縮退した振動モードをもつ長方形膜の非線形強制振動*

安田 仁彦**, 浅野 武***
Kimihiko YASUDA, Takeshi ASANO**Key Words:** Vibration of Continuous System, Rectangular Membrane, Nonlinear Forced Oscillation, Degenerate Modes, Harmonic Oscillation, Almost Periodic Motion

1. ま え が き

無限自由度を含む多自由度振動系において、その振動モードのいくつかが同じ固有振動数をもつとき、これらの振動モードは縮退しているといわれる。対称な形状をもつ構造物などで振動モードの縮退がしばしば生じる。

多自由度非線形振動系において、対応する線形系の固有振動数のいくつかが簡単な整数比をなすとき、この系は内部共振の条件を満たしているといわれ、このような系に外力が作用するときの動的応答の問題は、Sethna⁽¹⁾, Tondl⁽²⁾, Nayfehら⁽³⁾, 著者ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾によって扱われてきた。これに対し、対応する線形系の振動モードが縮退している非線形振動系に外力が作用するときの動的応答の問題はほとんど扱われていないようである。

この報告では、振動モードが縮退している非線形振動系の動的応答の特性を、適当な例を通して求めることにする。長方形膜は、ある適当な縦横比をもつときその振動モードが縮退し、かつ、大振幅で振動するとき非線形振動系となることはよく知られている。そこで振動モードが縮退している振動系の例として、この長方形膜を取り上げ、調和外力に対する動的応答を求め、それが特徴的なものとなることを示す。

理論解析のため、問題を支配する方程式にガラーキン法を適用してモード方程式を導く。次に、得られた方程式をハーモニクバランス法で解く。モード方程式はアナログ計算機によっても扱い、ハーモニクバランス法で得られた結果の妥当性を検討する。最後に、鋼製の薄い膜で実験を行い、理論によって得られた結

果の妥当性を検討する。

2. 基礎方程式とモード方程式

2・1 基礎方程式 2辺の長さ a, b , 厚さ h の長方形膜を考える。平衡位置の膜の中央面内に直交座標系 $O-xy$ を、 x 軸、 y 軸が隣り合った2辺に一致するように定める。膜は一樣な初期張力 N_0 で張られており、また、粘性減衰力が作用するものとして、膜に対する Kármán 形の運動方程式を求めると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ - c \frac{\partial w}{\partial t} + q \\ \nabla^4 F = Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに w, F, q はそれぞれ膜の中央面のたわみ、膜の面内応力を定める応力関数、外力を表し、いずれも座標 x, y と時間 t の関数である。 ρ, E および c はそれぞれ密度、縦弾性係数および減衰係数を表し、

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \dots\dots\dots (2)$$

である。 x 方向、 y 方向の変位を u, v とおくと、応力とひずみの関係より

$$\left. \begin{aligned} Eh \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ Eh \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ Eh \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] &= -2(1+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和60年3月16日 東海支部第34期総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和59年10月12日。

** 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

*** ブラザー工業(株) (〒467 名古屋市瑞穂区堀田通9-35)。

を得る。ここに ν はポアソン比である。

次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}, \kappa = \frac{a}{b} \\ t' &= \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{N_0}{\rho h}} t, w' = \frac{w}{h} \\ c' &= \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\rho h N_0}} c, q' = \frac{a^2}{\pi^2 h N_0} q \\ F' &= \frac{F}{E h^3 \kappa^2}, \epsilon' = \frac{E h^3 \kappa^2}{N_0 \pi^2 b^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

を導入して式(1)を書きなおい、肩の記号「'」を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ = \epsilon \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ - c \frac{\partial w}{\partial t} + q \\ \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \kappa^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \kappa^4 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を得る。

境界条件は膜の4辺において、

$$w=0, u=0, v=0 \dots\dots\dots (6)$$

が満たされることである。これらの条件をすべて厳密に満たすように式(1)の解を見つけることは難しい。

この報告の目的が、振動特性へ及ぼすモードの縮退の影響を明らかにすることにあるので、報告⁽⁶⁾⁽⁷⁾などで行われているように、式(6)の後の二つの条件を「平均的」に満たす解を求めることにする。このため式(6)の後の二つの条件を次式

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = 0 \\ \int_0^b \int_0^a \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0 \\ \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

でおきかえる。この条件に式(3)、(4)を代入し、こでも肩の記号「'」を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left[\kappa^4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \kappa^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy = 0 \\ \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \kappa^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0 \\ \int_0^1 \int_0^1 \left[2(1+\nu) \kappa^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。

