不規則振動における初通過確率および
閾値通過回数の確率分布の推定*

矢ヶ崎 一幸**, 木村 康治***, 坂田 勝***

Estimation of First Passage Probability and Probability Distribution of
Level Crossings in Random Vibration

by Kazuyuki YAGASAKI, Koji KIMURA, Masaru SAKATA

An approximate analytical technique is presented to improve the theory of level crossings in random vibration. The first passage probability and the probability distribution of level crossings are determined in terms of the factorial moments of crossings. This technique is a generalization of the conventional one, based on the assumption of independent crossings, and thus applicable for a wide class of random processes. As a numerical example, the displacement response of a single degree of freedom linear system subjected to an amplitude modulated white noise excitation is considered. Comparison with the corresponding digital simulation results demonstrates the usefulness of the present method.

Key Words: Theory of vibration, Random vibration, Reliability, Level crossing, First passage probability, Factorial moment

1. 緒 言

不規則振動を受ける機械・構造物系の信頼性を評価することは工学上重要な問題である。信頼性評価法としては、系の応答が定められた許容値に到達する確率やその通過回数の確率分布を求めることがあげられる。しかし、このような確率過程の閾値通過問題では厳密解が求められる場合は極めて少なく⁽¹⁾、実用上は近似的な方法に頼っている⁽²⁾。

最も簡単な近似法では、閾値通過回数のポアソン性が仮定されている。この仮定は、定常ガウス過程に対して閾値レベル u が $u \rightarrow \infty$ となると漸近的に成立することが証明されており⁽³⁾⁽⁴⁾、多くの文献で採用されている⁽²⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし、閾値が大きくない場合や考えている過程が狭帯域性を示す場合には良い近似を与えない^{(6)~(9)}。

また、初通過確率に対する級数解が与えられているが⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、すべての項を計算することは一般に困難であるため、低次の項を用いて無限級数を近似的に評価する方法が提案されている⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。これらの手法は、定常過程⁽⁸⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾および非定常過程⁽⁷⁾⁽⁹⁾に対して適用され、ポアソン近似による結果を是正する場合もあるが、閾値レベルが低い場合の近似度は良くない^{(7)~(9)}。狭帯域過程に対しては、振幅過程を1周期あるいは半周期ごとにサンプリングすることにより、初通過確率が近似的に評価され^{(14)~(16)}、特に、振幅過程が近似的にマルコフ過程とみなせる場合には、非常に良好な結果が得られている⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。しかしながら、狭帯域性が仮定できない場合には、このような方法を適用することはできない。

本論文では、マルコフ性や狭帯域性を仮定できないような広いクラスの確率過程に対して適用可能となるように、閾値通過回数の階乗モーメントを用いて初通過確率および閾値通過回数の確率分布を近似的に求める手法を提案する。さらに、白色雑音が振幅変調される形の不規則入力を受ける1自由度線形系の変位応答に対する具体的な計算結果を示し、デジタルシミュ

* 昭和60年10月1日 第63期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和60年4月1日。

** 准員、東京工業大学大学院 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

*** 正員、東京工業大学工学部。

レーションの結果⁽¹⁹⁾と比較・検討することにより本手法の有効性を明らかにする。

2. 閾値通過回数

本章では、閾値通過回数の基本的な性質と閾値通過回数の階乗モーメントの公式を示す。簡単のため、片側の閾値の下から上への通過のみについて考えるが一般化は容易である⁽³⁾⁽⁷⁾。

2.1 閾値通過回数の基本的性質 確率過程 $X(t)$ が区間 $(0, T]$ で閾値 $x=u (>0)$ を上へ通過する回数を $N_u(T)$ によってあらわす。また、過程 $X(t)$ は、確率 1 および自乗平均の意味で連続微分可能なガウス過程とする。このとき、 $E[N_u(T)] < \infty$ となる⁽²⁰⁾から、確率 1 で $N_u(T) < \infty$ が成り立つ。

