外周上の2箇所に摩擦力が作用する円板の自励振動* (分布摩擦力を受ける内部共振のない円板)

末岡 淳男**, 吉武 裕**
田村 英之**, 高山 佳久***

Self-Excited Vibration of a Circular Plate Subjected to Frictional Forces Exerted in Two Regions on Its Outer Circumference (A Case of a Circular Plate Subjected to Distributed Frictional Forces without the Effect of Internal Resonances)

by Atsuo SUEOKA, Yutaka YOSHITAKE,
Hideyuki TAMURA, and Yoshihisa TAKAYAMA

This paper deals with the self-excited vibration of a Mindlin circular plate subjected to distributed frictional forces as a function of relative slip velocity in two regions on its outer circumference. However, the effect of the internal resonances is not considered here. It is derived from the averaging method that there exist two stable steady-state solutions of single mode with different spatial location with respect to two frictional regions. The stable solutions become, in general, unstable as the distributed regions widen, but, on the other hand, the stable self-excited vibrations due to the distributed frictions occur anew. However, within a certain length of the distributed regions, the self-excited vibration characteristic has the same tendency as the one due to the concentrated frictional forces at two points, which was dealt with in the previous paper.

Key Words: Vibration, Self-Excited Vibration, Frictional Vibration, Vibration of Circular Plate, Averaging Method

1. 緒 言

前報⁽¹⁾⁽²⁾において、車輪踏面ブレーキやドラムブレーキなどのようなブレーキ板の外周上の2箇所で摩擦力が作用する鳴き機構の基礎研究として、円板の外周上の2点に集中摩擦力が作用する場合の自励振動を、摩擦特性が負のこう配をもつ相対すべり速度の関数として解析を行い、2摩擦点間の角度と発生モードの関係など、種々の特性を明らかにするとともに、実験と比較し、良好な定性的一致を確認した。

しかし、実際のブレーキでは、ブレーキシューと車輪またはドラムが点ではなく、ある外周上の円弧長さで接触している。そのような場合の自励振動発生機構を解明することは、実際のブレーキの鳴きの現象に近づく意味で重要である。本報では、この点に注目した基礎的研究として、また、前報⁽¹⁾の2点集中摩擦の結果との比較を行うために、図1に示す外周上の2箇所のある円弧長さに、一様に分布した法線方向の押付荷重が作用する円板の自励振動を解析した。その際、円板は車輪などの厚板円板を対象とする関係上、Mindlin

リン円板とし、内部共振の影響はないものとした。

数値計算の結果、分布荷重の各中心間の角度および円弧長さと発生モードの相対的位置関係、分布荷重による自励振動の不安定化などが明らかになった。

2. 理論解析

図1に示すような円板の内周($r=r_0$)が固定、外周($r=R$)が自由の N 段段付円板の外周上の2箇所に分布した軸方向の摩擦力 q_1, q_2 が作用する系の内側から j 番めリングに対する運動方程式は次式となる。

図1 解析モデル

* 昭和60年11月20日 関西支部第245回講演会において講演，原稿受付 昭和60年4月24日。

** 正員，九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*** 正員，(株)東芝(〒105 東京都港区芝浦1-1-1)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{M_r^j - M_{\theta}^j}{r} - Q_r^j &= \frac{\rho h_j^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_r^j}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{r\theta}^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}^j}{r} - Q_{\theta}^j &= \frac{\rho h_j^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_{\theta}^j}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_r^j}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\theta}^j}{\partial \theta} + \frac{Q_r^j}{r} &= \rho h_j \frac{\partial^2 w^j}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^2 q_i(\theta, t) \frac{\delta(r-R)}{r} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに (r, θ) : 円筒座標, M_r^j など: モーメント, Q_r^j など: せん断力, $w^j, \phi_r^j, \phi_{\theta}^j$: 変位と角変位⁽¹⁾, h_j : 板厚, t : 時間, ρ : 密度. 式(1)第3式右辺の摩擦係数 q_i は外周上に分布しているため, 角度 θ の関数である. 式(1)の解を次のように仮定する⁽¹⁾.