2.2 モード方程式 式(5)の未知量 w を、対応する線形振動モードの重ね合せの形で求めることにする。線形振動モードの振動形 $w_{ij}(i, j=1, 2, 3, \dots)$ は式(4)の変数を用いると

$$w_{ij} = \sin i\pi x \sin j\pi y \dots\dots\dots (9)$$

であることは周知のとおりである。以下式(9)で与えられる線形振動モードを (i, j) 次の振動モードとよぶことにする。求める w を次式

$$w = X_1 \sin m\pi x \sin n\pi y + X_2 \sin r\pi x \sin s\pi y \dots\dots\dots (10)$$

のように、 (m, n) 次と (r, s) 次の二つの振動モードの重ね合せで与えられるとする。ここに X_1, X_2 は時間の未知関数で、以下のように定められる。なお、ここでの扱いを、 w が三つ以上の振動モードの重ね合せで与えられる場合に拡張することは容易である。

式(10)の w は式(6)の第1の境界条件を厳密に満たしている。

式(5)のもう一つの未知量 F の形を定める。このため、式(10)を式(5)の第2式に代入して F について解くと次式を得る。

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{32} \left(\frac{n^2}{m^2} \cos 2m\pi x + \frac{m^2}{n^2 \kappa^4} \cos 2n\pi y \right) X_1^2 \\ & + \frac{1}{32} \left(\frac{s^2}{r^2} \cos 2r\pi x + \frac{r^2}{s^2 \kappa^4} \cos 2s\pi y \right) X_2^2 \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{-(ms-nr)^2}{\{(m+r)^2 + \kappa^2(n+s)^2\}^2} \cos(m+r)\pi x \right. \\ & \times \cos(n+s)\pi y + \frac{(ms+nr)^2}{\{(m+r)^2 + \kappa^2(n-s)^2\}^2} \\ & \times \cos(m+r)\pi x \cos(n-s)\pi y \\ & + \frac{(ms+nr)^2}{\{(m-r)^2 + \kappa^2(n+s)^2\}^2} \cos(m-r)\pi x \\ & \times \cos(n+s)\pi y \\ & + \frac{-(ms-nr)^2}{\{(m-r)^2 + \kappa^2(n-s)^2\}^2} \\ & \times \cos(m-r)\pi x \cos(n-s)\pi y \left. \right] X_1 X_2 \\ & + \frac{1}{2} N_{x0} y^2 + \frac{1}{2} N_{y0} x^2 + N_{xy0} xy \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに、 N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0} は時間の未知関数である。式(10)、(11)を式(8)に代入すると、これらの未知関数のうち、 N_{x0}, N_{y0} は X_1, X_2 を用いて

$$\left. \begin{aligned} N_{x0} &= \frac{\pi^2}{8(1-\nu^2)\kappa^4} [(m^2 X_1^2 + r^2 X_2^2) \\ & \quad + \nu \kappa^2 (n^2 X_1^2 + s^2 X_2^2)] \\ N_{y0} &= \frac{\pi^2}{8(1-\nu^2)\kappa^4} [\kappa^4 (n^2 X_1^2 + s^2 X_2^2) \\ & \quad + \nu \kappa^2 (m^2 X_1^2 + r^2 X_2^2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

で与えられる。また N_{xy0} は、 $m \pm n, r \pm s$ の少なくとも

も一方が偶数のとき,

$$N_{xy0}=0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり, $m \pm n, r \pm s$ がともに奇数のとき

$$N_{xy0} = \frac{1}{2} \left[\frac{-(ms-nr)^2}{\{(m+r)^2 + \kappa^2(n+s)^2\}^2} + \frac{(ms+nr)^2}{\{(m+r)^2 + \kappa^2(n-s)^2\}^2} + \frac{(ms+nr)^2}{\{(m-r)^2 + \kappa^2(n+s)^2\}^2} + \frac{-(ms-nr)^2}{\{(m-r)^2 + \kappa^2(n-s)^2\}^2} - \frac{4mnrs}{(1+\nu)\kappa^2(m^2-r^2)(n^2-s^2)} \right] X_1 X_2 \dots (13')$$

で与えられる.

