ボルト締結された円形フランジの剛性に関する研究*

木村 弘之**, 村田 幸一**

A Study of the Flexural Rigidity of Annular Flanged Connections

by Hiroyuki KIMURA and Kouichi MURATA

In order to analyze the vibration of a structure whose elements are connected with bolts, it is necessary to estimate the flexural rigidity of bolted connections: But, although a few papers have reported studies of flexural rigidity, it remains to establish a calculation method for flexural rigidity. This paper deals with a calculation method to estimate the flexural rigidity of bolted annular flanged connections subjected to an external bending moment. In the analysis, models for estimating the flexural rigidity K_b of bolts, and of annular flanges K_f are proposed, taking account of the dispersiveness of bolt disposition. Thus, a calculation method for obtaining whole flexural rigidity of bolted flanged connections is proposed, using the values of K_b and K_f . For verification, experiments are performed under several conditions. Calculated results are in a fairly good agreement with experimental ones.

Key Words: Fixing Element, Bolted Joint, Annular Flange, External Bending Moment, Flexural Rigidity

1. 緒 言

機械構造物の締結方法としてボルトが多用されている。構造物の振動解析を行う場合にボルト締結部の剛性が系全体の振動特性に及ぼす影響は大きい、このボルト締結部の影響を考慮した研究は少ないようであり、その解析手法は確立されているとはいえない。

従来、ボルト締結部に曲げモーメントが作用する場合の挙動についてはいくつかの研究⁽¹⁾⁽²⁾がなされているが、これらの研究は主にボルト軸力に注目しておりボルト締結部の曲げ剛性についてはあまり検討されていないようである。また、円形フランジの剛性についても、いくつかの研究^{(3)~(5)}がなされている。しかし、これらの研究では、ボルト軸力が円環状に様に分布⁽³⁾しているとして解析されるなど、ボルトが円周上に離散的に締結されることが剛性に及ぼす影響について十分考慮されていない。

そこで本研究では、ボルト締結された円形フランジに曲げモーメントが作用する場合の曲げ剛性を評価する際に離散的なボルト締結を考慮した解析モデルを考

え、このモデルを用いてボルトおよびフランジの剛性を算出し、さらに締結部全体の剛性を計算する方法を示している。この結果を確かめるために実験を行い、両結果がかなりよく一致することを示した。

2. 理論解析

2.1 ボルトの剛性

2.1.1 接合面が完全に接触している場合 図1は $x-x'$ 面に曲げモーメント M が作用する N 本のボルトで等ピッチに締結された円形フランジを示す。 a, b, c はそれぞれフランジ接触面の内半径, 外半径, ボルト中心円の半径である。円形フランジの曲げ剛性評価のためのモデルを図2に示す。ただし、図2では $y-y'$ 軸からの距離を明確にするため、同一円周上に配置されたボルト位置を $x-x'$ 軸上に投影している。ここで、 i 番めのボルト中心の x 座標を x_i , ボルト中心と原点 o とを結ぶ直線が ox 軸となす角を θ_i とすると $x_i = c \cdot \cos \theta_i$ となる。また曲げの中立軸とフランジの中心線 $y-y'$ 軸とは必ずしも一致しない⁽¹⁾⁽²⁾ ため、この距離を e と表す。ボルト締結部の曲げ剛性の解析に用いた仮定を以下に示す。

- (1) ボルトは引張ばねとする。
- (2) 曲げモーメントが作用するときフランジの接

* 昭和60年10月26日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和60年4月9日。

** 正員、(株)東芝 (〒210 川崎市川崎区浮島町2-1)。

合面の圧縮側には直線分布⁽²⁾の圧縮力が生じる。すなわち

$$p(x) = p_m(x-e)/(b-e) \quad \dots\dots\dots (1)$$

(3) 各ボルトの伸び δ_i は直線的に分布する。

$$\delta_i = \delta_1(-x_i+e)/(c+e) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (2)$$