$$\begin{aligned} \phi_r^j &= \sum_{ms} \bar{\phi}_{r,ms}^j (C_{ms} \cos m\theta + D_{ms} \sin m\theta) \\ \phi_{\theta}^j &= \sum_{ms} \bar{\phi}_{\theta,ms}^j (C_{ms} \sin m\theta - D_{ms} \cos m\theta) \\ w^j &= \sum_{ms} \bar{w}_{ms}^j (C_{ms} \cos m\theta + D_{ms} \sin m\theta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに, 記号 $\sum_{ms}$ は添字 $m, s=0, \dots, \infty$ に対する二重総和を表し, C_{ms}, D_{ms} は未定の時間関数, $\bar{\phi}_{r,ms}^j, \bar{\phi}_{\theta,ms}^j, \bar{w}_{ms}^j$ は j 番めリング内の (m, s) モードの固有円振動数 ω_{ms} に対する各変位のモード形状関数で半径方向座標 r のみの関数⁽¹⁾, m は節直径数 ($=0, 1, \dots$), s は節円数 ($=0, 1, \dots$) である.

式(2)を式(1)に代入し, 直交条件式および固有円振動数と固有関数の関係を用いて, 前報と同様に解析を行うと, 次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2\zeta_{ms}\omega_{ms} \frac{d}{dt} + \omega_{ms}^2 \right\} \begin{bmatrix} C_{ms} \\ D_{ms} \end{bmatrix} &= \frac{\bar{w}_{ms}^N(R)}{\rho R^5} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^2 q_i(\theta, t) \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} d\theta \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし, (m, s) モードの固有関数に含まれる積分定数は前報⁽¹⁾式(8)のように正規化されているとする. また, 円板の微小減衰を表すために, 粘性減衰 (減衰比 ζ_{ms}) を仮定し, 式(3)左辺にその項を追加した⁽¹⁾.

各外周上円弧長さ Δ_i にわたって作用する分布摩擦力を次式で表す (図1).

$$q_i(\theta, t) = \bar{P}_i(\theta) \cdot f_i(v_i) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに $i=1, 2$ (以後同様),

$f_i(v_i)$: i 番め分布域での摩擦係数,

$\bar{P}_i(\theta)$: $\theta = \bar{\theta}_i$ を中心として角度 Δ_i の外周上摩擦分布域に働く法線方向分布荷重,

V_i : 摩擦円弧剛体棒の掃引速度で, 分布域内は一定,

v_i : 相対すべり速度 $= V_i - \dot{w}_i(t)$,

$\dot{w}_i(t)$: i 番め分布域での円板速度,

$$= \sum_{ms} \bar{w}_{ms}^N(R) (\dot{C}_{ms} \cos m\theta + \dot{D}_{ms} \sin m\theta)$$

ただし $\bar{\theta}_i - \Delta_i/2 \leq \theta \leq \bar{\theta}_i + \Delta_i/2$, $\bar{\theta}_1 = -\bar{\theta}$, $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}$ (図1).

式(3)より振動中心 C_{ms}^0, D_{ms}^0 を求め, 座標変換

$$C_{ms} = C_{ms}^0 + c_{ms}, D_{ms} = D_{ms}^0 + d_{ms} \quad \dots\dots\dots (5)$$

を行うと, 自励振動の変動成分 c_{ms}, d_{ms} に関する基礎式は次式となる.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2\zeta_{ms}\omega_{ms} \frac{d}{dt} + \omega_{ms}^2 \right\} \begin{bmatrix} c_{ms} \\ d_{ms} \end{bmatrix} &= \alpha_{ms} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^2 \bar{P}_i F_i \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{bmatrix} d\theta \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに $\alpha_{ms} = \bar{w}_{ms}^N(R)/\rho R^5$, $F_i = f_i(v_i) - f_i(V_i)$. F_i は v_i の, よって, θ の関数となる.