最後に式(10), (11)が式(5)の第1式を近似的に満たすための条件をガラーキン法を用いて求める. このため外力 q を

$$q = \sum_{i,j} q_{ij} \sin i\pi x \sin j\pi y \quad \dots\dots\dots (14)$$

の形に展開し, この式および式(10), (11)を式(5)の第1式に代入して得られる式で, 両辺の $\sin m\pi x \sin n\pi y$ および $\sin r\pi x \sin s\pi y$ の係数を等しいとおく. この結果

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + p_1^2 X_1 = \epsilon N_1(X_1, X_2) - c\dot{X}_1 + q_1 \\ \ddot{X}_2 + p_2^2 X_2 = \epsilon N_2(X_1, X_2) - c\dot{X}_2 + q_2 \end{cases} \quad \dots\dots (15)$$

の形の方程式を得る. ただし $\epsilon N_1(X_1, X_2), \epsilon N_2(X_1, X_2)$ は非線形項を表し, X_1, X_2 の三次式である. これらの具体的な表示式は, m, n と r, s を指定すれば容易に求められる. また,

$$\begin{cases} p_1^2 = p_{mn}^2 = m^2 + \kappa^2 n^2, p_2^2 = p_{rs}^2 = r^2 + \kappa^2 s^2 \\ q_1 = q_{mn}, q_2 = q_{rs} \end{cases} \quad (16)$$

である. 式(15)が X_1, X_2 を定めるモード方程式である.

図1 固有角振動数 p_{ij} と縦横比 κ の関係

3. 振動モードが縮退する膜の主共振点付近の振動

3.1 問題の設定 膜の (i, j) 次の線形振動モードの固有角振動数 p_{ij} は式(16)からわかるように

$$p_{ij}^2 = i^2 + \kappa^2 j^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる. 1 から 3 までの範囲の i, j に対して, p_{ij} の値を式(17)から求め, 膜の縦横比 $\kappa = a/b$ の関数として示すと図1のようになる. 図1から明らかに, κ のいくつかの値に対し, 二つ以上の固有角振動数が一致し, 振動モードに縮退が生ずることがわかる. そこで (m, n) 次と (r, s) 次の固有角振動数が一致するような膜の縦横比を κ_0 とおく.

この報告では, 与えられた膜の縦横比 κ が

$$\kappa \neq \kappa_0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

を満たし, したがって式(16)の p_1, p_2 は

$$p_1 \neq p_2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

を満たすものとする. 次にこの膜に調和外力が作用するものとし, したがって式(15)の q_1, q_2 が

$$q_i = Q_i \cos \omega t \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (20)$$

の形で与えられるものとする. さらにこの外力の角振動数 ω が

$$\omega \neq p_1 \neq p_2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

を満たすものとする. いいかえると, ω が二つの振動モードについて同時に主共振点付近にあるものとする. 以上の条件のもとで膜にどのような振動が生ずるかを検討することにする.

簡単のため, m, n と r, s は, $m \pm n, r \pm s$ の少なくとも一方を偶数にするようなものであるとする. このとき, 式(15)は式(13), (20)を考慮して次式の形となる.

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + p_1^2 X_1 = \epsilon(A_1 X_1^2 + A_2 X_2^2) X_1 - c\dot{X}_1 + Q_1 \cos \omega t \\ \ddot{X}_2 + p_2^2 X_2 = \epsilon(A_2 X_1^2 + A_3 X_2^2) X_2 - c\dot{X}_2 + Q_2 \cos \omega t \end{cases} \quad \dots\dots\dots (22)$$

係数 A_1, A_2, A_3 の具体的な表示式は m, n と r, s を指定すれば容易に定められる.

以下この方程式の振動解を求めることにする.

3.2 振動解 式(22)の解を

$$\begin{cases} X_1 = R_1 \cos(\omega t - \gamma_1) \\ X_2 = R_2 \cos(\omega t - \gamma_2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (23)$$

においてハーモニクバランス法を用いると, $R_1, \gamma_1, R_2, \gamma_2$ を定める次式が得られる.

