結合部におけるヒステリシスループについて*

(境界要素法による解析)

角 張 毅**, 狩 野 正 樹***, 山 中 和 行****

The Hysteresisloop of Fixing Element (An Analysis by Boundary Element Method)

by Takeshi KAKUBARI, Masaki KANO, and Kazuyuki YAMANAKA

There are energylosses when tangential load is applied to fixing element such as a bolt joint. A tangential load-displacement relations makes a hysteresisloop in a fixing element. The hysteresisloop was calculated by boundary element method. In theory three kinds of contact nodes were considered, which are free, stick and slip. From numerical result, stick-slip zone varies with tangential load, and the inclination of hysteresisloop increases and that area decreases as the normal load increases and the tangential load decreases. Theoretical results are qualitatively in good agreement with experimental result in predicting relation between the inclinations or areas and the amplitude of tangential load.

Key Words: Fixing Element, Friction, Structural Analysis, Stiffness, Energyloss, Hysteresisloop, Boundary Element Method

1. 緒 言

工作機械などに存在するボルト結合部は、機械全体の剛性や減衰性に大きな影響を与えるので、結合部の剛性や減衰性を知ることは重要な課題である。これら平面どおしで接触する結合部に接線方向の往復荷重が作用すると、接触面内の微視的局所的すべりのために接線方向の変位と荷重の関係はヒステリシスループを描く。このため一体構造と比べて剛性は低く、減衰性は高くなる。平面どおしで接触する結合部のヒステリシスループに関する研究は従来接触面にあるあらさを考慮したものが多い^{(1)~(3)}。また、接線方向の変位と荷重の関係を解析したものには、Mindlin⁽⁴⁾による球に関するものがある。しかし、実際の結合部に近いなめらかな平面どおしが接触した場合のヒステリシスループを解析した例はほとんどない。本研究では、結合部をなめらかな平面で接触する二つの角柱でモデル化した。この角柱に往復接線荷重が作用した時のヒステリ

シスループを境界要素法で二次元平面ひずみ問題として解析した。最初に解析法の概要を示す。次に解析結果から得られる、接線荷重の負荷に伴うすべり域の変化、ヒステリシスループの傾きであらわされる剛性や面積であらわされる消散エネルギーと垂直荷重や接線荷重振幅の関係、を示す。次に、この解析結果は実験的に求めた接線荷重振幅に対する剛性や消散エネルギーの関係と定性的によい一致をみたので、これらの結果を示す。

2. 解 析 方 法

本解析で用いた二次元問題の境界要素法および接触問題の解法を示す。

2.1 境界要素法⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 線形弾性変形問題の境界要素法の基礎方程式を式(1)に示す。

$$C(x)u_i(x) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(x, y) u_j(y) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y) p_j(y) d\Gamma \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)から式(3)まで繰返される指標については総和をとる。 $p_{ij}^*(x, y)$, $u_{ij}^*(x, y)$ は図1において x 点に i 方向単位集中荷重が作用した時の y 点の j 方向の表面力および変位である。 $u_i(y)$, $p_i(y)$ は y 点における

* 昭和60年10月2日 第63期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月31日。

** 正員、東京理科大学工学部 (〒162 東京都新宿区神楽坂1-3)。

*** 正員、東京理科大学大学院。

**** 学生員、東京理科大学大学院。

実際の変位と表面力である。係数 $C(x)$ は剛体変位の条件より定まる。平面ひずみ問題の場合の p_{ij}^* を式(2), u_{ij}^* を式(3)に示す。

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + \frac{r_i}{r} \frac{r_j}{r} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[n_k \frac{r_k}{r} \left\{ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{r_i}{r} \frac{r_j}{r} \right\} - (1-2\nu) \frac{r_i}{r} n_j - \frac{r_j}{r} n_i \right] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし, G : 横弾性係数, ν : ポアソン比, r : x 点と y 点間の距離, n_i : y 点で表面に垂直な外向き単位ベクトルの i 方向成分である。

境界 Γ を要素分割し, 要素内での p および u の変化を仮定し節点値で表して式(1)を離散化する。本解析では両者とも線形変化を仮定した。 M 個の節点がある場合すべての節点に, 1 方向, 2 方向の単位集中荷重を作用させることにより, $2M$ 個の方程式が成立する。これに対し節点値は一つの節点につき, p_1, p_2, u_1, u_2 の 4 個であり, 普通境界条件からこのうち 2 個の接点値が与えられる。したがって未知節点値は合計 $2M$ 個となり, 式を解くことができる。

2.2 接触問題について⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾ 接触問題の解法は増分法による。変数 u に対し, Δu を増分値, u_0 を前増分までの和とする。現在の値 $u = u_0 + \Delta u$ となる。

