多自由度非線形振動系の内部共振*

(固有振動数が $p_1 + p_2 = p_3$ および $2p_1 + p_2 = p_3$ の関係を満たす場合)

安田 仁彦**, 山本 敏男**, 加藤 正義**

Internal Resonance in a Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom
Vibratory System(When Its Natural Frequencies Satisfy the Condition $p_1 + p_2 = p_3$ or $2p_1 + p_2 = p_3$)

by Kimihiko YASUDA, Toshio YAMAMOTO, and Masayoshi KATO

The characteristics of oscillations induced in a nonlinear vibratory system whose natural frequencies are not in the ratio of prime integers and yet satisfy the condition of internal resonance, are discussed via a typical example. The example taken up here is a three-degree-of-freedom system whose linearized natural frequencies $p_i (i=1, 2, 3; p_1 < p_2 < p_3)$ satisfy the condition $p_1 + p_2 = p_3$ or $2p_1 + p_2 = p_3$, and which is subjected to harmonic excitation. The characteristics of oscillations induced in the system near primary as well as secondary resonance points are examined. For analysis, the harmonic balance method is employed. The analysis reveals that near some of the resonance points, internal resonance occurs accompanying three harmonics of frequencies satisfying a certain relation. Also shown is that an almost periodic motion can occur. The validity of the obtained results is checked by performing direct numerical integration.

Key Words: Theory of Vibration, Multi-Degree-of-Freedom System, Nonlinear Forced Oscillation, Internal Resonance, Almost Periodic Motion

1. ま え が き

多自由度非線形振動系は、それに対応する線形振動系の固有振動数 $p_i (i=1, 2, 3, \dots, n; n$ は自由度を表す) が $\sum_{i=1}^n m_i p_i = 0$ (m_i は整数を表し、少なくとも二つは零でない) の関係を満たすとき、内部共振の条件を満たしているといわれる。

内部共振の条件を満たしている多自由度非線形振動系に調和外力が作用するとき、異なった振動数の、いくつかの振動が同時に発生する可能性があることは指摘されているが⁽¹⁾、どの場合にどのような振動が発生するかを具体的に扱った研究は多くない。

Sethna⁽²⁾, Tondl⁽³⁾, 著者⁽⁴⁾⁽⁵⁾らは内部共振の条件を満たす振動系の例として、固有振動数が簡単な整数比となる場合を取り上げ、主共振点付近の振動の特性を検討している。

二自由度振動系では、内部共振の条件が満たされると、必然的に固有振動数が整数比になるのに対し、3以上の自由度をもつ多自由度系では、固有振動数が整数比とならなくても内部共振の条件が満たされる。こ

れまで、この点に注意は払われなかった。また、副共振点付近でも内部共振が生じると思われるが、この点にも注意が払われなかった。

この報告で、固有振動数が整数比とならないで内部共振の条件を満たす振動系の例を取り上げ、調和外力が作用するときの主共振点、副共振点付近の振動の特性を検討する。取り上げる振動系は、自由度が3で、三つの固有振動数 p_1, p_2, p_3 (ただし $p_1 < p_2 < p_3$ とする) が $p_1 + p_2 = p_3$ あるいは $2p_1 + p_2 = p_3$ の関係を満たすものとする。非線形項は変位の二乗と三乗で与えられるとし、内部共振の可能性のあるすべての共振点付近に対し、ハーモニクバランス法により理論解析を行う。内部共振が生じる代表的な場合には、数値積分法によって運動方程式を解き、ハーモニクバランス法で得られた結果の妥当性を検討する。

2. 基 礎 式

三自由度非線形振動系に振動数 ω の調和外力と粘性減衰力が作用するとき、基準座標を用いた運動方程式は、一般に次式のようなになる。

$$\ddot{X}_i + \omega_i^2 X_i = (\omega_i^2 - p_i^2) X_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} \dot{X}_j - \phi_i + P_i \cos \omega t \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

* 昭和59年11月21日 関西支部第244回講演会において普通講演として講演，原稿受付 昭和60年1月16日。

** 正員，名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

ここに、記号 $\dot{}$ は時間に関する微分、 p_i (ただし $p_1 < p_2 < p_3$ とする) は対応する線形系の固有振動数、 ψ_i は非線形項を表す。非線形項 ψ_i は、ここでは変位の二乗と三乗から成り、ポテンシャル

$$V = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} X_i X_j X_k + \sum_{i,j,k,l=1}^3 \beta_{ijkl} X_i X_j X_k X_l \quad \dots\dots\dots (2)$$

から

$$\psi_i = \partial V / \partial X_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

