 吉識・山田監訳, マトリックス有限要素法, (昭51), 培風館.