さらに、確率変数 $N_u(T)$ の確率関数を

$$P_n(T) = P\{N_u(T) = n\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

とおく。 $P\{N_u(T) = \infty\} = 0$ より、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(T) = 1 \quad (2)$$

また、確率 1 で、 $X(0) < u$ が成立するものと仮定する。閾値レベル $x=u$ に対する初通過確率 $P_f(T)$ は、過程 $X(t)$ が閾値 u を区間 $(0, T]$ で少なくとも 1 度通過する確率に等しいから、

$$P_f(T) = 1 - P_0(T) \quad (3)$$

と与えられる。

2.2 閾値通過回数の階乗モーメント 閾値通過回数 $N_u(T)$ の確率関数 $P_n(T)$ が解析的に求められる場合は非常に少ないが⁽¹⁾、階乗モーメント

$$M_n(T) = E\{N_u(T)(N_u(T)-1)\cdots(N_u(T)-n+1)\} \quad (4)$$

が求められる場合は多い。実際、いま考えているような確率過程 $X(t)$ に対しては、閾値通過回数の階乗モーメント $M_n(T)$ は、次式によって与えられる⁽³⁾⁽²⁰⁾。

$$M_n(T) = \int_0^T \cdots \int_0^T \nu_n(t_1, \dots, t_n) \times dt_1 \cdots dt_n \quad (5)$$

$$\{t_i \neq t_j, i \neq j\}$$

ここで、 $\nu_n(t_1, \dots, t_n)$ は、 $p_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ を、 $X(t_1), \dots, X(t_n), \dot{X}(t_1), \dots, \dot{X}(t_n)$ の $2n$ 次元の結合確率密度関数として、

$$\nu_n(t_1, \dots, t_n) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y_1 \cdots y_n \times p_n(u, \dots, u; y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \quad (6)$$

である。

ガウス過程 $X(t)$ に対しては、平均関数 $\mu(t) = E[X(t)]$ および自己相関関数 $\phi(s, t) = E[X(s)X(t)]$ が

与えられれば、結合確率密度関数 $p_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ が定まり、式 (5) および (6) を用いて、閾値通過回数 $N_u(T)$ の階乗モーメント $M_n(T)$ を計算することができる⁽⁷⁾。しかしながら、実際に値を求めるためには、計算の多くの部分を数値計算に頼らなければならず、一般に高次の階乗モーメントを計算することは非常に困難である。白色励振を受ける 1 自由度線形系の変位応答に対しても、3 次までのモーメントが計算されているにすぎない^{(7)~(9)}。3 次以下の階乗モーメントに対しては、 $\nu_n(t_1, \dots, t_n)$ のさらに詳細な計算方法が文献 (7) に与えられており、式 (5) の積分を数値計算することにより求めることができる。本報告では、次節以降で提案する解析手法を適用する際、2 次までの階乗モーメントを計算する。

3. 近似手法

ここでは、閾値通過回数を時間に関して一様でない場合に拡張された純出生過程によってモデル化し、その確率関数が満足する微分方程式系を与える。そして、微分方程式系の係数となっている未知関数を近似的に評価し、これを解くことによって初通過確率および閾値通過回数の確率関数を求める。

3.1 純出生過程モデル 閾値通過回数 $N_u(t)$ が時間に関して一様でない純出生過程と仮定する。すなわち、時間区間 $(0, T]$ において、下記の仮定が成立する。

仮定 1) $\Delta t \downarrow 0$ のとき、 t に関して $(0, T]$ で一様に、

$$P\{N_u(t+\Delta t) - N_u(t) > 1\} = o(\Delta t) \quad (7)$$

となる。

仮定 2) $\Delta t \downarrow 0$ のとき、 t に関して一様に、

$$\frac{P\{N_u(t+\Delta t) - N_u(t) > 0 \mid N_u(t) = n\}}{\Delta t} \rightarrow \lambda_n(t), n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