によって導かれるとする。 ψ_i の表示式の係数 ε_{ijk} , β_{ijkl} および減衰係数 c_{ij} はすべて一次の微小量であるとする。

この報告では、以上の振動系において

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad p_1 + p_2 = p_3 \\ \text{(II)} \quad 2p_1 + p_2 = p_3 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

の形の内部共振の条件が満たされる場合を取り上げる。非線形項の次数を考慮すると、ここで取り上げた非線形振動系において、内部共振が生ずる可能性のある共振点は、(I)の内部共振の条件に対しては

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I} \cdot \text{a)} \quad \omega \doteq p_3 = p_1 + p_2 \\ \text{(I} \cdot \text{b)} \quad \omega \doteq p_2 = p_3 - p_1 \\ \text{(I} \cdot \text{c)} \quad \omega \doteq p_3/2 = (p_1 + p_2)/2 \\ \text{(I} \cdot \text{d)} \quad \omega \doteq p_2/2 = (p_3 - p_1)/2 \\ \text{(I} \cdot \text{e)} \quad \omega \doteq 2p_3 = p_1 + p_2 + p_3 \\ \text{(I} \cdot \text{f)} \quad \omega \doteq 2p_2 = -p_1 + p_2 + p_3 \\ \text{(I} \cdot \text{g)} \quad \omega \doteq p_1 + p_3 = 2p_1 + p_2 = 2p_3 - p_2 \\ \text{(I} \cdot \text{h)} \quad \omega \doteq p_2 - p_1 = p_3 - 2p_1 = 2p_2 - p_3 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる共振点、(II)の内部共振の条件に対しては

$$\left. \begin{array}{l} \text{(II} \cdot \text{a)} \quad \omega \doteq p_3 = 2p_1 + p_2 \\ \text{(II} \cdot \text{b)} \quad \omega \doteq p_2 = p_3 - 2p_1 \\ \text{(II} \cdot \text{c)} \quad \omega \doteq p_1 = -p_1 - p_2 + p_3 \\ \quad \quad \quad = (p_3 - p_2)/2 \\ \text{(II} \cdot \text{d)} \quad \omega \doteq 2p_1 = p_3 - p_2 \\ \text{(II} \cdot \text{e)} \quad \omega \doteq 3p_1 = p_1 - p_2 + p_3 \\ \text{(II} \cdot \text{f)} \quad \omega \doteq p_1 + p_2 = p_3 - p_1 = (p_2 + p_3)/2 \\ \text{(II} \cdot \text{g)} \quad \omega \doteq 2p_1 + p_3 = 2p_3 - p_2 \\ \text{(II} \cdot \text{h)} \quad \omega \doteq p_1 + 2p_2 = -p_1 + p_2 + p_3 \\ \text{(II} \cdot \text{i)} \quad \omega \doteq p_1 + p_2 + p_3 = 2p_3 - p_1 \\ \text{(II} \cdot \text{j)} \quad \omega \doteq 2p_1 - p_2 = p_3 - 2p_2 \\ \text{(II} \cdot \text{k)} \quad \omega \doteq (p_1 + p_2)/2 = (p_3 - p_1)/2 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる各共振点である。なお、振動学的に同じ共振点は除いた。以下、これらの各共振点を、式(5)、(6)に書いたように、記号(I・a)、(I・b)などで区別する。

式(5)、(6)の共振点のうち、式(5)の初めの二つと式(6)の初めの三つは、 ω が一つの固有振動数 p_r に近づく主共振点を表し、これ以外の共振点は副共振点を表す。主共振点付近で外力が p_r に対応する成分 P_r を微小量の零次の程度で含むと、系に著しく大きな調和振動が発生することになって、ここでは興味がない場合となるので、以下では、主共振点付近では P_r は一次の微小量であるとする。副共振点付近では、このような制限は設けない。

3. 解 析 法

式(1)をハーモニクパランス法で解くため、解を次の形におく。

$$\begin{aligned} X_i &= R_i \cos(\omega_i t + \alpha_i) + F_i \cos \omega t \\ (i &= 1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに R_i , α_i は時間に対してゆっくり変化する関数で、求めるべき未知量である。 F_i と ω_i は、次のように定められる既知の量である。

まず F_i は、振動数 ω が固有振動数 p_r に近くなる主共振点付近では、 $i=r$ に対して

$$F_i = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$i \neq r$ に対して

$$F_i = P_i / (p_i^2 - \omega^2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

とする。振動数 ω が副共振点付近にあるときは、 F_i は常に式(9)で与えられるとする。

次に ω_i は、式(5)または式(6)の右辺に現れる量を p とおいて

$$\omega_i = (p_i/p)\omega \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられるとする。この式は、一般に $\omega_i \doteq p_i$ となること、また、特に ω が p_r に近づく主共振点付近では、 $\omega_r = \omega$ となることを表している。