接触状態には, 自由, 固着, すべり, の三つがあるそれぞれの状態に対し式(4)から式(11)が満足されなければならない。ただし接触面は水平で全体座標系で示してある。添字 a は下側の物体に関する値, b は上側の物体に関するものである(図2)。

自由の場合:

$$\left. \begin{aligned} p_{1a} + p_{1b} &= 0, & p_{2a} + p_{2b} &= 0 \\ p_{1a} &= 0, & p_{2a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$u_{2b} - u_{2a} + d \geq 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

固着の場合:

$$\left. \begin{aligned} p_{1a} + p_{1b} &= 0, & p_{2a} + p_{2b} &= 0 \\ \Delta u_{1a} &= \Delta u_{1b}, & u_{2b} - u_{2a} + d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$p_{2a} < 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$|p_{1a}| < -f p_{2a} \quad \dots\dots\dots (8)$$

すべりの場合:

$$\left. \begin{aligned} p_{1a} + p_{1b} &= 0, & p_{2a} + p_{2b} &= 0 \\ p_{1a} &= -\textcircled{f} p_{2a}, & u_{2b} - u_{2a} + d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$p_{2a} < 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$(\Delta u_{1b} - \Delta u_{1a}) p_{1a} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで, d は計算前の物体 a - b 間のすきま, f は摩擦係数, $\textcircled{f} = \pm f$, である。

2.3 計算方法について ここでは節点値が接触状態を満足するようにした。一つの接触節点について 2 個の節点があるので節点値は 8 個である。これに対し境界要素方程式は 4 個である。接触状態を仮定すれば式(4), (6), (9)のうちのどれかから式が 4 個定まる。したがって計 8 個の式が成立するので 8 個の節点値を定めることができる。

正しい接触状態は各増分段階ごとに増分内繰返し計算を行って決めなければならない。これは以下のように行う。

(1) 接触状態を仮定する。すべりを仮定する接触節点は $\textcircled{f}$ の正負も仮定する。

(2) 境界条件のわかっている節点についてはそれらの条件, 接触節点については仮定した接触状態に従いそれぞれ式(4), (6), (9)のうちのどれか一つを代入して連立方程式を組み立てる。

(3) 方程式を解く。それぞれの接触節点について以下の方法で仮定した接触状態が正しいか否かの判定を行う。正しくない場合のあらたな仮定もする。

(i) 自由を仮定した接触節点:

式(5)を満足すれば仮定は正しい。満足しない時のあらたな仮定は固着。

図1 記号の説明図

図2 接触問題

(ii) 固着を仮定した接触節点:

式(7), (8)を満足していれば仮定は正しい. 式(7)を満足し式(8)を満足しなければあらたな仮定は⑦の正負を p_{1a} の正負と同じくしてすべり. 式(7)を満足しなければあらたな仮定は自由.

(iii) すべりを仮定した接触節点:

式(10), (11)を満足すれば仮定は正しい. 式(10)を満足し, 式(11)を満足しなければあらたな仮定は固着. 式(10)を満足しなければあらたな仮定は自由.

(4) すべての接触節点について接触状態の仮定が正しくなるまで(2)以下を繰返す. 正しくなれば増分内の繰返しを終える.

3. 解析モデルと結果

図3に解析モデルを示す. 下側の物体の底面は1方向, 2方向とも固定である. 上側の物体の上面に図示のような一様分布荷重 p_2 を負荷した後接線方向荷重 p_1 を負荷する. $G=79.2\text{ MPa}$, $\nu=0.3$, $f=0.35$ として計算した. 以下の本文および図中において P ; 垂直荷重(p_2 の積分値), F ; 接線方向荷重(p_1 の積分値), F^* ; F の振幅, δ ; 上側の物体のC点の1方向変位, である. W, T は荷重の基本単位で $W=15.7\text{ N/mm}$, $T=5.44\text{ N/mm}$ である. また, $fW=5.49\text{ N/mm}$ である.

図4, 5にヒステリシスループの位置(○で囲んだ番号)とすべり域の関係を示す. 図4(b), 5(b)中の矢印は上の物体の下の物体に対する相対すべりの向きであり, 右向きが正の向きである. 図4(a), (b)は垂直荷重負荷後初めて接線方向荷重を負荷した過渡時のものである. 図示のように垂直荷重のみ負荷した場合接触部両端において互いに逆向きのすべりを生ずる. そして接線荷重を負荷すると, 最初非対称のすべり域を生ずる. 図4(b)の場合最初の繰返し後にはすべり

域は対称となり以後この状態を繰返す. ヒステリシスループは最初接線荷重を負荷した向きに移動し, 数回の繰返しの間非定常の状態が続く. そして中心は原点からずれた状態で定常になる.