一般に, 剛体棒と円板の間に作用する摩擦によって生じる自励振動は, 相互間の摩擦特性が負のこう配をもつ相対速度の関数で表されることに起因する⁽³⁾⁽⁴⁾. ここでは, 前報と同様, それを相対すべり速度の三次多項式で近似する. すなわち

$$f_i(v_i) = e_1^i v_i^3 - e_2^i v_i + e_3^i \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに e_1^i, e_2^i, e_3^i は領域 i に対する摩擦特性を表す適当な定数で, 各分布域内では一定とする.

分布域 i で, $\bar{\theta}_i$ を中心とした一様分布法線方向荷重が作用するとき, 合力 P_i は次式となる.

$$P_i = \bar{P}_i(\theta) \cdot \Delta_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

そのとき, C_{ms}^0, D_{ms}^0 は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} C_{ms}^0 \\ D_{ms}^0 \end{bmatrix} = \frac{\alpha_{ms}}{\omega_{ms}^2} \sum_{i=1}^2 P_i f_i(V_i) \mu_m^i \begin{bmatrix} \cos m\bar{\theta}_i \\ \sin m\bar{\theta}_i \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに

$$\mu_m^i = \begin{cases} 1 & : m\Delta_i = 0 \\ \frac{\sin(m\Delta_i/2)}{(m\Delta_i/2)} & : m\Delta_i \neq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

本報では, 円板には内部共振の影響は存在しないと仮定しているので, 式(6)を平均法を用いて解くために, 解を次のようにおく.

$$c_{ms} = x_{ms} \cos \Theta_{ms}, \dot{c}_{ms} = -\omega_{ms} x_{ms} \sin \Theta_{ms}$$

$$d_{ms} = y_{ms} \cos \Theta_{ms}, \dot{d}_{ms} = -\omega_{ms} y_{ms} \sin \Theta_{ms}$$

$$\dots\dots\dots (11)$$

ここに $\Theta_{ms} = \omega_{ms} t + \varphi_{ms}$. 振幅 x_{ms}, y_{ms} および位相 φ_{ms} は時間に関してゆるやかに変化する関数として, 式(6)と式(11)から次式を得る.

$$\dot{a}_{ms} = -\zeta_{ms}\omega_{ms}a_{ms} - \frac{\alpha_{ms}}{2} \sum_{i=1}^2 H_{ms}^i \equiv A_{ms},$$

$$\dot{b}_{ms} = -\zeta_{ms}\omega_{ms}b_{ms} - \delta_{m0} \frac{\alpha_{ms}}{2} \sum_{i=1}^2 J_{ms}^i \equiv B_{ms},$$

$$\dot{\varphi}_{ms} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに δ_{m0} は Kronecker のデルタであり,