未知量 R_i , α_i ($i=1, 2, 3$) を定めるため、式(7)を式(1)に代入して二次以上の微小量を見捨てる、 $i=1, 2, 3$ の各式の両辺の $\cos(\omega_i t + \alpha_i)$, $\sin(\omega_i t + \alpha_i)$ の係数を等しいとおく。このとき、係数の中には内部共振の条件から生じる項が含まれることに注意する。このようにすると、 R_i , α_i ($i=1, 2, 3$) を定める方程式が次の形で得られる。

$$\left. \begin{array}{l} 2\omega_i \dot{R}_i = f_i(R_1, R_2, R_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ 2\omega_i R_i \dot{\alpha}_i = g_i(R_1, R_2, R_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)は、目的によって、変数

$$u_i = R_i \cos \alpha_i, \quad v_i = R_i \sin \alpha_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

で表したほうが便利ことがある。この変数変換を行うと、式(11)は

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_i \dot{u}_i &= f_i(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) \\ 2\omega_i \dot{v}_i &= g_i(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

の形となる。

式(11), あるいは式(13)と式(12)から R_i, α_i を求めれば, 式(7)によって解が定められる。

4. 内部共振の条件(I)を満たす振動系の振動

この章では, 式(4)の(I)の条件が満たされる場合を取り上げ, 各共振点ごとに振動特性を検討する。このためには, 各共振点ごとに式(11)を求め, その解を求めればよい。式(11)を実際に求めると, ここで考えている振動系に内部共振による振動が生じるためには, 系のポテンシャル V が $\varepsilon_{123}X_1X_2X_3$ の形の項を含むことが必要であることがわかる。以下, この条件が満たされているとする。

4.1 共振点(I・a)付近の振動 共振点(I・a)付近における式(11)を見ると, ここでは2種類の定常解が存在し得ることがわかる。

第一の定常解は $R_1=R_2=0, R_3 \neq 0$ となるものである。 $R_1=R_2=0$ が解であることは, これらの値を式(11)の $i=1, 2$ の式に代入すれば直ちに確かめられる。 R_3 と α_3 は, 式(11)の $i=3$ の式で $\dot{R}_3=0, \dot{\alpha}_3=0$ とおいて得られる式

$$f_3=0, g_3=0 \dots\dots\dots (14)$$

によって定められる。この解が表す振動の振動数 $\Omega_3=\omega_3+\alpha_3$ は, 式(14)から導かれるように

$$\Omega_3=\omega \dots\dots\dots (15)$$

を満たす。したがって, この定常解は調和振動が発生する場合を表している。

第1の定常解の安定性は次のように定められる。いま定常解が, $R_1=R_2=0, R_3=R_{30}, \alpha_3=\alpha_{30}$, あるいは式(12)の変数で表して $u_i=u_{i0}, v_i=v_{i0}(i=1, 2, 3)$ で与えられているとする。 $R_1=R_2=0$ であることから $u_{10}=v_{10}=u_{20}=v_{20}=0$ が成り立つ。ここでは後者の表現を用い, 定常解 $u_i=u_{i0}, v_i=v_{i0}(i=1, 2, 3)$ にそれぞれわずかな乱れ $\xi_i, \eta_i(i=1, 2, 3)$ を与える。乱れの時間変化を知るため, $u_{i0}+\xi_i, v_{i0}+\eta_i(i=1, 2, 3)$ を式(13)の $u_i, v_i(i=1, 2, 3)$ に代入し, ξ_i, η_i の二次以上の微小量を見捨てて変分方程式を求める。この式から特性方程式を導き, Routh-Hurwitz の判別法を適用する。

この共振点付近における式(11)の第2の定常解を求めるため, 式(11)の右辺の引数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が常に

$$\phi_1=\alpha_1+\alpha_2, \phi_2=\alpha_3 \dots\dots\dots (16)$$

の組合せで現れていることに注意して, 式(11)を

$R_i(i=1, 2, 3)$ と $\phi_j(j=1, 2)$ に関する方程式に書き直す。その結果,

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_i \dot{R}_i &= f_i(R_1, R_2, R_3, \phi_1, \phi_2) \quad (i=1, 2, 3) \\ \dot{\phi}_j &= h_j(R_1, R_2, R_3, \phi_1, \phi_2) \quad (j=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

の形の式を得る。定常状態が, 条件 $\dot{R}_i=0(i=1, 2, 3), \dot{\phi}_j=0(j=1, 2)$ で与えられるとすると, 式(17)から

$$f_i=0 \quad (i=1, 2, 3), h_j=0 \quad (j=1, 2) \dots\dots\dots (18)$$

を得る。この式は5個の未知数に関する5個の方程式であり, 解が存在し得る。後に数値例によって, 実際に, 解が存在することを示す。このようにして, この共振点付近では, 内部共振によって三つの振動が同時に発生する場合があることが示される。