図5(a), (b)に定常状態でのヒステリシスループならびにすべり域を示す.

図6に定常状態での上の物体の接触面表面力を示す. ○で囲んだ番号は図5と対応している. 接触端部での p_1 の変化が激しいので外側からすべり域の浸入することがわかる.

図7に P を一定として F^* を変化させた時のヒステリシスループの違いを示す. P が同じ時, F^* が大きくなると剛性が低くなり, 消散エネルギーは増加することがわかる(接線荷重の振幅)/(接線変位の振幅)を剛性, ヒステリシスループの面積を消散エネルギーと定義する.

図8に F^* に対する剛性, 図9には消散エネルギーを示す. どちらもパラメータは P である. P が一定なら F^* が大きいほど, また, F^* が一定なら P が小さいほ

(a) 初期のヒステリシスループ

(b) 初期のすべり域

図4

図3 解析モデル

(a) 定常状態でのヒステリシスループ

(b) 定常状態でのすべり域

図 5

図 6 定常状態での表面力分布

ど剛性が低くなり消散エネルギーが大きくなることわかる。

4. 実験装置および実験方法

接線方向荷重振幅と、剛性および消散エネルギーの定性的な関係を確認するため、以下のような実験を行った。

図 10 に実験装置の全体図を示す。水タンク⑥内の水を増減させることによりスライダ①に往復接線荷重を負荷した。周期は最大で約 90 s である。接線方向変位をうず電流式非接触変位計③、接線荷重をロードセル⑤で測定した。変位計の出力を X-Y レコーダの X 軸、ロードセルの出力を Y 軸に入力してヒステリシスループを描いた。垂直荷重はスライダの自重 (1.25 N)

図 7 F^* の違いによるヒステリシスループの違い

図 8 剛性

のみである。接触圧力は 9790 Pa である。

図 11 にテストセクションの拡大図を示す。スライダ①の運動方向を 1 方向とするため、スライダを台形、ステータ②を V ブロック形にして斜面で接触させた。接触面はスライダの運動方向両端部に凸部を設け、計 4 箇所の長方形接触面とした。接触面積は総計 180 mm^2 である。材質は、スライダ、ステータともに S 45 C である。

接触面の仕上げは次のように行った。

- (1) スライダとステータの良好な当たりを得るためすり合わせラッピングを行う。
- (2) 接触面個々の平坦度ならびに方向性のない

あらさを得るため個々別々にラッピングを行う。

以上(1), (2)を $R_{\max}$ が $0.2 \mu\text{m}$ 以下になるまで交互に繰返した。

5. 実験結果と理論との比較

図 12 に実験から求めたヒステリシスループの一例を示す。中心を一致させて描いてある。本実験における摩擦係数は平均 0.56 であった。

図 13 に接線荷重振幅に対する剛性、図 14 には消散エネルギーを示す。理論値は図 3 のモデルについて解析したものであり、摩擦係数を 0.56 とした。比較のため理論値、実験値とも単位接触面積当たりの値に換算している。接線荷重振幅が増加すると剛性が減少し、消散エネルギーは増加することがわかる。定量的な違いは、モデルが異なるためである。

図 9 消散エネルギー

図 11 テストセクション

図 10 実験装置全体図

図 12 ヒステリシスループ

図 13 剛性

図 14 消散エネルギー

6. 結 言

なめらかな平面とおして接触する結合部に往復接線荷重を負荷した時の変位と荷重の関係（ヒステリシスループ）を境界要素法を用いて解析する方法を示し、それを実験結果と比較した。その結果次のことがわかった。

(1) 接触面内のすべり域には、初期の過渡状態と繰返し数が増えてからの定常状態とがある。

(2) 垂直荷重が大きくなるほど、あるいは接線荷重の振幅が小さくなるほど、結合部の剛性は大きくなり消散エネルギーは小さくなる。

(3) 接線荷重振幅が増加すると、剛性は小さくな

り消散エネルギーは大きくなることを実験的にも確かめた。

文 献

- (1) 小泉・ほか2名, 精密機械, 45-9, (昭54), 1107.
- (2) 久門・ほか2名, 機論, 47-420, C (昭56), 1037.
- (3) Rogers, R. F. and Boothroyd, G., *Trans. ASME, Ser. B*, 97-3 (1975), 1087.
- (4) Mindlin, R. D., ほか3名, *Proc. Cong. Appl. Mech.*, (1951), 203.
- (5) Brebbia, C. A. and Walker, S. (神谷・ほか2名訳), 境界要素法入門, (昭55), 129, 培風館.
- (6) 田中(正)・田中(喜), 境界要素法基礎と応用驚津監修, (昭57), 69, 丸善.
- (7) 薦・山地, 機誌, 76-651 (昭48), 40.
- (8) 薦・山地, 日本機械学会関西支部第110回講習会「境界要素法教材」, (昭58), 40.