(4) フランジ接合面は完全に接触している。

(5) 計算を簡略化するため、曲げの中立軸とフランジの中心線とが一致する。すなわち、

$$e=0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

以上の仮定に基づいて、曲げ剛性を求める計算式を誘導する。まず、曲げモーメントのつり合い条件より式(4)が、力のつり合い条件より式(5)が成り立つ。

$$M = \sum_{i=1}^n (B_i - C_i)(-x_i + e) + \iint_S p(x) \cdot (x - e) dS \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (B_i - C_i) = \iint_S p(x) dS \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$B_i = B_0 + \gamma_b \cdot \delta_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$C_i = B_0 - \gamma_c \cdot \delta_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

M : 接合面に働く曲げモーメント

S : 圧縮力が働く領域 ($x > e$)

B_0 : ボルトの初期締付力

B_i, C_i : ボルトの軸力およびフランジの圧縮力

γ_b, γ_c : ボルトのばね定数およびフランジのばね定数

図1 曲げモーメントが作用するボルト締結された円形フランジ

n : 引張力の生じるボルトの本数

式(4)および式(5)に式(1)~(3), (6), (7)および $x_i = c \cdot \cos \theta_i$ の関係を代入し、整理することにより次式が得られる。

$$M = K_{b1} \cdot \theta_b \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\theta_b = \delta_1/(2c)$ はボルト番号1の変位で代表させたフランジ面の角度変化であり、 K_{b1} は次式で表される。

$$K_{b1} = \left\{ c \cdot \sum_{i=1}^n \cos^2 \theta_i - \frac{3\pi(b^4 - a^4)}{16(b^3 - a^3)} \cdot \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right\} \times (\gamma_b + \gamma_c) \cdot 2 \cdot c \quad \dots\dots\dots (9)$$

2・1・2 接合面の一部が分離している場合 さらに曲げモーメントが増大すると、接合面の一部が分離する。接合面の一部が分離している場合の解析モデルを図3に示す。この状態からの曲げモーメント、ボルト軸力、圧縮力がそれぞれ $\Delta M, \Delta B_i, \Delta p(x)$ だけ変化する状態を考える。この場合の解析に用いた仮定を以下に示す。

(1)~(3)(5) : 2・1・1項と同じ。ただし、式(1)および(2)に対応する式は次式で表される。

$$\Delta p(x) = \Delta p_m(x-e)/(b-e) \quad \dots\dots\dots (1)'$$

$$\Delta \delta_i = \Delta \delta_1(-x_i+e)/(c+e) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (2)'$$

(4) 接合面が分離している領域におけるボルト軸力の増分 ΔB_i は正とする。

以上の仮定に基づいて曲げ剛性を求める式を誘導す

図2 解析モデル (接合面が完全に接触している場合)

図3 解析モデル (接合面の一部が分離している場合)

る。曲げモーメントおよび力のつり合い条件より次式が成り立つ。

$$\Delta M = \sum_{i=1}^N \Delta B_i (-x_i + e) + \iint_S \Delta p(x) \cdot (x - e) dS \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\sum_{i=1}^N \Delta B_i = \iint_S \Delta p(x) dS \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、

$$\Delta B_i = \gamma_b \cdot \Delta \delta_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(10)および式(11)に式(1)', (2)', (3)および式(12)を代入して整理することにより次式が得られる。

$$K_{b2} = \frac{\Delta M}{\Delta \theta} = \left\{ c \cdot \sum_{i=1}^N \cos^2 \theta_i - \frac{3\pi(b^4 - a^4)}{16(b^3 - a^3)} \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \right\} \gamma_b \cdot 2 \cdot c \quad \dots\dots\dots (13)$$

したがって、接合面の一部が分離している場合の曲げモーメントとフランジの角度変化との関係は、次式で表すことができる。

$$M = K_{b2} \cdot \theta_b + M_0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 M_0 は接合面が $x = -c$ から $x = 0$ まで分離するのに要する曲げモーメントを表し、 $x = 0$ の軸に対する各ボルト軸力による曲げモーメントの総和と考え次式で与える。

$$M_0 = -c \cdot B_0 \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

2.2 フランジの剛性 ボルト締結された円形フランジの剛性を、図4に示されるように外周上を等間隔に N 点で支持され、さらにタンクによるフランジの変位拘束の影響を考慮するため内部に同心円状の剛体部分を有する円板モデルを用いて解析する。曲げモーメント M が $x-x'$ 面に作用する場合について考える。ここで、 c, d, θ_0 はそれぞれ、ボルト中心円の半径、フランジの内半径、原点 o と1番めのボルト中心とを結ぶ直線が $o x$ 軸となす角である。薄板の曲げ理論⁽⁶⁾より、円板のたわみの微分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta w &= \frac{q}{D} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 w はたわみ、 q は単位面積当たりの荷重であり、また D は次式で表される曲げ剛性である。