内部共振によって三つの振動が発生するときの振動数 $\Omega_i=\omega_i+\alpha_i(i=1, 2, 3)$ を求めるには, 式(18)で定めた R_i, ϕ_j を用いて, 式(11)から $\dot{\alpha}_i(i=1, 2, 3)$ を求め, ω_i に加えればよい。式(10), (18)の条件に注意すると, $\Omega_i(i=1, 2, 3)$ が

$$\Omega_1+\Omega_2=\omega, \Omega_3=\omega \dots\dots\dots (19)$$

を満たすことは容易に確かめられる。

第2の定常解の安定性は次のようにして定められる。定常解が $R_i=R_{i0}(i=1, 2, 3), \phi_j=\phi_{j0}(j=1, 2)$ で与えられているとし, これにわずかな乱れ $\xi_i(i=1, 2, 3), \eta_j(j=1, 2)$ を与える。乱れの時間変化を知るため, $R_{i0}+\xi_i, \phi_{j0}+\eta_j$ を式(17)の R_i, ϕ_j に代入し, 二次以上の微小量を見捨てて変分方程式を求める。これ以後の取扱いは第1の定常解の場合と同様である。

数値例を示す。非線形項 $\phi_i(i=1, 2, 3)$ は, 式(3)の特別な場合である

$$\phi_i=\varepsilon(X_1+X_2+X_3)^2+\beta(X_1+X_2+X_3)^3 \quad (20)$$

で与えられるとする。これを与えるポテンシャル V はもちろん存在する。また減衰係数 c_{ij} は

$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=c, c_{ij}=0 \quad (i \neq j) \dots\dots\dots (21)$$

を満たすとする。以下, 各共振点付近の数値例はすべてこの形の振動系について示す。

ε, β, c などのパラメータを適当に取り, 式(14), (18)から振幅 $R_i(i=1, 2, 3)$ を定めると, 図1に示すような共振曲線が得られる。図1中, 実線は安定な振動, 破線は不安定な振動を表す。分枝 O_1, O_2 は第1の定常解, したがって調和振動のみが発生する場合を表す。分枝 A, B, C は第2の定常解, したがって三つの振動が同時に発生する場合を表す。

図1からこの共振点付近における振動の特性がわかる。例えば, ω を低い値からゆるやかに増加させるとき, 初め分枝 O_1 で表される調和振動のみが発生す

る。点 a_1 の ω を超えると、分枝 A で表される三つの振動が発生する。点 a_2 の ω を超えると、再び分枝 O_1 の調和振動が発生する。分枝 B にも安定な部分があるので、 ω の値および初期条件によって、分枝 B で表される振動が発生する。

分枝 B 上の不安定部分 b_1b_2 は他の不安定部分と異なって、その境界は、垂直接線をもつ点あるいは分岐点となっていない。この不安定部分に対応する ω の範囲での振動系の挙動を見るため、式(13)を数値積分したところ、 $u_i, v_i (i=1, 2, 3)$ はほとんど周期的に変化することがわかった。そしてその周期は、外力の周期とは簡単な関係になく、概周期運動が生じ得ることが見出された。

4.2 共振点 (I・c) 付近の振動 共振点 (I・c) 付近の振動は、4.1 節と同じように扱うことができる。以下、各共振点とも、扱いはよく似ているので、異なる点だけを主に述べることにする。

ここでは、2種類の定常解が存在し得る。

第1の定常解は $R_1=R_2=0, R_3 \neq 0$ となるもので、この解が表す振動の振動数 Ω_3 は

$$\Omega_3 = 2\omega \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、この解は二次の高調波振動の発生を表している。

第2の定常解は $R_1, R_2, R_3 \neq 0$ となるもので、式(16)と同じ量を導入して求められる。この解は三つの

振動が同時に発生する場合を表し、その振動数 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ は、

$$\Omega_1 + \Omega_2 = 2\omega, \Omega_3 = 2\omega \quad \dots\dots\dots (23)$$

を満たしている。

共振点 (I・c) 付近の共振曲線の数値例を図2に示す。図2の分枝 O_1, O_2 は二次の高調波振動のみが発生する場合、その他の分枝は三つの振動が同時に発生する場合を表す。概周期運動はここでは見いだされなかった。

4.3 共振点 (I・e) 付近の振動 ここでは3種類の定常解が存在し得る。

第1の定常解は $R_1=R_2=R_3=0$ となるもので、この解は、外力から直接定められる調和振動（以下この振動についてはいちいち言及しない）以外には、振動が発生しない場合を表す。