$$a_{ms} = x_{ms}\omega_{ms}, \quad b_{ms} = y_{ms}\omega_{ms} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_m^i &= \cos(m\bar{\theta}_i) \cdot \mu_m^i \\ \sigma_m^i &= \sin(m\bar{\theta}_i) \cdot \mu_m^i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} H_{ms}^i &= P_i \left[\frac{3}{4} e^i \{ \bar{w}_{ms}^N(R) \}^3 \left\{ \frac{1}{8} (\gamma_{4m}^i + 4\gamma_{2m}^i + 3) a_{ms}^3 + \frac{3}{8} (\sigma_{4m}^i + 2\sigma_{2m}^i) a_{ms}^2 b_{ms} + \frac{3}{8} (1 - \gamma_{4m}^i) a_{ms} b_{ms}^2 \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} (-\sigma_{4m}^i + 2\sigma_{2m}^i) b_{ms}^3 \left. \right\} - (e_2^i - 3e_1^i V_i^2) \bar{w}_{ms}^N(R) \left\{ \frac{1}{2} (1 + \gamma_{2m}^i) a_{ms} + \frac{1}{2} \sigma_{2m}^i b_{ms} \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} e^i \bar{w}_{ms}^N(R) \sum_{kl} \{ \bar{w}_{kl}^N(R) \}^2 \left[\frac{1}{8} (2 + 2\gamma_{2k}^i + 2\gamma_{2m}^i + \gamma_{2(k+m)}^i + \gamma_{2(k-m)}^i) a_{kl}^2 + \frac{1}{4} (2\sigma_{2k}^i \right. \\ &\quad + \sigma_{2(k+m)}^i + \sigma_{2(k-m)}^i) a_{kl} b_{kl} + \frac{1}{8} (2 - \gamma_{2(k+m)}^i - \gamma_{2(k-m)}^i - 2\gamma_{2k}^i + 2\gamma_{2m}^i) b_{kl}^2 \left. \right\} a_{ms} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} (2\sigma_{2m}^i + \sigma_{2(k+m)}^i + \sigma_{2(m-k)}^i) a_{kl}^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{2(k+m)}^i - \gamma_{2(k-m)}^i) a_{kl} b_{kl} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} (2\sigma_{2m}^i - \sigma_{2(k+m)}^i + \sigma_{2(k-m)}^i) b_{kl}^2 \right\} b_{ms} \right] \quad \dots\dots\dots (15 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{ms}^i &= P_i \left[\frac{3}{4} e^i \{ \bar{w}_{ms}^N(R) \}^3 \left\{ \frac{1}{8} (\sigma_{4m}^i + 2\sigma_{2m}^i) a_{ms}^3 + \frac{3}{8} (1 - \gamma_{4m}^i) a_{ms}^2 b_{ms} + \frac{3}{8} (-\sigma_{4m}^i + 2\sigma_{2m}^i) a_{ms} b_{ms}^2 \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} (\gamma_{4m}^i - 4\gamma_{2m}^i + 3) b_{ms}^3 \left. \right\} - (e_2^i - 3e_1^i V_i^2) \bar{w}_{ms}^N(R) \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{2m}^i a_{ms} + \frac{1}{2} (1 - \gamma_{2m}^i) b_{ms} \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2} e^i \bar{w}_{ms}^N(R) \sum_{kl} \{ \bar{w}_{kl}^N(R) \}^2 \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} (2\sigma_{2m}^i + \sigma_{2(k+m)}^i + \sigma_{2(m-k)}^i) a_{kl}^2 - \frac{1}{2} (\gamma_{2(k+m)}^i - \gamma_{2(k-m)}^i) a_{kl} b_{kl} \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} (2\sigma_{2m}^i - \sigma_{2(k+m)}^i + \sigma_{2(k-m)}^i) b_{kl}^2 \left. \right\} a_{ms} + \left\{ \frac{1}{8} (2 - \gamma_{2(k+m)}^i - \gamma_{2(m-k)}^i - \gamma_{2m}^i + 2\gamma_{2k}^i) a_{kl}^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} (2\sigma_{2k}^i - \sigma_{2(k+m)}^i + \sigma_{2(m-k)}^i) a_{kl} b_{kl} + \frac{1}{8} (2 - 2\gamma_{2k}^i - 2\gamma_{2m}^i + \gamma_{2(k+m)}^i + \gamma_{2(k-m)}^i) b_{kl}^2 \right\} b_{ms} \right] \quad \dots\dots\dots (15 \cdot b) \end{aligned}$$

また, $\sum_{kl}$ は $k \neq m, l \neq s$ に対する $k, l = 0, \dots, \infty$ の二重総和記号を表す。

式(12)から分布円弧長さ Δ_i の効果は常に式(10)のパラメータ μ_m^i , すなわち $m\Delta_i$ の形で新たに現れたもので, 前報と相異なる点である。また, 分布域中心間の角度の効果は常に $m\bar{\theta}_i$, すなわち $\pm m\bar{\theta}$ の形で現れていることがわかる。

式(12)で $m\Delta_i \rightarrow 0$ の極限では, 式(10)から $\mu_m^i \rightarrow 1$ となり, 前報⁽¹⁾の式(14)に一致する。

