時間遅れをともなう強制自励系の振動*
(1/2次分数調波振動)津田吉広**, 末岡淳男***, 吉武 裕***
田村英之***, 井上順吉****Vibrations of a Forced Self-Excited System with a Retarded Argument
(1/2-th Subharmonic Vibrations)by Yoshihiro TSUDA, Atsuo SUEOKA, Yutaka YOSHITAKE,
Hideyuki TAMURA, and Junkichi INOUE

The 1/2-th subharmonic entrained vibrations of a nonlinear retarded system with a soft spring type are investigated by making use of an averaging method, under the condition that both a periodic exciting force and a constant force are operative. The Routh-Hurwitz criterion provides the stability conditions of these steady oscillations. It is also revealed that almost periodic vibrations occur in the same frequency region as in which the entrained vibrations appear. These two kinds of oscillations are studied numerically using mapping plots in the phase plane. The analytical results relatively agree with the numerical solutions and also the results of an analog computer. In addition, it is shown that the 1/2-th subharmonic oscillations can take place in the same system, even though there is only a periodic force as the stimulating force.

Key Words: Theory of Vibration, Nonlinear Oscillation, Retarded Argument, Forced Self-Excited System, Entrainment, 1/2-th Subharmonic Vibration, Almost Periodic Vibration, Mapping

1. 緒 言

振動現象の支配方程式において、特性あるいは特性変化が過去の状態にも依存する場合も存在し、このような系は制御工学、生物工学あるいは社会科学といった広い分野で見受けられるようである。このような時間遅れを含む微分方程式すなわち差分微分方程式（一般に、関数微分方程式）の相空間を無限次元空間（例えば、バナッハ空間）としてとらえたのは Krasovsky, N., N. が最初とされる⁽¹⁾。さらに、彼はリアプノフの第二の方法を用いて差分微分方程式で表される系の安定性を考察している⁽²⁾が、与えられた個々の系の呈する応答（例えば、基本調波、高調波または分数調波等）の特性に対する見通しは必ずしも十分とは言えない。一般に、簡単な差分微分方程式に対しても、リアプノフ関数を求めることは常微分方程式以上に非常に困難である⁽³⁾。

これらの観点は本研究問題の基礎付けとして極めて重要〔例えば、文献(4)(5)(6)参照〕であるが、計算

技術上からはむしろ平均法による解析・考察の方が好ましいように思われ、この線に沿った研究も数多く見受けられる⁽¹⁾。例えば、Рубаник, В., П.⁽⁷⁾は時間遅れを含む van der Pol の方程式について平均法を用いて時間遅れの変化により発生する基本調波、1/3 次分数調波応答を考察しているが、解析結果のみであり、例えばデジタルシミュレーションまたは実験等による結果との比較検討は行っていない。

さて、著者らは既報⁽⁸⁾において工作機械における、いわゆるびびり振動の発生機構の解明を目的として、時間遅れおよび対称漸軟ばね特性を含む強制自励系に発生する調波振動の引込みおよびうなり現象等々について解析を行い、旋削中の被削材に強制力を加えた実験との定性的一致をみた。しかし、その実験中に発生が確認された 1/2 次分数調波振動の引込み現象（以下、単に 1/2 次分数調波振動と記す）に関しては解析的検討を保留した⁽⁸⁾⁽⁹⁾。この 1/2 次分数調波振動はバイトが被削材を一定力で一方向に押し付けている（復元力が非対称）ために発生しやすくなったと考えられる⁽⁹⁾。

考察の対象とした系は十分になめらか（変位および速度の多項式）であるので、解の存在等の諸条件を満たすと考えられる⁽¹⁰⁾。したがって、関数微分方程式の初期値問題に関しては、右に向かう解にのみ限定すれ

* 昭和 60 年 10 月 2 日 第 63 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 59 年 10 月 18 日。

** 正員、大分大学工学部(〒870-11 大分市且野原 700)。

*** 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

**** 正員、九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

ば常微分方程式と同様に考えることができる⁽¹¹⁾ので、本報においても常微分方程式に対する平均法⁽¹¹⁾⁽⁷⁾を適用し、主として既報⁽⁸⁾の系の1/2次分数調波引込み領域における1/2次分数調波振動を解析し、得られた結果を直接数値積分法(写像法)およびアナログ電子計算機の結果と照合・確認する。この写像法は非線形系の周期解を探索するのに適したものであり⁽¹²⁾、強い非線形性をもつ系の解析に有効である^{(13)~(15)}。