第2の定常解は、 $R_1=R_2=0, R_3 \neq 0$ となるもので、この解が表す振動の振動数 Ω_3 は

$$\Omega_3 = (1/2)\omega \quad \dots\dots\dots (24)$$

となり、この解は1/2次の分数調波振動が発生する場合を表している。

第3の定常解は $R_1, R_2, R_3 \neq 0$ となるもので、

$$\phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \phi_2 = \alpha_3 \quad \dots\dots\dots (25)$$

を導入して求められる。この解は三つの振動が同時に発生する場合を表し、その振動数 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ は

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \omega, \Omega_3 = (1/2)\omega \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$P_1 = \sqrt{2}, P_2 = 7, P_3 = \sqrt{2} + 7, P_1 = P_2 = P_3 = 0.1, \epsilon = 0.1, \beta = 0.02, c = 0.0008$$

図1 共振点 (I・a) 付近の共振曲線

$$P_1 = \sqrt{2}, P_2 = 7, P_3 = \sqrt{2} + 7, P_1 = P_2 = P_3 = 40, \epsilon = 0.1, \beta = 0.02, c = 0.0002$$

図2 共振点 (I・c) 付近の共振曲線

を満たす。

共振点(I・e)付近の共振曲線の数値例を図3に示す。図3の分枝 O_0 および O_1, O_2 はそれぞれ振動が発生しない場合および(1/2)次の分数調波振動が発生する場合を表し、その他の分枝は三つの振動が同時に発生する場合を表す。この共振点では、概周期運動が発生することもある。

4.4 共振点(I・g)付近の振動 ここでは2種類の定常解が存在し得る。

第1の定常解は $R_1=R_2=R_3=0$ となるもので、この解は振動が発生しない場合を表す。

第2の定常解は $R_1, R_2, R_3 \neq 0$ となるもので、

$$\phi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_3 \quad \dots\dots\dots(27)$$

を導入して求められる。この解は三つの振動が同時に発生する場合を表し、その振動数 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ は、

$$2\Omega_1 + \Omega_2 = \omega, \Omega_1 + \Omega_3 = \omega \quad \dots\dots\dots(28)$$

を満たす。

共振点(I・g)付近における共振曲線は、振動が発生しない場合を表す分枝のほかに、三つの振動が同時に発生する場合を表す分枝からなり、各分枝は ω の増加とともに単調に増加する単純なものとなった。この共振点では概周期運動は見いだされなかった。

4.5 共振点(I・b), (I・d), (I・f), (I・h)付近の振動 4.4節までに扱った共振点を除く、各共振点付近の振動はまとめて扱うことができる。

まず共振点(I・b)付近を考える。この場合の式(11)の $i=1, 3$ の式に R_1, R_3 を掛け、辺々加え合せると

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 R_1^2 + \omega_3 R_3^2) = -c_{11}\omega_1 R_1^2 - c_{33}\omega_3 R_3^2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

を得る。この式から $(\omega_1 R_1^2 + \omega_3 R_3^2)$ は時間とともに減少し、定常状態では $R_1=R_3=0$ となることがわかる。 R_2, a_2 は式(11)の $i=2$ の式で $\dot{R}_2=0, \dot{a}_2=0$ とおいて求められ、一般に $R_2 \neq 0$ となる。この解が表す振動の振動数 Ω_2 は $\Omega_2=\omega$ となる。したがってこの共振点付近では、通常の調和振動のみが発生することがわかる。

共振点(I・d)あるいは(I・f)付近でも、同様な取扱によって、 $R_1=R_3=0, R_2 \neq 0$ となる解が得られる。この解が表す振動の振動数 Ω_2 は、それぞれの共振点付近で、 $\Omega_2=2\omega$ あるいは $\Omega_2=(1/2)\omega$ となる。したがって、共振点(I・d), (I・f)付近でそれぞれ、二次の高調波振動のみ、あるいは1/2次の分数調波振動のみが発生することがわかる。

最後に共振点(I・h)付近では、

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 R_1^2 + \omega_2 R_2^2 + 2\omega_3 R_3^2) = -c_{11}\omega_1 R_1^2 - c_{22}\omega_2 R_2^2 - 2c_{33}\omega_3 R_3^2 \quad \dots\dots\dots(30)$$

が得られ、ここでは、定常状態では $R_1=R_2=R_3=0$ となって、振動は発生しない。

$$p_1 = \sqrt{2}, p_2 = 7, p_3 = \sqrt{2} + 7, p_1 = p_2 = p_3 = 40, \varepsilon = 0.1, \beta = 0.02, c = 0.0002$$