式(12)の定常解を a_{ms}, b_{ms} とおくと, それらは次の非線形連立方程式の解である。

$$\begin{cases} A_{ms}(a_{00}, b_{00}, \dots, a_{ms}, b_{ms}, \dots) = 0 \\ B_{ms}(a_{00}, b_{00}, \dots, a_{ms}, b_{ms}, \dots) = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(16)の解を Newton-Raphson 法を用いて求める。 a_{ms}, b_{ms} からの変分を各々 ξ_{ms}, η_{ms} とすると, 式(16)の繰返し計算のための方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} G_{00}^{00} & \dots & G_{ms}^{00} & \dots & G_{\infty\infty}^{00} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{00}^{ms} & \dots & G_{ms}^{ms} & \dots & G_{\infty\infty}^{ms} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{00}^{\infty\infty} & \dots & G_{ms}^{\infty\infty} & \dots & G_{\infty\infty}^{\infty\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{00} \\ \vdots \\ \Delta_{ms} \\ \vdots \\ \Delta_{\infty\infty} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Gamma_{00} \\ \vdots \\ \Gamma_{ms} \\ \vdots \\ \Gamma_{\infty\infty} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$G_{ms}^{kl} = \begin{bmatrix} \partial A_{kl} / \partial a_{ms}, & \partial A_{kl} / \partial b_{ms} \\ \partial B_{kl} / \partial a_{ms}, & \partial B_{kl} / \partial b_{ms} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{ms} = {}^t(\xi_{ms}, \eta_{ms}), \quad \Gamma_{ms} = {}^t(A_{ms}, B_{ms})$$

肩号 t は転置を表す。ある初期値から始め, 式(17)により, 解が収束するまで繰返す。そのようにして求まった定常解の安定性は, 式(17)の係数行列の固有値の実部がすべて負であれば, 解は安定である。

3. 数値計算結果と考察⁽¹⁾

本報では前報⁽¹⁾との比較から, 図2の円板についての数値計算結果を示す。この円板は2点で摩擦力が作用する場合では, 理論的にも, 実験的にも内部共振は存在しなかった。数値計算では, 低次から五つのモードを考慮した。円板の材質は鋼およびポアソン比0.3, $\xi_{ms} = 0.003 = \text{一定}$, $V_1 = V_2 = 0.085 \text{ m/s}$ と仮定した。摩擦特性に対しては前報の2種の内, 負のこう配の大きいほうのみを用いて計算した。すなわち

$$e_1^i = 200 \text{ s}^3/\text{m}^3, \quad e_2^i = 6 \text{ s/m}, \quad e_3^i = 0.7 \quad \dots\dots\dots (18)$$

以下の図中, 太線は2箇所の相対速度がともに全分布域にわたり, 常に正, 細線は1箇所もしくは2箇所での相対速度が局所的にでも負となる場合を示し, 実線は安定, 破線は不安定を表す。図には, はん雑さを

さけるために、安定域のある、または、パラメータの値によっては部分的にでも安定となり得る分枝のみを図示し、その他の安定とはなり得ない分枝は図示していない。また、2分布域が重ならない範囲で分布長さを変化させた。 $\Delta_1 = \Delta_2 = 0^\circ$ が前報の結果に相当する⁽¹⁾。前報⁽¹⁾で $\Delta_i = 0^\circ$ の実・細線はスティック・スリップ現象であることを理論・実験両面から検討した。本報の場合も全分布域にわたり、あるいは、分布域の一部分で相対速度が負となり得る解もあるが、実・太線の延長として、実・細線が発生することを考慮すると〔文献(1)および図 10, 11 参照〕、これらの解は、何らかの形の自励振動であると考えられる。

分布域の全域で相対速度が負になるのは、実・細線

図 2 円板の形状寸法 (単位 mm)

図 3 振動特性 ($\bar{\theta} = 60^\circ$, $P_1 = P_2 = 9.8 \text{ N}$, $\Delta_1 = \Delta_2$)

図 4 振動特性 ($\bar{\theta} = 90^\circ$, $P_1 = P_2 = 9.8 \text{ N}$, $\Delta_1 = \Delta_2$)