となる連続関数 $\lambda_n(t)$ が存在する。

これらは、通常の純出生過程に対する仮定⁽²¹⁾の自然な一般化となっており、時刻 t までに閾値レベル $x=u$ を n 回だけ通過しているときに、微小区間 $(t, t+\Delta t]$ で、閾値を 2 回以上通過する確率は Δt よりも高次の微小量であり、1 回だけ通過する確率は $\lambda_n(t)\Delta t$ 程度となることを意味している。しかし、ポアソンの仮定⁽³⁾のように、微小区間 $(t, t+\Delta t]$ での閾値通過の生起がそれまでの閾値通過の回数に依存しないということは要求しておらず、本仮定は確率過程の広いクラスに対して成立するものと考えられる。たとえば、

仮定1)は、確率過程 $X(t)$ が自乗平均微分可能な定常ガウス過程である場合に成立することが知られている⁽³⁾。

通常の純出生過程⁽²¹⁾の場合と同様な方法によって、仮定1)および2)のもとでは、 $N_u(t)$ の確率関数 $P_n(t)$ が次の微分方程式系によって支配されることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_0(t) &= -\lambda_0(t) P_0(t) \\ \dot{P}_n(t) &= \lambda_{n-1}(t) P_{n-1}(t) - \lambda_n(t) P_n(t), \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\dot{}$ は時間 t に関する微分をあらわす。また、初期条件は次式で与えられる。

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(9)は、非定常増分を有するポアソン過程の確率関数を支配する微分方程式系⁽³⁾と同様の形であるが、方程式中の係数 $\lambda_n(t)$ が n に依存している点が大きく異なっている。

式(9)を初期条件(10)のもとで解くことによって、閾値通過回数の確率関数 $P_n(t)$ を求めることができる。しかしながら、式(8)を用いて式(9)に含まれている関数 $\lambda_n(t)$ を厳密に求めることは非常に困難である。そこで、以下では、関数 $\lambda_n(t)$ を近似的に評価し、初期条件(10)のもとで式(9)を解いて確率関数 $P_n(t)$ を求める。

3.2 $\lambda_n(t)$ の近似的評価 式(9)に含まれている関数 $\lambda_n(t)$ を近似的に評価するために、さらに2つの仮定をする。仮定3)は広いクラスの確率過程 $X(t)$ に対して成立すると考えられるが、仮定4)は便宜的なものである。以下では、 n_0 をある非負の整数とする。

仮定3) $N_u(T)$ の n_0+1 次の階乗モーメント $M_{n_0+1}(T)$ が存在する。

これは、ガウス過程 $X(t)$ が自乗平均の意味で n_0+1 階連続微分可能であるならば成立する⁽²⁰⁾。また、定常ガウス過程に対しては、さらにゆるい条件のもとで、上の仮定が成立することが示されている⁽²²⁾。

もし仮定3)が成り立てば、任意の $n \leq n_0+1$, $0 < t \leq T$ に対して、 $M_n(t)$ が存在する。さらに仮定1)および2)が満足されるならば、 $n \leq n_0+1$, $0 < t \leq T$ に対して $M_n(t)$ の導関数 $\dot{M}_n(t)$ が存在し、式(4)および(9)を用いることによって、次式が得られる。

$$\dot{M}_n(t) = n! \sum_{k=n-1}^{\infty} k C_{n-1} \lambda_k(t) P_k(t) \quad \dots\dots\dots (11)$$

仮定4) $n \geq n_0$ に対して、ある連続関数 $\lambda(t)$ が存在し、近似的に次式が成立する。

$$\lambda_n(t) = \lambda(t) \quad \dots\dots\dots (12)$$

この仮定は、 n_0 回以上の閾値通過が起っているときには、次の瞬間に $X(t)$ が閾値に到達する確率がそれまでの回数には依存しないことを意味する。特に、 $n_0=0$ の場合には、これは過程 $X(t)$ の閾値への到達を独立到着とする仮定であり、仮定1), 2)および4)はポアソンの仮定⁽³⁾となり、それによって導かれる結果はポアソン近似による結果に一致する。