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_1 &= -\frac{c}{2}R_1 + \frac{Q_1}{2\omega}\sin\gamma_1 \\
 &\quad - \frac{\varepsilon A_2}{8\omega}R_2^2R_1\sin 2(\gamma_1 - \gamma_2) \\
 \dot{\gamma}_1 &= \frac{\omega^2 - p_1^2}{2\omega} + \frac{Q_1}{2\omega R_1}\cos\gamma_1 - \frac{3\varepsilon A_1}{8\omega}R_1^2 \\
 &\quad - \frac{\varepsilon A_2}{8\omega}R_2^2\{2 + \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)\} \\
 \dot{R}_2 &= -\frac{c}{2}R_2 + \frac{Q_2}{2\omega}\sin\gamma_2 \\
 &\quad - \frac{\varepsilon A_2}{8\omega}R_1^2R_2\sin 2(\gamma_2 - \gamma_1) \\
 \dot{\gamma}_2 &= \frac{\omega^2 - p_2^2}{2\omega} + \frac{Q_2}{2\omega R_2}\cos\gamma_2 - \frac{3\varepsilon A_3}{8\omega}R_2^2 \\
 &\quad - \frac{\varepsilon A_2}{8\omega}R_1^2\{2 + \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1)\}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

定常解は上式に条件

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = 0 \tag{25}$$

を代入して定められる。

定常解の安定性は、定常解 $R_{10}, R_{20}, \gamma_{10}, \gamma_{20}$ にそれぞれわずかなずれ $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ を与え、これらの時間変化を調べて定められる。このため、式(24)の $R_1, R_2, \gamma_1, \gamma_2$ のかわりに $R_{10} + \xi_1, R_{20} + \xi_2, \gamma_{10} + \eta_1, \gamma_{20} + \eta_2$ を代入し、二次以上の微小量を無視して、ずれの時間変化を与える式を求める。次に、この式の特性方程式を求め、Routh-Hurwitz の判別法を適用する。

4. 数 値 例

図1によると、

$$\kappa = \kappa_0 = 1.633 \tag{26}$$

となるとき、(1,2)次と(3,1)次の振動モードに対し、 $p_1 = p_2$ が成り立つ。ここではこの場合を具体例として取り上げ、数値例により振動の特性を検討する。

パラメータの値を

(a) R_1

(c) γ_1

(b) R_2

(d) γ_2

$$Q_1 = Q_2 = 10.0, c = 0.2, \kappa = 1.633$$

図2 共振曲線と位相曲線

$$\varepsilon = 6 \times 10^{-4}, \nu = 0.3, c = 0.2,$$

$$Q_1 = Q_2 = 10 \quad \dots\dots\dots (27)$$

とし、 ω が p_1 と p_2 の値に近い値をとるときの R_1, R_2 の変化を表す共振曲線および γ_1, γ_2 の変化を表す位相曲線を求めると、図 2 (a)~(d) のようになる。ここで実線と破線はそれぞれ振動が安定な場合と不安定な場合を表す。

図 2 から、主共振点付近の振動の特徴として次のようなことが挙げられることがわかる。曲線は、図 2 の ω のすべての範囲にわたって存在する分枝 ABCDEF と、この分枝から独立して、 ω のある限られた範囲に存在する閉じた分枝 GHIJKL とから成る。そしてそれぞれの分枝は ω とともに複雑に変化する。分枝 GHIJKL 上に、その境界が垂直接線をもつ点でない、したがって通常はあまり見られない不安定部分が存在する。

いま最後に取り上げた不安定部分に対する ω の範囲での系の挙動を見るため、定常解を仮定しないで、式 (24)、あるいはこ

れと等価である、変数

$$\left. \begin{aligned} u_i &= R_i \cos \gamma_i \\ v_i &= R_i \sin \gamma_i \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

を用いて書き直した式を、適当な初期条件のもとに数値積分してみた。十分時間が経過した後の数値積分の結果の一例を図 3 に示す。図 3 は式 (28) の u_i, v_i を横軸、縦軸にとり、時間をパラメータとして示したものである。図 3 から、 u_i, v_i は、相当な時間が経過した後でもある範囲内で変動を続け、したがって、式 (23) の

$$Q_1 = Q_2 = 10.0, c = 0.2, \kappa = 1.633$$

図 3 不安定部分における系の挙動

$$Q_1 = Q_2 = 10.0, c = 0.2, \kappa = 1.633$$

図 4 アナログ計算機によって得られた振動波形の例

R_i, γ_i でいえば, 振幅, 位相ともいつまでも一定値とならないである範囲内で変動し, 膜に概周期運動が生ずることになる. 図2には, ω のいくつかの値に対し, 十分時間が経過した時点における, 振幅あるいは位相の変化範囲を, 記号 A. P. M. を付して示した.