のうち、 $\Delta_i \cong 0^\circ$ のごく小さな領域だけに限られる。

(1) はじめに、2 箇所分布域が全く等しい場合を考える。図 3, 4 は $P_1 = P_2 = 9.8 \text{ N}$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ で各々 $\bar{\theta} = 60^\circ$ と $\bar{\theta} = 90^\circ$ の場合の振動特性を示したものである。横軸は分布長さ Δ , 縦軸は速度振幅 a_{ms} , $b_{ms} [\text{s}^{-1}]$ である。このように、 $P_1 = P_2$, $\Delta_1 = \Delta_2$ のときは、点摩擦と同様、二つの分布域間の中心に腹がくるモード ($a_{ms} \neq 0$, $b_{ms} = 0$, 完全 S 形), あるいは節がくるモード ($a_{ms} = 0$, $b_{ms} \neq 0$, 完全 AS 形) となることが

図 5 振動特性 ($\bar{\theta} = 60^\circ$, $P_1 = P_2 = 19.6 \text{ N}$, $\Delta_1 = \Delta_2$)

図 6 振動特性 ($\bar{\theta} = 90^\circ$, $P_1 = P_2 = 19.6 \text{ N}$, $\Delta_1 = \Delta_2$)

わかる。このような発生パターンを完全形とよぶ。前報と同様、単一モードの安定解のみが発生可能である。たとえば、図3の $\Delta=20^\circ$ で(1, 0)完全AS形および(2, 0)完全AS形の発生、図4の $\Delta=175^\circ$ では(1, 0)完全AS形の発生および(1, 0)S形、(2, 0)SとAS形のいずれも不安定解をみることができる。(0, 0)および(3, 0)以上の高次モードには不安定解さえ存在していない。 $\Delta=0^\circ$ から右へのびる解は、前報の点摩擦から分布摩擦への変化を示し、 Δ の大きいほうから左へのびる解や以後の図にみられるような、ある Δ の

図7 振動特性 ($\bar{\theta}=60^\circ$, $P_1=24.5\text{ N}$, $P_2=14.7\text{ N}$, $\Delta_1=\Delta_2$)

図8 振動特性 ($\bar{\theta}=60^\circ$, $\Delta_1=60^\circ$, $P_1=P_2=19.6\text{ N}$)

領域に孤立して存在する解は、分布摩擦のために新たに生じた解を示している。図5, 6に $P_1=P_2=19.6\text{ N}$ の場合の同様の結果を示す。 $\bar{\theta}=90^\circ$ の $\Delta=180^\circ$ では, AS形は同一解となり, 各 a_{ms} , b_{ms} の値は等しい, 以下のことがわかる。

(i) $\Delta=0^\circ$ から右にのびる解は、分布による不安定化の様相を示し、高次モードほど著しい。

(ii) 荷重が大きくなると、上述の右および左にのびる解の重なり程度が大きくなる。図5の(2, 0)のように、荷重が大きくなると、 $\Delta=0^\circ$ で発生していた形のモード (AS形) が、 Δ が大きくなるにつれて不安定となり、左にのびる分枝の中の Δ の大きい所で別の

図9 振動特性 ($\bar{\theta}=90^\circ$, $\Delta_1=60^\circ$, $P_1=P_2=19.6\text{ N}$)

図10 荷重と発生モードの関係 ($\bar{\theta}=60^\circ$)

図11 荷重と発生モードの関係 ($\bar{\theta}=90^\circ$)

形のモード (S 形) が安定化される。図 6 の (2, 0) も同様である。

(iii) ある値以下の Δ に対しては、前報の 2 点集中摩擦の場合と定性的にも定量的にもほとんど変わらないが、その値は節直径数 m に関係する。すなわち、高次モードほど分布摩擦の影響を受けやすい。

(iv) その他、荷重による振動特性の変化は点集中摩擦の場合と同様のことがわかる。

(2) 図 7 では、 $P_1=24.7\text{ N}$, $P_2=14.7\text{ N}$ ($P_1>P_2$), $\Delta_1=\Delta_2=\Delta$ で $\bar{\theta}=60^\circ$ のときの同様の結果である。