以下では $n_0 \geq 1$ とする。

n_0+1 次の階乗モーメントの導関数 $\dot{M}_{n_0}(t)$ は、式(11)および(12)を用いることにより、

$$\dot{M}_{n_0+1}(t) = (n_0+1) \lambda(t) M_{n_0}(t) \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。これより次式が得られる。

$$\lambda(t) = \frac{\dot{M}_{n_0+1}(t)}{(n_0+1) M_{n_0}(t)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

さらに、 $n \leq n_0$ に対しては、式(4)・(11)および(12)より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \dot{M}_n(t) &= n \{ \lambda(t) M_{n-1}(t) + (n-1)! \\ &\quad \times \sum_{k=n-1}^{n_0-1} k C_{n-1} [\lambda_k(t) - \lambda(t)] P_k(t) \}, \quad n \leq n_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(15)を $\lambda_n(t) P_n(t)$ ($n < n_0$) について解くことによって次式が得られる。

$$\begin{aligned} \lambda_n(t) P_n(t) &= \lambda(t) P_n(t) + \sum_{k=n}^{n_0-1} (-1)^{k-n} k C_n \\ &\quad \times \left\{ \frac{\dot{M}_{k+1}(t)}{(k+1)!} - \lambda(t) \frac{M_k(t)}{k!} \right\}, \quad n < n_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(12), (14)および(16)によって、関数 $\lambda_n(t)$ を閾値通過回数の n_0 次までの階乗モーメント、 n_0+1 次までの階乗モーメントの導関数および確率関数 $P_n(t)$ を用いて近似的に評価することができる。

3.3 確率関数 $P_n(t)$ の近似的評価 上で得られた $\lambda_n(t)$ の近似的評価を用いて、閾値通過回数の確率関数 $P_n(t)$ を求める。

(i) $n_0 \geq 2$ の場合 式(12), (14)および(16)の関係を式(9)に代入することにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_0(t) &= -\lambda(t) P_0(t) + \phi_0(t) \\ \dot{P}_n(t) &= \lambda(t) P_{n-1}(t) \\ &\quad - \lambda(t) P_n(t) + \phi_n(t), \quad n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n_0-1} (-1)^{k+1} \left\{ \frac{\dot{M}_{k+1}(t)}{(k+1)!} - \lambda(t) \frac{M_k(t)}{k!} \right\} & ; n=0 \\ \sum_{k=n-1}^{n_0-1} (-1)^{k-n+1} C_n \left\{ \frac{\dot{M}_{k+1}(t)}{(k+1)!} - \lambda(t) \frac{M_k(t)}{k!} \right\} & ; 1 \leq n \leq n_0 \\ 0 & ; n > n_0 \end{cases} \quad (18)$$

である。式(17)は、方程式の右辺に関数 $\phi_n(t)$ が存在する以外は非定常増分を有するポアソン過程の確率関数を支配する微分方程式系⁽³⁾と同形であるが、係数となっている関数 $\lambda(t)$ の定義は異なっていることに注意しなければならない。

式(17)を初期条件(10)のもとで解くことによって次式を得る。

$$P_n(t) = \begin{cases} \sum_{k=n}^{n_0-1} (-1)^{k-n} C_n \frac{M_k(t)}{k!} + \frac{1}{\Lambda(t)} \sum_{k=0}^n (-1)^{n_0-n+k} C_{n_0-k} \frac{\Psi_{n_0}^{(k)}(t)}{n_0!} & ; n < n_0 \\ \frac{1}{\Lambda(t)} \sum_{k=0}^{n_0} (-1)^k C_k \frac{\Psi_{n_0}^{(n+k-n_0)}(t)}{n_0!} & ; n \geq n_0 \end{cases} \quad (19)$$