図3 共振点(I・e)付近の共振曲線

$$\omega = 4.2062, p_1 = \sqrt{2}, p_2 = 7, p_3 = \sqrt{2} + 7, p_1 = p_2 = p_3 = 40, \varepsilon = 0.1, \beta = 0.02, c = 0.0002$$

図4 数値積分で得られた振動波形の例
(共振点(I・c)付近)

この節の結果を、4・1～4・4節の結果と比較すると、内部共振が発生するのは、共振点を定める式(5)の条件の右辺に二つ以上の固有振動数が和の形で現れる場合となっていることに気がつく。

4・6 数値積分法による振動解析 ハーモニックバランス法による解析結果の妥当性を検討するため、4・1節で取り上げた振動系の運動方程式を、数値積分法によって解いた。

数値積分による解析結果の一例として、共振点(I・c)付近で得られた振動波形を図4に示す。図4の1番めの波形は外力、2, 4, 6番めの波形は X_1, X_2, X_3 を表す。図4から明らかに、調和振動以外の振動が発生していることがわかる。その振動がどのようなものであるかを見るため、 X_1, X_2, X_3 から、式(7)の第2項で与えられる調和振動を引くと、それぞれ3, 5, 7番めの波形のようになった。これらの波形はほぼ調和的に変化し、その振動数は式(23)の関係を満たしている。このようにして、図4に示した波形は、共振点(I・c)付近の第2の定常解を表していることがわかる。

各共振点付近で同様の解析を行い、発生する振動の振幅をハーモニックバランス法で得た共振曲線の図に●印であわせて示した。いずれの場合も、数値積分の結果とハーモニックバランス法の結果はほぼ一致した。

数値積分によって概周期運動の発生も確かめられた。一例として、共振点(I・a)付近の不安定部分 b_1b_2 (図1)で得られた概周期運動の波形の例を図5に示す。

$$\omega = 8.426, p_1 = \sqrt{2}, p_2 = 7, p_3 = \sqrt{2} + 7, \\ p_1 = p_2 = p_3 = 0.1, \varepsilon = 0.1, \beta = 0.02, c = 0.0008$$

図5 数値積分で得られた概周期運動の例
(共振点(I・a)付近)

5. 内部共振の条件(II)を満たす振動系の振動

この章では、式(4)の(II)の条件が満たされる振動系を取り上げる。この場合の式(11)を実際に求めると、この振動系に内部共振による振動が生じるためには、系のポテンシャル V が $\beta_{1123}X_1^2X_2X_3$ の形の項を含むことが必要であることがわかる。以下、この条件が満たされているとする。

5・1 共振点(II・a)付近の振動 ここでは2種類の定常解が存在し得る。

第1の定常解は $R_1 = R_2 = 0, R_3 \neq 0$ となるもので、この解が表す振動の振動数 Ω_3 は

$$\Omega_3 = \omega \dots \dots \dots (31)$$

を満たし、この解は調和振動の発生を表している。

第2の定常解は $R_1, R_2, R_3 \neq 0$ となるもので

$$\phi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \phi_2 = \alpha_3 \dots \dots \dots (32)$$

を導入して求められる。この解は三つの振動が同時に発生する場合を表し、その振動数 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ は

$$2\Omega_1 + \Omega_2 = \omega, \Omega_3 = \omega \dots \dots \dots (33)$$

を満たす。

共振点(II・a)付近における共振曲線は、通常の調和

$$p_1 = \sqrt{3}, p_2 = 2.5, p_3 = 2\sqrt{3} + 2.5, \\ p_1 = p_2 = p_3 = 20, \varepsilon = 0.05, \beta = 0.01, c = 0.005$$

図6 共振点(II・f)付近の共振曲線

振動の共振曲線に、後に示す、共振点(II・g)付近の共振曲線を重ね合せたような形となった。概周期運動は、この共振点を含め、この章で扱う、すべての共振点付近で見いだされなかった。

5・2 共振点(II・f), (II・g), (II・h), (II・i), (II・k) 付近の振動 共振点(II・f), (II・g), (II・h), (II・i), (II・k)付近では、いずれも2種類の定常解が存在し得る。

第1の定常解は $R_1=R_2=R_3=0$ となるものである。

第2の定常解は $R_1, R_2, R_3 \neq 0$ となるもので、この解は共振点(II・f), (II・g), (II・h), (II・i), (II・k)の順にそれぞれ

$$\phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \phi_2 = \alpha_3 - \alpha_1 \quad (34)$$

$$\phi_1 = 2\alpha_1 + \alpha_3, \phi_2 = 2\alpha_3 - \alpha_2 \quad (35)$$

$$\phi_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \phi_2 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (36)$$

$$\phi_1 = 2\alpha_3 - \alpha_1, \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (37)$$

$$\phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \phi_2 = \alpha_3 - \alpha_1 \quad (38)$$