2. 理論解析

2.1 近似解 解析すべき基礎方程式は既報⁽⁸⁾の式(2)の強制力に一定外力成分を考慮して次のようにおく。

$$\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + x(t - \tau) + q \cdot x^3(t - \tau) = a \cos \nu t + G \quad \dots (1)$$

ただし、 τ : 時間遅れ(>0)、 h : 粘性減衰係数(>0)、 $q(=-1)$ 、 $a(>0)$ 、 $G(>0)$ 、 ν : 角振動数[以上、定数]、 $x(t)$: 変位、 t : 無次元時間、 $(\cdot) = d(\cdot)/dt$

さらに、式(1)を正規形で表示すれば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= a \cos \nu t + G - hy(t) \\ &\quad - x(t - \tau) - qx^3(t - \tau) \end{aligned} \right\} \quad \dots (2)$$

となる。

ここで、量 h および τ は十分に小さな量でかつ $\tau > h$ との仮定⁽⁸⁾のもとで式(1)に対して平均法を適用して定常解を求める。すなわち、強制外力の振動数 ν が2に近い領域での1/2次分数調波振動の近似解を次のように仮定する。

$$x(t) = R + C \cos\left(\frac{\nu}{n}t - \theta\right) + A \cos \nu t, \quad \dots (3)$$

ただし、

$A \approx a/(1 - \nu^2)$: 基本調波成分の振幅

R : 応答の非振動成分

C : 1/2次分数調波成分の振幅

θ : その位相遅れおよび $n=2$

である。

式(3)を式(1)に代入し、平均法により平均化方程式を求めれば次式が得られる⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\nu}{n} C \dot{\theta} &= -\frac{1}{2} C \left[\cos\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) - \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 3q \left(R^2 + \frac{1}{4} C^2 + \frac{1}{2} A^2 \right) \cos\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) \right. \\ &\quad \left. + 3qRA \cos\left(2\theta - \frac{\nu}{n}\tau\right) \right], \\ \frac{\nu}{n} \dot{C} &= -\frac{1}{2} C \left[h \left(\frac{\nu}{n} \right) - \sin\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) \right. \\ &\quad \left. - 3q \left(R^2 + \frac{1}{4} C^2 + \frac{1}{2} A^2 \right) \sin\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ 3qRA \sin\left(2\theta - \frac{\nu}{n}\tau\right) \right], \\ -h\dot{R} &= -G + R \\ &+ qR \left(R^2 + \frac{3}{2} C^2 + \frac{3}{2} A^2 \right) \\ &+ \frac{3}{4} qC^2 A \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

定常状態では、 $\dot{\theta}, \dot{C}, \dot{R}=0$ であり、定常解の C, R を与える条件は次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} &\left[1 + 3q \left(R^2 + \frac{1}{4} C^2 + \frac{1}{2} A^2 \right) - \frac{\nu}{n} \left\{ h \right. \right. \\ &\quad \left. \times \sin\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) + \frac{\nu}{n} \cos\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) \right\} \right]^2 \\ &+ \left(\frac{\nu}{n} \right)^2 \left\{ h \cos\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) - \frac{\nu}{n} \sin\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) \right\}^2 \\ &- (3qRA)^2 = 0, \\ R(R - G) + qR^2 \left(R^2 + \frac{3}{2} C^2 + \frac{3}{2} A^2 \right) \\ &- \frac{1}{4} C^2 \left[1 + 3q \left(R^2 + \frac{1}{4} C^2 + \frac{1}{2} A^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu}{n} \left\{ h \sin\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) + \frac{\nu}{n} \cos\left(\frac{\nu}{n}\tau\right) \right\} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (5)$$

式(3)(4)(5)から明らかに、任意の G に対して R, C および θ が一組の解[以後、 (R, C, θ) と略記する]であるならば、 $(R, -C, \theta)$ も解であり、また、 $G=0$ のときは、ある $x(\nu t)$ が解であるとき、 $-x(\nu t + \pi)$ も解、すなわち、 $(-R, \pm C, \theta)$ も解である。これらのことは後述するシミュレーションに際して注意すべきことである。