ここで、

$$\Lambda(t) = \exp \left\{ \int_0^t \lambda(s) ds \right\}$$

$$\Psi_{n_0}^{(k)}(t) = \begin{cases} \int_0^t \dot{M}_{n_0}(s) \Lambda(s) ds & ; k=0 \\ \int_0^t \int_0^{s_k} \dots \int_0^{s_1} \lambda(s_1) \dots \lambda(s_k) \dot{M}_{n_0}(s) \Lambda(s) ds ds_1 \dots ds_k & ; k>0 \end{cases} \quad (20)$$

である。また、式(3)より、初通過確率 $P_f(t)$ は、次のように求められる。

$$P_f(t) = \sum_{k=1}^{n_0-1} (-1)^{k-1} \frac{M_k(t)}{k!} - (-1)^{n_0} \frac{\Psi_{n_0}^{(0)}(t)}{n_0! \Lambda(t)} \quad (21)$$

(ii) $n_0=1$ の場合 (i) の場合と同様にして、閾値通過回数の確率関数 $P_n(t)$ および初通過確率 $P_f(t)$ は次式で与えられる。

$$P_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\Lambda(t)} \Psi_1^{(0)}(t) & ; n=0 \\ \frac{1}{\Lambda(t)} \left\{ \Psi_1^{(n-1)}(t) - \Psi_1^{(n)}(t) \right\} & ; n \geq 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$P_f(t) = \frac{1}{\Lambda(t)} \Psi_1^{(0)}(t) \quad (23)$$

前に述べたように、ガウス過程 $X(t)$ に対しては、平均関数および自己相関関数が与えられれば、閾値通過回数の階乗モーメントを求めることができる。したがって、ガウス過程 $X(t)$ に対する閾値通過回数の確率関数および初通過確率は、その n_0 次までの階乗モーメントおよび n_0+1 次までの階乗モーメントの導関

数を実際に計算し、式(19)および(21)、あるいは式(22)および(23)を用いて近似的に評価される。

4. 具体的な計算例

振幅変調された白色性励振を受ける1自由度線形系の変位応答に対して、前節で提案した近似手法を適用し、初通過確率および閾値通過回数の確率関数を近似的に求める。

次の運動方程式によって記述される1自由度線形系を考える。

$$\ddot{X} + 2\zeta \dot{X} + X = f(t) \quad (24)$$

ここで、 ζ は系の減衰比、 t は系の固有振動数 ω_0 によって無次元化された時間であり、系は初期時刻 $t=0$ で静止しているものとする。また、 $f(t)$ は振幅変調白色性励振力で次式で与えられるものとする。

$$f(t) = e(t) n(t) \quad (25)$$

ここで、 $e(t)$ は確定包絡関数で、次の2つの場合を考える。

$$e(t) = U(t), U(t): \text{単位ステップ関数} \quad (26a)$$

$$e(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{\max(e^{-at} - e^{-bt})} \quad (26b)$$

また, $n(t)$ は, 平均値ゼロ, パワースペクトル S_0 の定常ガウス性白色雑音で,

$$E[n(t)] = 0, E[n(t)n(t+\tau)] = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad \dots\dots\dots (27)$$

を満足する。

4.1 平均関数および相関関数の計算 式(24)

で記述される系の衝撃応答関数 $h(t)$ は, $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$ とすると,

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta t} \sin \omega_d t; & t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (28)$$

である。衝撃応答関数 $h(t)$ を用いると, $X(t)$ の平均関数 $\mu(t)$ および自己相関関数 $\phi(s, t)$ は,

$$\left. \begin{aligned} \mu(t) &= \int_0^t h(t-\tau) E[f(\tau)] d\tau \\ \phi(s, t) &= \int_0^s \int_0^t h(s-\tau_1) h(t-\tau_2) \\ &\quad \times E[f(\tau_1) f(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。式(25)および(27)を用いることによって次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mu(t) &= 0 \\ \phi(s, t) &= 2\pi S_0 \int_0^t h(s-\tau) h(t-\tau) e^{2\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで, $s > t$ である。さらに, 式(30)に式(26)および(28)を代入すれば, 自己相関関数 $\phi(s, t)$ は解析的に求められる。よって, 3節で提案した近似手法を適用して初通過確率および閾値通過回数の確率関数を求めることができる。