(i) $P_1 \neq P_2$ だから、 $a_{ms}b_{ms} \neq 0$ なる解が生じ、 Δ が大きくなるにつれて、二つの分布域の中心に位置していた節や腹が荷重の大きいほうの分布域にできるだけ腹がくるように自動的にずれる。すなわち、できるだけエネルギーが入る位置にまでモードが回転する。

(ii) しかし、(3, 0) は完全形になっている。これは、点摩擦 $\Delta=0^\circ$ で $\bar{\theta}=60^\circ$ のとき、 $P_1 \neq P_2$ でも完全形になる特別な点であり、分布摩擦のときも $\Delta_1=\Delta_2$ ならば、その性質が保持されることを意味する⁽¹⁾。

(iii) 図 7 と同じ荷重で $\bar{\theta}$ のみ 90° にすると、(ii) と同様の理由で、五つのモードとも完全形となり⁽¹⁾、 P_1+P_2 は図 6 と変わらないので結果は図 6 と同一となる。

(iv) Δ が変化しても、ある形 (たとえば S 形) から別の形 (AS 形) への連続的な変化はない。

(3) 図 8, 9 は $P_1=P_2=19.6\text{ N}$, $\Delta_1=60^\circ$ =一定のときの $\bar{\theta}=60^\circ$ および 90° に対する Δ_2 変化の結果である。分布長さ Δ_1 が比較的広いため、分布域内では安定解は相対速度が負となっている。

(i) $\bar{\theta}=60^\circ$ では、 $\Delta_1 \neq \Delta_2$ のため、 $\Delta_2=60^\circ$ および (3, 0) 以外では完全形にはならない。

(ii) $\bar{\theta}=90^\circ$ では、 $\Delta_1 \neq \Delta_2$ にもかかわらず、完全形となっている。

(4) (0, 0) モードは二点に摩擦力が作用する場合と、同一の解となり [$\mu_m^L=1$ 式(10), (12)参照], 本報の摩擦特性、荷重の範囲では定常解は存在しない⁽¹⁾。

(5) 図 10, 11 は $P_1=P_2=P$ で各々 $\bar{\theta}=60^\circ$, $\Delta_1=\Delta_2=30^\circ$ と $\bar{\theta}=90^\circ$, $\Delta_1=\Delta_2=45^\circ$ の荷重による発生モードの変化を示したものである。図示された分布域と中心間角度に対していえば、荷重を増すにつれて、ある荷重以上から (1, 0) AS 形が発生と同時に安定、その後、安定となり得るモードと形が次々と現れてくる。安定性に対するモード間の影響が前報同様示されており、本報のような系の自励振動が単一モードで発生するからといって、そのモードだけを取り出して解析することは安定性の点で問題がある。

(6) 前報⁽¹⁾の直接数値積分法による主モード成分の結果を図 4 の太線に対して丸印で示している。白丸印が安定、黒丸印が不安定解である。

4. 結 言

前報⁽¹⁾の解析の延長として、外周上の 2 箇所に分布摩擦が作用する円板の自励振動を解析し、点摩擦の場合との比較を行った。以下のようにまとめられる。

(1) 摩擦力の分布により、点摩擦で発生していた自励振動は一般に不安定化を呈し、高次モードほどその傾向は顕著である。

(2) 分布摩擦ゆえに新たに発生可能となる自励振動も存在する。

(3) 円弧分布長さの値がある値より小さくなると、2 点摩擦の場合と定性的にも定量的にも差がなくなる。その値は荷重により異なる。

(4) 一般に、2 分布域の荷重や分布長さが異なるときは、円板が自励振動をしやすい方向にモードを自動的に回転させ、分布域間中心には腹または節が生じない。

文 献

- (1) 末岡・ほか 3 名, 機講論, No. 840-11 (昭 59-10), 84.
- (2) 末岡・ほか 3 名, 機講論, No. 840-11 (昭 59-10), 92.
- (3) 中井・ほか 2 名, 機論, 47-423, C (昭 56), 1466.
- (4) 中井・ほか 2 名, 機論, 49-442, C (昭 58), 1001.