を導入して求められる。これらの解は三つの振動が同時に発生する場合を表し、その振動数 $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ は、共振点(II・f), (II・g), (II・h), (II・i), (II・k)の順にそれぞれ

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \omega, \Omega_2 + \Omega_3 = 2\omega \quad (39)$$

$$2\Omega_1 + \Omega_3 = \omega, 2\Omega_3 - \Omega_2 = \omega \quad (40)$$

$$\Omega_1 + 2\Omega_2 = \omega, -\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \omega \quad (41)$$

$$p_1 = \sqrt{3}, p_2 = 2.5, p_3 = 2\sqrt{3} + 2.5, \\ p_1 = p_2 = p_3 = 20, \beta = 0.005$$

図7 共振点(II・g)付近の共振曲線

$$2\Omega_3 - \Omega_1 = \omega, \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \omega \quad (42)$$

$$\Omega_1 + \Omega_2 = 2\omega, \Omega_3 - \Omega_1 = 2\omega \quad (43)$$

を満たす

4・1節で取り上げた振動系について、まず、共振点(II・f)付近の共振曲線の数値例を示すと、図6のようになる。図6の分枝Oは振動が発生しない場合、他の分枝は三つの振動が同時に発生する場合を表す。次に、共振点(II・g), (II・h), (II・i)付近の共振曲線は互いに類似の曲線となったので、ここでは(II・g)付近の共振曲線を示すと、図7のようになる。図7の分枝Oは振動が発生しない場合、分枝Aは三つの振動が同時に発生する場合を表す。共振点(II・k)付近の共振曲線はそれらと異なっており、図8に示すようになる。ここでも振動が発生しない状態を表す分枝Oと、三つの振動が同時に発生する場合を表すその他の分枝とから成っている。

5・3 共振点(II・b), (II・c), (II・d), (II・e), (II・j) 付近の振動 5・1節と5・2節で扱った共振点を除

$$p_1 = \sqrt{3}, p_2 = 2.5, p_3 = 2\sqrt{3} + 2.5, \\ p_1 = p_2 = p_3 = 30, \beta = 0.01$$

図8 共振点(II・k)付近の共振曲線

く、各共振点付近の振動はまとめて扱うことができる。

まず共振点(II・b), (II・c)付近では、定常状態で調和振動のみが発生する。共振点(II・d), (II・e)ではそれぞれ1/2次あるいは1/3次の分数調波振動のみが発生する。最後に、共振点(II・j)付近では振動は発生しない。

この節の結果を、5・1節および5・2節の結果と比較すると、内部共振が発生するのは、共振点を定める式(6)の条件の右辺に、二つ以上の固有振動数が和の形で現れる場合となっていることに気がつく。

5・4 数値積分法による振動解析 4章と同様に、4・1節で取り上げた振動系が内部共振の条件(II)を満たすようにして、運動方程式を数値積分法によって解いた。

各共振点付近で発生する振動の振幅を、ハーモニクバランス法で求めた共振曲線上に●印で示した。ここでも両者の結果はほぼ一致することが確かめられた。

6. ま と め

固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が(I) $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ あるいは(II) $2\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ の形の内部共振の条件を満たし、かつそれらが整数比とならないような、三自由度非線形振動系に調和外力が作用するときの、主共振点と副共振点付近の振動を扱った。非線形項は変位の二乗と三乗で与えられるとし、ハーモニクバランス法により解析した。さらに、運動方程式を数値積分法によって解いた結果と比較することによって、ハーモニクバランス法による結果がほぼ妥当なものであることを確かめた。得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 内部共振による振動が発生するためには、基準座標 X_1, X_2, X_3 で表された系のポテンシャルが、条件(I)を満たす系では $X_1 X_2 X_3$ の形、条件(II)を満たす系では $X_1^2 X_2 X_3$ の形の項をそれぞれ含む必要がある。

(2) このとき、条件(I)を満たす振動系では、式(5)の共振点のうちの共振点(I・a), (I・c), (I・e), (I・g)付近で、また条件(II)を満たす振動系では、式(6)の共振点のうちの共振点(II・a), (II・f), (II・g), (II・h), (II・i), (II・k)付近で、それぞれ内部共振による振動が発生し得る。

(3) 内部共振による振動が発生し得る共振点では、定常状態で、振動が発生しないか一つだけ発生する場合と、三つの振動が同時に発生する場合がある。

(4) 共振点(I・a), (I・e)付近では概周期運動が発生することもある。

(5) (2)で述べた以外の共振点付近では、振動系に、振動は発生しないか一つだけ発生するかのいずれかである。

終わりに、本報の数値計算を行うにあたって、当時大学院の学生であった本田秀昭、松崎章弘両君に助力を受けたことを記して感謝の意を表す。

文 献

- (1) Malkin, I. G., *Some Problems in the Theory of Non-linear Oscillations*, (1959), 320, U. S. Atomic Energy Commission.
- (2) Sethna, R. P., *Trans. ASME, Ser. E*, 27-1 (1960), 187.
- (3) Tondl, A., *Some Problems of Rotor Dynamics* (1965), 343, Chapman & Hall.
- (4) 山本・安田, 機論, 42-358 (昭51), 1692.
- (5) 山本・ほか2名, 機論, 43-365 (昭52), 105.