定常解に議論を戻し, この場合の位相曲線を見ると, ω の値によって $\gamma_1 - \gamma_2$ は

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (29\cdot a)$$

$$0 < \gamma_1 - \gamma_2 < \pi \quad \dots\dots\dots (29\cdot b)$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \pi \quad \dots\dots\dots (29\cdot c)$$

$$\pi < \gamma_1 - \gamma_2 < 2\pi \quad \dots\dots\dots (29\cdot d)$$

を満たす種々の値をとることがわかる. たわみ w は

$$w = R_1 \cos(\omega t - \gamma_1) \sin \pi x \sin 2\pi y \\ + R_2 \cos(\omega t - \gamma_2) \sin 3\pi x \sin \pi y \quad \dots\dots\dots (30)$$

で与えられるから, 振動中の膜の節線は, 式(29・a), (29・c)の場合には固定されているのに対し, 式(29・b), (29・d)の場合には移動し続ける.

5. アナログ計算機による解析

式(22)の形の方程式をアナログ計算機によって解析することは難しくない.

ここでは, 4章で取り上げた具体例について, アナ

(a) $x=(1/3)a, y=(3/4)b$

(b) $x=(1/6)a, y=(1/2)b$

図5 実験によって得られた共振曲線

ログ計算機による解析結果を示す.

まずアナログ計算機によって得られた振動波形の例を示すと図4のようになる. ε, Q_1, Q_2, c の各パラメータの値は4章と同じにとっている. 図4から明らかに, X_1, X_2 は同じ ω に対しても異なった振動状態をとり得ることがわかる. 特に図4(e)に示されるように概周期運動も発生し得ることがわかる.

ω の種々の値に対し, 図4のような振動波形から, 振幅, 位相を求め, その結果を4章の共振曲線, 位相曲線を表す図2に合せて示すと, 図2中の○, ●印などとなる. これらの結果から, アナログ計算機による結果と4章の理論結果はよく一致していることがわかる.

6. 実験による検討

最後に実験を試みた. 実験装置は, 円形板, 円形膜の実験のため前報⁽⁸⁾⁽⁹⁾で用いた装置をこの実験用に変更して用いた. 実験方法, 装置の詳細は前報⁽⁸⁾にゆずる. 前報の円形膜の場合と比べて, 長方形膜に一樣な初期張力を加えることは難しかったが, 理論の定性的な検討は加えることができたと考えている.

実験に用いた長方形膜の諸元は次のとおりである.

厚さ	$h=0.24 \text{ mm}$
縦弾性係数	$E=206 \text{ GPa}$
密度	$\rho=7.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
ポアソン比	$\nu=0.3$
横の長さ	$a=654 \text{ mm}$
縦の長さ	$b=401 \text{ mm}$

膜の固有振動数の実測値のうち低次のいくつかは

$$p_{11}=76 \text{ Hz}, p_{21}=109 \text{ Hz}$$

$$p_{31}=139 \text{ Hz}, p_{12}=143 \text{ Hz}$$

となった. この結果から $p_{12}=p_1$ と $p_{31}=p_2$ は近い値となっており, 実験に用いた膜は, 前の二つの章で取り上げた具体例に近くなっている.

図6 実験によって得られた概周期運動の波形の例

外力を加えるため、中心位置が

$$x_M = (3/4)a, y_M = (1/2)b$$

となるように電磁石を設置した。また、たわみの測定のため、変位センサを

$$(a) \quad x = (1/3)a, y = (3/4)b$$

$$(b) \quad x = (1/6)a, y = (1/2)b$$

の2点に設置した。これらの2点は、理論上、それぞれ(3,1)次と(1,2)次の振動モードの節線上の点となるため、これらの点におけるたわみを測定することによって各モードごとの振幅の変化がわかる。

上にあげた2点において、実験によって得られたたわみ振幅を振動数 ω (Hz) の関数として示すと図5のようになった。図5から、振動数 ω の狭い範囲に他の分枝から独立した分枝が存在するなど、理論の共振曲線で示された傾向が、実験で得られた振幅曲線にも見られた。また、図6に示すように、概周期運動の発生が確認された。これらの結果は、5章までの理論結果が定性的にほぼ妥当なものであることを示している。

7. ま と め

対応する線形振動モードが縮退している非線形振動系の動的応答の特徴を調べるため、調和外力が作用する長方形膜を例として取り上げた。一般的な解析法を検討した後、具体例として、(1,2)次と(3,1)次の振動モードが縮退するような縦横比の長方形膜について数値例を示した。その結果、次のようなことが明らかになった。