この場合, 閾値通過回数 $N_u(t)$ の3次以上の階乗モーメントを計算するためには, 大型計算機を用いても非常に多くの計算時間を必要とする。そこで, $n_0 = 1$ として本手法を適用し, 式(22)および(23)を用いて, 2次までの階乗モーメントによって初通過確率および閾

図1 指数包絡関数

値通過回数の確率関数を求める。ここで, $n_0 = 1$ とする近似は, 着目時間における閾値通過の割合 $\lambda_n(t)$ を「未通過」と「既通過」の場合に分けて評価することを意味する。

4.2 計算結果と考察 得られた結果の比較のために, 無次元化された閾値レベル η を導入する。

$$\eta = \frac{u}{\sigma_0} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで, σ_0 は単位ステップ包絡関数に対する変位応答の定常標準偏差で, 次式によって与えられる。

$$\sigma_0^2 = \frac{\pi S_0}{2\zeta} \quad \dots\dots\dots (32)$$

実際の計算では, 系の減衰比が比較的小さい場合として $\zeta = 0.01$, 比較的大きい場合として $\zeta = 0.1$ の2通りの場合について計算を行った。

まず, 計算で用いた指数包絡関数 ($a = 0.125$, $b = 0.25$) の形状を図1に示す。これは, 短時間で最大値に達した後, 緩やかに減衰しながら継続する地震動を模擬するのに適している。

図2および図3に, 無次元化された閾値レベル η をパラメータとして, 単位ステップ包絡関数に対する初通過確率 $P_f(t)$ および, 1回だけ閾値を越えている確率である閾値通過回数の確率関数 $P_1(t)$ の時間的変化を示す。図4および図5には指数包絡関数に対する同

図2 初通過確率 (単位ステップ包絡関数)

様の結果を示す。いずれの図においても、(a) は $\zeta=0.01$ の場合、(b) は $\zeta=0.1$ の場合のものである。実線は本報告の手法による計算結果を、○は 5000 回のデジタルシミュレーションによる結果⁽¹⁹⁾を表す。また、比較のために、ポアソン近似による計算結果を破線で表示してある。

図 2 および図 4 の初通過確率については、いずれの図においても、閾値レベルがそれ程小さくない場合には、本手法による計算結果とシミュレーションの結果は非常に良く一致している。特に、ポアソン近似によって得られた結果がシミュレーションの結果から大きくずれる、系の減衰比の小さい場合の図 2 (a) および図 4 (a) においても、本手法は非常に良い結果を与えている。また、図 2 および図 4 (b) では、ポアソン近似による結果がシミュレーションの結果と比較して危険側の評価を与える場合があるのに対して、本手法は、シミュレーションの結果と差異があるときでも、ここで計算された場合については安全側の評価を与えている。しかしながら、閾値レベルが小さく、初通過確率が 1 に近いような場合には、初通過確率が 1 を越えたり、あるいは時間とともに減少するなど、本手法は矛盾した結果を与えている。これは、閾値レベルが小さく閾値通過が稀ではなくなり、 $n_0=1$ とした場合の仮

図 4 初通過確率 (指数包絡関数)

図 3 確率関数 (単位ステップ包絡関数)

図 5 確率関数 (指数包絡関数)

定4), すなわち, 閾値通過の割合が「既通過」に対しては一定であるという仮定がもはや成立しないためと考えられる。このような場合には, n_0 をさらに大きくとって近似の精度を上げることが必要である。