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 h は板厚である。式(16)の一般解は、特殊解 w_0 と同次方程式の一般解 w_1 との和によって、式(18)で表される。

$$w = w_0 + w_1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

特殊解として、周辺単純支持円板の解⁽⁶⁾

図4 点支持された円板

$$w_0 = \frac{M \cdot c}{8\pi D \{(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4\}} \left[\{(1+\nu) + (1-\nu)\beta^2\} \rho^3 - (1+\nu)(1-\beta^2)^2 \rho \right. \\ \left. - 2\{(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4\} \rho \ln \rho + \beta^2 \{(1+\nu)\beta^2 - (3+\nu)\} \rho^{-1} \right] \cos \theta \quad \dots\dots (19)$$

を用いる。ここで、 $\rho = r/c, \beta = d/c$

対称性を考慮すると一般解は、次式で表される。

$$w = w_0 + \frac{M \cdot c}{2\pi D} \left[(A_1 \rho + B_1 \rho^3 + C_1 \rho^{-1} + D_1 \rho \ln \rho) \cos \theta + \sum_{m=2}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m} + C_m \rho^{m+2} + D_m \rho^{-m+2}) \cos m\theta \right] \quad \dots\dots (20)$$

各係数を決定するために以下の条件を用いる。

(1) 周辺における曲げモーメントのつり合い

$$(M_r)_{\rho=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (21)$$

(2) 周辺における力のつり合い

支持点の各反力 R_i をフーリエ級数展開⁽⁷⁾し重ね合わせる。これが円板のたわみによるせん断力 V_r とつり合うから、

$$(V_r)_{\rho=1} = - \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{\pi c} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right) \quad \dots\dots (22)$$

(3) 支持点における変位

原点 o と i 番めのボルト中心とを結ぶ直線が $o x$ 軸となす角を γ_i とすると、

$$w(\rho=1, \theta=\gamma_i) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

(4) $\rho = \beta$ におけるたわみ角

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{\rho=\beta} = \left(\frac{w}{r} \right)_{\rho=\beta} \quad \dots\dots\dots (24)$$

(5) $\rho = \beta$ における変位

$$(w)_{\rho=\beta} \propto \cos \theta \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(20)~(24)から各係数が決まり、一般解が得られる。 $\theta_0 = 0, \pi/N$ の場合の結果を示す。

$$w = w_0 + \frac{M \cdot c}{2\pi D} \left[- \sum_{m=\pm 1(\text{mod } N)}^{\infty} (A_m + B_m + C_m + D_m) \rho \cdot \cos \theta + \sum_{m=\pm 1(\text{mod } N)}^{\infty} \alpha \cdot (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m} + C_m \rho^{m+2} + D_m \rho^{-m+2}) \cos m\theta \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{\Delta m(m-1)} [- \{ (3+\nu) + (1-\nu)(m-1) \} - \{ (3+\nu) - (1-\nu)(m+1) \} (m-1) \beta^{2m} - (1-\nu) m^2 \beta^{2m+2}] \\
 B_m &= \frac{1}{\Delta m(m+1)} [- \{ (3+\nu) + (1-\nu)(m-1) \} (m+1) \beta^{2m} + (1-\nu) m^2 \beta^{2m+2} + \{ (3+\nu) - (1-\nu)(m+1) \} \beta^{4m}] \\
 C_m &= \frac{1}{\Delta(m+1)} [(1-\nu) + \{ (3+\nu) - (1-\nu)(m+1) \} \beta^{2m-2} + (1-\nu)(m+1) \beta^{2m}] \\
 D_m &= \frac{1}{\Delta(m-1)} [\{ (3+\nu) + (1-\nu)(m-1) \} \beta^{2m-2} - (1-\nu)(m-1) \beta^{2m} + (1-\nu) \beta^{4m}] \\
 \Delta &= (1-\nu)(3+\nu)m + \{ (3+\nu)^2 + (1-\nu)^2(m^2-1) \} m \beta^{2m-2} - 2(1-\nu)^2 m(m^2-1) \beta^{2m} + (1-\nu)^2 m^3 \beta^{2m+2} \\
 &\quad + (1-\nu)(3+\nu)m \beta^{4m}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