討 論

〔質問〕 横井雅之〔大阪産業大学短期大学部〕
多自由度非線形振動系の内部共振について詳細に研究されていることに敬意を表す。

(1) 共振点(I・a)では不安定領域にもかかわらず数値計算によって概周期振動の発生が確認されているが、一般に概周期振動の存在と安定判別の関係はどのようなものになるのか。

(2) 内部共振による振動発生には条件(I)ではポテンシャル $X_1 X_2 X_3$ の項が、条件(II)では $X_1^2 X_2 X_3$ の形の項を含むことが必要とされ、それぞれの係数 ϵ, β の値が計算結果に示されているが、これらの値は振

動の発生条件に対しどのような影響を及ぼすのか。

〔回答〕 (1) ご指摘の不安定とは、定常振動(振幅が一定の振動)で安定でないことを意味する。定常振動が不安定となる領域で、定常振動にかわってどのような振動が発生するかはいろいろあり、概周期運動となるのはその一つである。

(2) 本報では、多くの場合を扱っているため、パラメータの影響を詳細に検討することまではやっていない。 ϵ, β が通常の値をとるときに、内部共振の影響がいろいろな形で系に現れることを指摘したというのが、本報の趣旨であるご理解いただきたい。

〔質問〕 矢野 澄雄〔福井大学工学部〕

(1) 数値例のパラメータであるが、条件(I), (II)および主・副共振に分けて、一般的に特徴が現れやすいような外力、減衰、二乗と三乗項の係数の大きさの関係についてご教示いただきたい。また固有振動数 ω_i の値の選び方には依存しないか。

(2) 条件(I), (II)で、概周期解の発生するタイプについて、ご教示いただきたい。また差の形のタイプが発生しないのは、式(20)の非線形項以外の場合でもみられる特徴か。

〔回答〕 (1) 横井氏への回答(2)を参照いただきたい。

(2) ご指摘の差の形のタイプが発生しないのは、前報(付1)の考え方で説明できると思う。どのような非線形項をもつ系で概周期運動の発生が見られるかは、現在のところ、理論的に説明できるまでにはいたっていない。

(付1) Yamamoto, T. and Yasuda, K., *Trans. ASME Ser. E*, 41-3 (1974), 781.

51 巻 472 号, C 編 (昭 60-12) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
前澤成一郎 ほか	3205	左	1	$\partial y / \partial x _{x=\xi}$	$\partial y / \partial x _{x=\xi}$
	3210	文献(3)		(昭50) Kiev, 79.	(昭50), 79.
	〃	文献(4)		ICNO, 1981,	ICNO, Kiev 1981,
入江敏博 ほか	3349	左	13	$\sin^2 \phi$	$\sin \phi$
	〃	〃	14	$\sin \phi$	$\sin^2 \phi$
	〃	〃	25	$-n^2 / \sin^2 \phi$	$-2n^2 / \sin^2 \phi$
	3353	文献(6)		Transiennt	Transient
	〃	左	下 18	$\phi_1 = 90^\circ \pi / 2'$	$\phi_1 = 90^\circ$
太田 博 ほか	3393	英文概要	3	relation ship	relationship
永瀬和彦	3413	右	2	検知	検知し
	3414	左	11	生ずる基準軸せりあり	生ずるせりあい
	3416	右	23	4~7	5~7
	3417	図7	図中	Parastic	Parasti c
本江 明 ほか	3442	図3(d)	縦軸	$\Delta(X_{\text{MAX}})(\%)$	$ \Delta(X_{\text{MAX}}) (\%)$
	〃	〃	図説	図3(d)レスポンススペクトル (相対変位) 最大値の誤差	図3(d)レスポンススペクトル (相対変位) 最大値の誤差の絶対値
	〃	表1	表説	表1 一自由度系の応答 (誤差 の最大値%)	表1 一自由度系の応答 (最大 値の誤差%)
	3443	表2	表説	表2 一自由度系の応答 (最大 値の誤差%)	表2 一自由度系の応答 (誤差 の最大値%)