2.2 安定性 前節で得られた定常解を R_0, C_0 および θ_0 とし、この解の安定性をラウス・フルヴィッツの安定規範を用いて調べる(または、特性根を実際に求めることも容易である⁽²⁰⁾)。 R_0, C_0, θ_0 からの微小な乱れをそれぞれ $\bar{r}, \bar{c}, \bar{\theta}$ とし、 $R = R_0 + \bar{r}$, $C = C_0 + \bar{c}$, $\theta = \theta_0 + \bar{\theta}$ とおき、式(4)に代入すれば次の変分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\nu}{n} C \dot{\bar{\theta}} &= a_{11} C_0 \bar{\theta} + a_{12} \bar{c} + a_{13} \bar{r}, \\ \frac{\nu}{n} \dot{\bar{c}} &= a_{21} C_0 \bar{\theta} + a_{22} \bar{c} + a_{23} \bar{r}, \\ -h \dot{\bar{r}} &= a_{31} C_0 \bar{\theta} + a_{32} \bar{c} + a_{33} \bar{r}, \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \nu\tau/n, \quad \Theta_2 = 2\theta_0 - \nu\tau/n, \\ a_{11} &= 3qR_0A \sin \Theta_2, \\ a_{12} &= -(3/4)qC_0^2 \cos \Theta_1, \\ a_{13} &= -(3/2)qC_0 \\ &\quad \times (2R_0 \cos \Theta_1 + A \cos \Theta_2), \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= -3qR_0A \cos \Theta_2, \\
 a_{22} &= (3/4)qC_0^2 \sin \Theta_1, \\
 a_{23} &= (3/2)qC_0 \\
 &\quad \times (2R_0 \sin \Theta_1 - A \sin \Theta_2), \\
 a_{31} &= -(3/2)qC_0A \sin 2\theta_0, \\
 a_{32} &= (3/2)qC_0(2R_0 + A \cos 2\theta_0), \\
 a_{33} &= 1 + 3q(R_0^2 + C_0^2/2 + A^2/2)
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots (6)$$

ここで、 $\tilde{r} = \tilde{r}_0 e^{i\omega t}$, $\tilde{c} = \tilde{c}_0 e^{i\omega t}$, $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 e^{i\omega t}$ (ただし、 $\tilde{r}_0$, $\tilde{c}_0$, $\tilde{\theta}_0$ は定数) として特性方程式を求め、ラウス・フルヴィッツの安定規範を適用すれば安定条件として次式を得る⁽²¹⁾。

$$\begin{aligned}
 \Psi_i &> 0 \quad (i=0, 1, 2, 3), \\
 \Psi_0 \Psi_3 &< \Psi_1 \Psi_2, \\
 \text{ただし,} \\
 b_1 &= b_2 = \nu/n, \quad c_3 = -h, \\
 \Psi_0 &= -b_1 b_2 b_3, \\
 \Psi_1 &= a_{11} b_2 b_3 + a_{22} b_1 b_3 + a_{33} b_1 b_2, \\
 \Psi_2 &= a_{13} a_{31} b_2 + a_{12} a_{21} b_3 \\
 &\quad + a_{32} a_{23} b_1 - (a_{11} a_{22} b_3 \\
 &\quad + a_{11} a_{33} b_2 + a_{22} a_{33} b_1), \\
 \Psi_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots (7)$$

3. 数値例および考察

式(5)から得られた応答曲線を振動数 ν に対して図示したものが図1である。図中、実線は安定な、点線は不安定な状態を意味する。パラメータは次のようにとった： $h=0.008$, $\tau=0.01$, $a=0.1$, $G=0.1$ 。解の安定領域は、 $1.53 \leq \nu \leq 1.90$ の振動数域である。

ほかに、 $(h, \tau) = (0.01, 0.02)$, $(0.02, 0.03)$ も計算してみたが、安定領域がわずかに異なるものの、図示の結果とほとんど一致し、曲線上では区別できなかった。C曲線についてみると下方の分枝はすべて不安定であり、上方の分枝上に安定な状態が存在する。この安定状態を含む分枝を安定分枝、他を不安定分枝と称する。これらの2本のC曲線に対応する2本のR曲線は、振動数の高い領域でほぼ同じ値を示している。なお、 $G \neq 0$ の場合には式(4)から位相のみを異にする2種類の1/2次分数調波振動が存在することが容易に分かる。