図3および図5の確率関数 $P_1(t)$ に着目すると, 閾値レベルが大きい場合や時間 t が小さい場合に対しては, 実線で示された本手法による結果とシミュレーションの結果は良く一致している。その他の場合についても両者の定性的な傾向は一致している。一方, 時間 t が非常に小さい場合を除き, ポアソン近似による結果とシミュレーションの結果との差はかなり大きなものとなっているので, 本報告で提案した手法の有効性は明らかである。

5. 結 言

与えられた閾値に対する確率過程の初通過確率および閾値通過回数の確率分布を近似的に求める手法を提案した。

まず, 閾値通過回数が時間に関して一様でない純出生過程であると仮定し, その確率関数の時間的変化を支配する微分方程式系を与えた。この仮定は, 確率過程の広いクラスに対して成立すると考えられる。さらに, 閾値通過回数の n_0+1 次の階乗モーメントが有界であるという条件のもとで, 独立到着の仮定を一般化し, n_0 回以上の閾値通過が起っている場合は, 確率過程が閾値に到達する割合がそれまでの通過回数に依存しないものと仮定して, その微分方程式系を解き, 閾値通過回数の階乗モーメントによって初通過確率および閾値通過回数の確率分布を近似的に評価した。

具体的な計算例として, 振幅変調を受ける白色性動振を入力とする1自由度線形系の変位応答を取り上げ, $n_0=1$ として計算を行い, その結果とデジタルシミュレーションの結果とを比較・検討し, 本手法の有効性を明らかにした。特に, 減衰比が小さい場合に対し

ては, 本手法がポアソン近似手法による結果を大幅に改善することを示した。

本手法は, 考えている確率過程のマルコフ性や狭帯域性などを仮定していないので, 地震動などで代表される顕著な卓越振動数を有する非白色性動振を受ける系の応答の初通過確率および閾値通過回数の確率分布を評価するのに有用と考えられる。このような場合に本手法を適用すること, および一般的な確率過程に対して閾値通過回数が時間に関して一様でない純出生過程となることを証明することが今後の課題である。

文 献

- (1) Blake, I.F. and Lindsey, C.F., *IEEE, Trans. Inform. Theory*, 19 (1973), 295.
- (2) Crandall, S.H., *J. Sound and Vibr.*, 12 (1970), 285.
- (3) Cramer, H. and Leadbetter, M.R., *Stationary and Related Stochastic Processes*, (1967), John Wiley and Sons.
- (4) Leadbetter, M.R., et al, *Extremal and Related Properties of Random Sequences and Processes*, (1983), Springer-Verlag.
- (5) 鈴木浩平: 機械の研究, 34 (1982), 761.
- (6) 木村・ほか2名: 機論, 掲載予定.
- (7) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, 8 (1968), 301.
- (8) Roberts, J.B., *AIAA J.*, 12 (1974), 1636.
- (9) Roberts, J.B., *Trans. ASME, Ser. E*, 42 (1975), 285.
- (10) Rice, S.O., *Bell. Syst. Tech. J.*, 23 (1944), 282/24 (1945), 46.
- (11) Stratnovich, R.L., *Topics in the Theory of Random Noise, vol. 1*, (1963), Gordon and Breach.
- (12) Rice, J.B. and Beer, F.P., *J. Acoust. Soc. Amer.*, 39 (1966), 323.
- (13) Lin, Y.K., *AIAA J.*, 8 (1970), 720.
- (14) Yang, J.-N. and Shinozuka, M., *Trans. ASME, Ser. E*, 38 (1971), 1017/39 (1972), 733.
- (15) Yang, J.-N., *J. Struct. Mech.*, 1 (1972), 231.
- (16) Krenk, S., *Trans. ASME, Ser. E*, 46 (1979), 919.
- (17) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, 46 (1976), 1.
- (18) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, 56 (1978), 71.
- (19) 牧谷秀之: 東京工業大学卒業論文 (昭58-3)
- (20) Belayev, Yu., K., *Theory Prob. Appl.*, 11 (1966), 106.
- (21) Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1*, (1957), John Wiley and Sons.
- (22) Cuzick, J., *Ann. Probab.*, 3 (1975), 849.