討 論

〔質問〕 清水 泰 洋

〔(株)神戸製鋼所機械研究所〕

(1) 各増分ステップで、接触状態を決めるための収束計算をされているが、その収束加速のための許容値の設定についてお聞きしたい。

増分後の接触状態が接触条件式(4)～(11)に示されるような理想的な状態になることは、通常、まず、あり得ないと思われるので、何らかの形の収束のための許容値 ϵ_0 を導入されていると思う。 ϵ_0 が小さいと発散あるいは計算時間の増大が考えられ、大きいと解析精

度に影響を及ぼすと思われるが、その値をどのように決められたか。

(2) 図3の解析モデルについては、従来より数多くの人によって解析されているが、解析法の妥当性のチェックはどのようになされたのか。

(3) 図3のような結合部においては、一般に、図6に示されるように端部に応力集中部があらわれるが、通常、このピーク応力は塑性域に達するものと思われる。弾塑性問題を弾性問題で近似して、接触問題の場合、どの程度まで、近似できるのかご教示願いた

い。

〔回答〕 (1) 実際の判定条件は $u_{2b} - u_{2a} + d \geq -\varepsilon_u$, $p_{2a} < \varepsilon_p$, $|p_{1a}| + f p_{2a} < \varepsilon_p$, $(\Delta u_{1b} - \Delta u_{1a}) \times p_{1a} / |p_{1a}| \geq -\varepsilon_u$ とおいた。 ε_p = 平均接触圧力の 0.1%, $\varepsilon_u = \varepsilon_p / \text{横弾性係数}$, を目安にした。本解析では $\varepsilon_u = 10^{-10}$ mm, $\varepsilon_p = 9.8 \times 10^{-5}$ N/mm² とおいた。

ε の値は増分量の決め方とともに問題となる。具体的な解析はしていないが以下に示す方法で最適な増分量が決定でき ε をなくすことも可能と考える。

ある段階終了時に自由状態であった接触点においては $u_{2b0} - u_{2a0} + d = s_0 (\geq 0)$ である。仮の増分 ΔL を与えた時の増分後の値を $u_{2b} - u_{2a} + d = s$ とおく。 $s \geq 0$ であれば自由状態を維持しているが $s < 0$ の時は途中で固着かすべりに入ったものと考えられる。この時 $r = s_0 / (s_0 - s)$ とおけば $r \Delta L$ の間は自由状態を維持している。同様の考察により接触状態の変化するすべての接触点について前段階終了時の状態を維持している区間 r を求める。これらの中の最小値を $r_{\min}$ とおけば $r_{\min} \Delta L$ の間は接触状態の変化がないのでこれを現段階における真の増分とする。仮の増分は任意の量でよい。接触状態が変化するまでを増分区間とするため ε による誤差が消去できるものと考えている。

(2) 本文中で述べたように本報は薦らの示した接触問題の解法をヒステリシスループの解析に適用したものである。解析方法は妥当なものと考え有限要素法など他の解法との比較検討は行っていない。

(3) 弾塑性問題としての解析は行っていないので不明である。同様のモデルによる塑性域の解析例が文

献(付1)に示されているので参照されたい。

〔質問〕 小 泉 忠 由〔東京工業大学〕

すべり出し変位の発生機構（あるいはエネルギー損失の原因）を明らかにしようと考えているのか。結言の内容自体はあたりまえの結果となっており、研究目的が良く分からないのでお教え願いたい。

785 ページ右欄 14 行め「定量的な違いはモデルが異なるためである」と記しているが、もう少し詳しくご説明願いたい。

〔回答〕 本研究の目的は、往復接線荷重が作用する結合部において接触面内に固着域とすべり域が存在し接線荷重の大きさにより固着域とすべり域の範囲が変化すること、その結果接線力と変位の関係からヒステリシスループが描かれエネルギー損失と剛性が得られることを明らかにすることである。したがってご意見のとおりすべり出し変位の発生機構（あるいはその結果として起こるエネルギー損失の原因）を明らかにしようと考えているものである。

定量的な違いの理由としては本論文で述べた原因のほかに、実際の真実接触面積は見かけの接触面積と比べ極めて少ないのに対し解析においては見かけの接触面積全域が接触していると仮定しているからであると考えている。このため剛性については解析結果の値が大きくなり消散エネルギーについても違いがでたものと思われる。

(付1) 薦・山地, 日本機械学会関西支部第130回講習会, 境界要素法教材, (昭60), 68.