3.1 直接数値積分法(写像法)^{(13)~(16)(19)}による結果
 $t=0$ のときの $x-y$ 平面上の任意の点 $P_0(x_0, y_0)$ を通る式(2)の解を $[x(t), y(t)]$ とする。ここで、 L を強制外力の周期とし、さらに

$$\begin{aligned}
 x_i &= x(iL), \quad i=0, 1, 2, \dots \\
 y_i &= y(iL)
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots (8)$$

とおけば、 $x-y$ 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を点 $P_i(x_i, y_i)$ へ移す変換 T が定義でき、 $P_i = T^i P_0$ で表される〔例えば、文献(16)〕。したがって、ある初期値 $P_0(x_0, y_0)$ から出発する運動は点列

$$P_1, P_2, \dots, P_i, \dots \quad \dots\dots (9)$$

によってその挙動を求めることができる。この変換 T によって不変な点、すなわち $P_0 = P_1 (= TP_0)$ は不動点であり、 $P_0 \neq P_i (i=1, 2, \dots, m-1)$ で、 $P_0 = P_m (= T^m P_0)$ となる点は m 周期点である。ここでは、式(2)の直接数値積分はルンゲ・クッタ法によった。その際、時間刻み Δt は $\Delta t = 2L/2^{11}$ または $2L/2^{12}$ とし、さらに $t \rightarrow \infty$ での解 $[x(t), y(t)]$ の挙動を強制外力の4000サイクル以上の時間経過後の状態によって判断した。その結果、1/2次分数調波振動のほかに概周期振動(後述参照)が発生することが明らかとなった。ここでは、この概周期解(振動)については直接数値積分法によって得られた相曲線のみを示すことにする。

図2~4は系のパラメータを $h=0.008$, $q=-1.0$, $a=0.1$, $\tau=0.01$ および $G=0.1$ と設定したときの式(2)の2周期点[式(9)]を $x-y$ 平面上に小さい黒点でプロットしたもので、与えられた振動数 ν に対する式(2)の解の挙動を示す。図中、 P_0 点を $\odot$ 印で表示し、ほぼ一点に収束した状態を $\times$ 印で、さらに、図中、AP

— : stable } : present theory
 ... : unstable }
 0 : Numerical integration, Δ : Analog computer

図1 1/2次分数調波振動の応答曲線
 $(G=0.1$ の場合)

を付した曲線はほぼ定常的な概周期状態と考えられる軌道を示している（以後同様）。

図2(a)(b)は $\nu=1.75$ で2個の1/2次分数調波振動が存在することを示唆するが、(正)極限集合等々の定義やそれらに関する結果もここで考察する系に対しても同様に成り立つ⁽¹⁷⁾と考えられるので、これら2点に対応する解は1/2次分数調波振動である。しかし、これら2点は前述のように位相を異にするのみである。図2(c)も $\nu=1.75$ であるが、これは(a)(b)と異なりある閉軌道（図中APで表示）に漸近したものである。さらに、図2(d)(e)は $\nu=1.90$ の場合である。(d)の相軌道の形状から1/2次分数調波振動の存在を認めることができるが、定常解への収束は(a)(b)と比較して極めてゆるやかであることが特徴的である。(e)は閉軌道に漸近している。さらに、 $\nu=1.94$ に増加すれば図2(h)に示してあるように軌道特性は異なったものとなり、もはやこの振動数に対しては1/2次分数調波振動の発生は期待しえないことが分かる。さて、図2(f)は $\nu=1.85$ の場合、2個の1/2次分数調波振動（図中、 S_1 と S_2 で表示）とその外側の閉軌道

軌道APを同時にプロットしたものである。一般に、関数微分方程式の有界かつ一様安定（この一様安定性についてはここでは具体的に証明できないが）な解は、概周期関数に漸近する⁽¹⁸⁾ことから、図中の閉軌道APは式(2)の概周期解に対応するものと推察できる。さらに、図2(g)は(f)の領域Dを拡大表示したものであり、図1の不安定分枝上の解に対応する領域である。図中、 AP_1 と AP_2 内の領域の軌道は図2(f)のAPに漸近し、 S_{21} と S_{22} の領域内の軌道は図2(f)の S_2 に収束する。したがって、図2(f)の斜線を付した細長い領域は概周期解に漸近する領域であることが分かる。図2(e)もその1例である。したがって、図2(h)では1/2次分数調波振動は存在せず概周期振動のみが発生する。なお、図2(g)の中には S_1 へ収束する軌道は現れていない。それらの軌道は領域 AP_1 の左方で、 x 座標で示すならばおよそ $x < 0.09$ の領域に現れる。