(1) 外力の振動数と各モードの振幅、位相の関係

を表す共振曲線、位相曲線は、モード間の相互の影響のため複雑な変化を示す。各曲線は、外力の振動数の広い範囲にわたって存在する1本の連続した分枝と、それとは独立して、振動数の限られた範囲に存在する閉じた分枝からなる。

(2) 膜に引き起こされる振動状態には、節線が固定されている場合と、節線が移動を続ける場合とがある。

(3) 外力の振動数の狭い範囲で定常振動が不安定になる場合がある。ここでは、定常振動にかわって概周期運動が発生する。

次に、モード方程式をアナログ計算機によって解析し、ハーモニクバランス法による結果が妥当なものであることを確かめた。さらに、鋼製の長方形膜を用いて実験を行い、理論結果が定性的に妥当なものであることを確かめた。

文 献

- (1) Sethna, P. R., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-1 (1960), 187.
- (2) Tondl, A., *Some Problems of Rotor Dynamics*, (1965), 343, Chapman & Hall.
- (3) Nayfeh, A. H. & Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 391, John Wiley & Sons.
- (4) 山本・安田, 機論, 42-358 (昭51), 1692.
- (5) 山本・ほか2名, 機論, 43-365 (昭52), 105.
- (6) Bolotin, V. V., *Nonconservative Problems in the Theory of Elastic Stability*, (1963), 274, The Macmillan Co.
- (7) Evensen, D. A., *J. Acoust. Soc. Am.* 44-1 (1968), 84.
- (8) 安田・林, 機論, 47-420, C (昭56), 987.
- (9) 安田・宇野, 機論, 48-434, C (昭57), 1535.

討 論

〔質問〕 佐藤 喜一〔山形大学工学部〕

(1) 応答曲線の不安定領域内で、垂直接線をもたない境界付近で概周期運動が発生していることを解析的ならびに実験的に解明されたことに興味をそそられた。ところで、図3(a)ではほぼ同じループ上を動いているのに対して、図3(b)はかなり変動している。これらの挙動を示す振動数は不安定領域の境界の振動数に対して何らかの関係が認められるか。

(2) 式(15)の導出においてガラーキン法を用いたとあるが、式(15)の前4行の説明では、式(10), (11), (14)を単に式(5)に代入して係数比較から式(15)を求めているように記述されている。ガラーキン法を適用しているのか。

(3) 式(24)の右辺はすでに式(25)の条件を用いて

整理されているように思われるがいかがか。

〔回答〕 (1) 応答曲線の不安定領域のうち、境界が垂直接線をもつ点となっていない不安定領域における系の挙動は、式(24)を数値的に積分することによって求めている。したがって、外力の振動数 ω がどのような値のとき、図3(a)あるいは図3(b)に示される挙動となるかは、解析的に明らかにすることはできていない。経験的にいえば、外力の振動数が不安定領域の境界の値に近いとき図3(a)のようになり、そうでないとき図3(b)のようになる。

(2) 未知量 w, F は関数列 $\sin i\pi x \sin j\pi y (i, j = 1, 2, \dots)$ で展開した形になっている。この関数列は直交関係を満たすので、本文中のような取扱いで、結果的にガラーキン法を適用したことになると思う。

(3) 式(24)を導くにあたっては、式(25)の関係は用いていない。定常解を求めるときに、式(25)の関係を用いて式(24)から代数方程式を導いている。

〔質問〕 岩田佳雄〔金沢大学工学部〕

興味ある現象を解析かつ実験されたことに敬意を表す。

(1) 図2中の変則的な不安定部分が存在する応答曲線では概周期運動が発生することを示しておられる。一般にハーモニックバランス法を用いて応答曲線を求めた場合にそのようなことがいえるのか。

(2) 概周期運動が発生する外力振動数の範囲をそ

の応答曲線から求めることができるのか。

〔回答〕 (1) 式(22)の解の形を式(23)のようにおくと、 $R_1, R_2, \gamma_1, \gamma_2$ が時間に対しゆるやかに変化し得るものと仮定して解析を進めれば、概周期運動の発生を調べることができる。

(2) 概周期運動が発生する外力の振動数の範囲は、応答曲線の安定判別によって求めることができる。実際、応答曲線の安定判別を行って、境界が垂直接線をもつ点と異なるような不安定な部分が得られたら、それに対応する外力の振動数の範囲で系の挙動を調べて、概周期運動の発生を確かめることができる。