討 論

〔質問〕 佐藤 壽 芳〔東京大学生産技術研究所〕

(1) 本質からやや外れるかもしれないが, 図3のシミュレーションの結果について, 一部曲線が滑らかではない部分が見うけられる。この理由についてお伺いしたい。

(2) 前報の質問 (629 ページ) と同様になるが, t が大きくなった時点での貴方法とシミュレーションとの相違の理由, ならびに今後の展開の可能性についてお伺いしたい。

〔回答〕 (1) 本論文で示したシミュレーションの回数 (5000 回) では, 図3の場合に対して完全に滑らかな曲線を得るにはまだ不十分であるためと考えられる。初通過確率 $P_f(t)$ が単調増加しているのに対して, 確率関数 $P_1(t)$ は時間とともに増減するので, $P_f(t)$ の場合よりも多くのシミュレーションの回数を必要とする。

(2) 本論文で採用した, いき値通過の割合が「既通過」に対しては近似的に一定とみなせるという仮定

〔 $n_0=1$ とした場合の仮定(4)〕は、2回以上のいき値通過が起こっている確率が小さいとき有効と考えられる。一方、時間が経過して、この確率が大きくなると、上の仮定は成立しない。このために、 t が大きくなった時点で、本手法とシミュレーションとの差異が生じてくると考えられる。しかし、 t が大きくなっても、いき値レベルが大きい場合は、いき値通過があまり起こらず、上の仮定が有効となるので、両者は一致する。

今後は、より実用的な問題に本手法を適用し、不規則励振を受ける機械・構造物系の確率論的な信頼性評価法を確立していきたいと考えている。

〔質問〕 鈴木 浩 平〔東京都立大学工学部〕

耐震工学に関心をもつ立場から、初通過問題、いき値通過問題をより広いクラスの不規則過程に拡張された努力に敬意を表す。

(1) 633 ページ左欄 15~16 行で、式(9)、すなわち貴方法の特徴として、 $\lambda_n(t)$ が n に依存する点をあげておられる。ところが、一方では仮定(4)の式(12)で $\lambda_n(t)=\lambda(t)$ として一見 n に依存しない形になっていてわかり難いが、どう解釈したらよいのか。

(2) 図2, 4の結果は、貴方法の優利性が明確にあらわれていて大変に意義があると思うが、例えば、図1の指数包絡関数を入力とした時の結果(図4)において、(a)の軽減衰系($\xi=0.01$)のほうが(b)の系よ

り、入力振幅非定常性に対しての $P_f(t)$ の変動が鈍い($\xi=0.1$ の系のほうが $t=5$ 近辺で急上昇する)のは、直観的イメージと合わない気がする。 η や正規化条件を十分理解していない質問者の考え違いであろうか。ご説明願いたい。

〔回答〕 (1) 着目時間 t までに n 回だけいき値通過が起こっているときにいき値を通過する割合 $\lambda_n(t)$ は、 n に依存する。しかし、3・1節の終わりに述べたように、これを完全に考慮して解析を行うことは困難である。そこで、本論文では、これを部分的に考慮し、仮定(4)のように、ある一定の回数 n_0 以上の n に対しては $\lambda_n(t)=\lambda(t)$ と n に依存しない形を仮定するが、 n_0 より小さい n に対しては $\lambda_n(t)$ が n に依存するものとして解析を行った。

(2) 単位ステップ包絡関数の場合に対しては、系の減衰が大きいほうが、応答は短い時間で定常状態に達する。したがって、応答の大きさをその定常標準偏差で正規化すれば、系の減衰が大きいほうが、応答は早く大きくなる。よって、同じ大きさの無次元化レベル η に対しては、減衰が大きいほど、系の応答はいき値を通過しやすく、初通過確率 $P_f(t)$ は速やかに増加する。つまり、軽減衰系のほうが $P_f(t)$ の変動は鈍い。指数包絡関数の場合に対しても同様である。