図1には上述のデジタルシミュレーションにより得られた振幅を○印で、アナログ電子計算機による結果を△印で表示してある。これら3者の結果は定量的

図2 1/2次分数調波振動および概周期振動の解曲線 ($G=0.1$ の場合) (その1)

(e) $\nu=1.90$ (f) $\nu=1.85$ (g) 領域 D [図 2 (f)] の詳細図 ($\nu=1.85$) (h) $\nu=1.94$ 図 2 1/2 次分数調波振動および概周期振動の解曲線 ($G=0.1$ の場合) (その 2)

には比較的良好一致を示しているものといえる。安定領域の上限についてはこれらはよく一致しているものの、下限に関しては近似解と他の結果とは若干の差異を示している。

次に、図 3 に $\nu=1.70$ のときの近似解およびデジタルシミュレーション (黒点) によって得られた応答波形を示す。同図 (a) は強制外力の波形である。図から両者の結果はよく一致していることが分かる。図 4 は直接数値積分法より得られた概周期振動に対応する波形を描いたものである (ただし、 $\nu=1.88$)。図中、強制外力の 2 周期に対応する点を $\circ$ 印でマークしている。以上の解析結果から、対象とした振動数領域においては 1/2 次分数調波振動のみならず、概周期振動も生じ、そのいずれが発生するかは初期条件によるもの、閉軌道 (概周期解) に囲まれた領域においては初に対応する軌道の漸近的挙動は単純には見通すことができない。一方、概周期解の外側の領域ではこの振動に収束する [図 2 (f)]。

一定外力が存在しない場合 ($G=0$) 以上

— : Present theory,
● : Numerical integration

(a) External force

(b) Waveform of response

図 3 1/2 次分数調波振動の応答波形 ($G=0.1, \nu=1.70$ の場合)

は強制外力に一定外力成分が存在する場合 ($G \neq 0$) の結果であるが, 次にこの成分を欠く場合 ($G=0$) の結果について述べる. 図5に $G=0$ のときの応答曲線を示す. 図中, $\circ$ 印および $\triangle$ 印はそれぞれ直接数値積分法, アナログ電子計算機による結果である. 図1と異

図4 概周期振動の波形 ($G=0.1$ の場合)

図5 1/2 次分数調波振動の応答曲線 ($G=0$ の場合)

図6 1/2 次分数調波振動および概周期振動の解曲線 ($G=0$ の場合)

なり、基本調波成分については近似解と他の結果とに若干の差異が認められる。図 1 同様、安定領域の上限についてはほぼ満足すべき結果が得られているが、下限については相異していることが認められる。

さて、図 6 に $G=0$ (ただし、 $h=0.008, \tau=0.01, a=0.1$) のときの直接数値積分による結果を示す。同図 (a) および (b) は位相のみを異にする場合 [$(R, \pm C, \theta)$, ただし $R>0$] の相軌道であり、図 (c) は $(-R, C, \theta)$ に対応する軌道 (この場合も、逆位相の軌道も存在するが省いてある) および概周期解を示したものである (ただし、 $\nu=1.75$)。 $G \neq 0$ の場合と同様に、閉軌道に囲まれた内部の領域にも概周期振動に漸近する領域が存在するものと考えられる。図 6 (d) はもはや 1/2 次分数調波振動が存在しなくなったときの相軌道である (ただし、 $\nu=1.85$)。

図 7 は $\nu=1.75$ のときの波形をプロットしたものである。同図 (a) は強制外力の波形、図 (b) は (R, C, θ) , $R>0$ に対応する応答波形であり、他の三つの解 $(-R, \pm C, \theta)$, $(R, -C, \theta)$ は、図 (b) の曲線を横方向、縦方向にそれぞれ対応した量だけ移動させることにより求まる。なお、図中の黒点・は直接数値積分法により得られたもので、これより両者の結果はよく一致しているものと考えられる。

4. 結 言

時間遅れを含む非線形方程式によって与えられた振動 (強制自励) 系の内、既報⁽⁶⁾の実験で発生が確認された 1/2 次分数調波振動の引込み領域における 1/2 次分数調波振動、および概周期振動について直接数値積分

法およびアナログ電子計算機による結果を併用して考察し、それらの存在を確認した。以上を要約すれば以下のである。

(1) 考察した振動数領域で 1/2 次分数調波振動が存在し、その応答特性の概要を平均法によって推定することができる。

(2) この振動数領域において概周期振動 (解) が発生し得る。

(3) 概周期振動に対応する閉軌道に囲まれた領域 (位相平面) には、1/2 次分数調波振動および概周期振動のそれぞれへ収束する領域が混在する。

(4) 強制外力に一定外力成分が存在しない場合でも 1/2 次分数調波振動が発生する。

(5) 上述の (4) の系の場合、2 種類の解 (R, C, θ) および $(-R, C, \theta)$ が存在する。

(6) 1/2 次分数調波振動の振幅特性は (安定領域の下限については差異が認められるものの)、近似解、直接数値積分法およびアナログ電子計算機の 3 者による結果は比較的良好に一致する。

終わりに、本報告作成に当たりご協力いただいた本学の宇都宮 郁技官に厚く謝意を表す。

文 献

- (1) Mitropolsky, I. A., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2 (1967), 69.
- (2) Krasovskii, N. N., *Stability of Motion*, Stanford Univ., 1963.
- (3) 加藤, 非線形問題合同研究会講演論文集, 機械学会ほか (昭 46), 81.
- (4) Hale, J., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.
- (5) Bellman, R. and Cook, K. L., *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- (6) 杉山・差分, 微分方程式, (昭 55), 共立出版.
- (7) Рубаник, В. П., Колебания квази-линейных систем с запаздыванием, НАУКА (1969), 129.
- (8) 吉武ほか 2 名, 機論 C, 49-439 (昭 58), 298.
- (9) 前沢, 文献 (8) の討論.
- (10) La Salle, J. & Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method*. (山本訳), リアプノフの方法による安定性理論, (昭 50), 53, 産業図書.
- (11) 加藤, 関数方程式, (1974), 99, 筑摩書房.
- (12) 林, 機構論, No. 700-10 (昭 45-8), 93.
- (13) Troger, H., *Trans. ASME, Ser. E*, 46 (1979), 468.
- (14) Hsu, C. S., *Trans. ASME, Ser. E*, 47 (1980), 931.
- (15) Holmes, P. J., *SIAM J. Appl. Math.*, 38-1 (1980), 65.
- (16) 古屋・南雲, 非線形振動論, 岩波書店 (昭 32), 54.
- (17) 文献 (11) のページ 196, 213.
- (18) Halanay, A., *Differential Equation Stability, Oscillations, Time lags*. (加藤訳), 微分方程式 (下), 吉岡書店 (昭 44), 587.
- (19) Grafton, R. B., *Delay and Functional Differential Equations and Their Application*, Academic Press (1972), 321.
- (20) 津田ほか 3 名, 機論 C, 50-458 (昭 59), 1948.
- (21) 井上, 機械力学, 理工学社 (昭 57), 100.

討 論

〔質問〕 佐藤 秀紀〔金沢大学工学部〕

時間遅れをともなう強制自励系の興味深いご研究に敬意を表す。

(1) 解の安定, 不安定の境界 (例えば図1において) が解のなめらかな曲線上に存在しているが, 時間遅れのない場合のように, 解曲線の振幅軸に平行な接線の接点で起こらないのはどのような理由によるのか。

(2) 概周期運動の存在の有無についての解析的 (数式的) 評価は可能なものか。

〔回答〕 (1) 一自由度系に限って述べると, 時間遅れのない漸硬ばね特性を有する系については確かにご指摘のようなことが言えそうである。しかし, 漸軟ばね特性を有する系では一自由度系でも必ずしも垂

直接線を与える点が安定限界に対応するものではない (付1) (付2) ことが多く見受けられ, 時間遅れの有無にかかわらず, 安定限界はご指摘のような固定的なものではないように考える。

(2) 非常に難しいご質問で回答になるかどうか分からないが, 例えば文献(4), (18)に考察の対象とした形の系の概周期解の存在性に関連した諸定理が述べられているようであるが, 具体的に与えられた個々の問題において陽な形で求める方法があるとしても非常に困難かと思う。今後の検討課題にさせていただきたいと思う。

(付1) 津田・ほか4名, 機論, 50-458, C(昭59), 1948.

(付2) 田村・ほか3名, 機講論, No. 847-2(昭59-11), 82.