ただし, $\sum_{m=\pm 1(\text{mod } N)}^{\infty}$ は, $m = \begin{cases} 3, 5, 7, 9 \cdots & (N=2) \\ N-1, N+1, 2N-1, 2N+1 \cdots lN-1, lN+1 \cdots (N \geq 4) \end{cases}$ についての和を意味し, α は次式で表される.

$$\alpha = \begin{cases} 1 & (\theta_0 = 0) \\ (-1)^l & (\theta_0 = \pi/N) \end{cases} \tag{28}$$

フランジの剛性 K_f は, 次式で表すことができる.

$$K_f = \frac{M \cdot d}{2 \cdot w(\rho = \beta, \theta = 0)} \tag{29}$$

2・3 ボルト締結部全体の剛性 2・1節よりボルトの剛性が, 2・2節よりフランジの剛性が得られた. これらを用いて締結部全体の剛性を次のようにして求める. すなわち, ボルト締結部をボルトとフランジとが直列に接続しているばね系と考えると, ボルト締結

部全体の曲げモーメントと角度変化との関係は次式で表される. ただし, K_{b1}, K_{b2} はそれぞれフランジ接合面が分離する前, 分離した後のボルトの剛性, K_f はフランジの剛性, K_1, K_2 はそれぞれフランジ接合面が分離する前, 分離した後のボルト締結部全体の剛性である.

$$M = \begin{cases} K_1 \cdot \theta & \cdots \cdots \cdots (30) \\ K_2 \cdot \theta + \Delta M & \cdots \cdots \cdots (31) \end{cases}$$

ここで,

$$K_1 = \frac{K_{b1} \cdot K_f}{K_{b1} + K_f}, K_2 = \frac{K_{b2} + K_f}{K_{b2} + K_f}$$

$$\Delta M = \frac{K_f}{K_{b2} + K_f} \cdot M_0$$

このことを図を用いて説明すると, ボルトの剛性と角度 θ_b の関係は図 5 (a) で表され, フランジの剛性と角度 θ_f の関係は図 5 (b) で表される. これらを合成すると図 5 (c) の全体の剛性が得られる.

図 5 ボルト締結部全体の剛性

図 6 供試円形フランジの寸法 (単位 mm)

図 7 実験装置の概要

3. 実験方法

曲げ剛性を求めるために実験に用いた円形フランジの寸法 (供試品 I, II) を図 6 に示す。フランジを $N=16, 8, 4$ 本の等ピッチに配置されたボルトにより均一な初期締付力で締結した後、図 7 に示すように油圧ジャッキにより荷重を加える。このときの荷重の大きさをロードセルにより、タンクの変位を変位計により、ボルト軸力を軸部分にはられたひずみゲージによりそれぞれ検出した。ボルトは市販の M 16 の 4 T ボルトに軸部にひずみゲージをはるための機械加工を施したものを使用した。なおボルト締結部には曲げモーメントだけでなく、せん断力も作用するが変位に及ぼす影響は小さいと考え、解析においてはこの影響は無視した。

4. 結果の比較および考察

4.1 ボルトの剛性 式(8)と式(14)から求めら

図 8 曲げモーメントと角度 θ_b との関係に関する比較 (供試品 I, $B_0=29.4$ kN)

図 9 曲げモーメントと角度 θ_b との関係に関する比較 (供試品 II, $B_0=29.4$ kN)

れる曲げモーメントと、ボルトの変形による角度変化 θ_b との関係に関する計算結果と実験結果との比較を図 8 および図 9 に示す。初期締付力 $B_0=29.4$ kN で、ボルト本数を $N=4, 8, 16$ と変えたときの実験結果は、

図 10 フランジの剛性に及ぼすボルト本数の影響 (計算結果)

図 11 ボルト締結部全体の剛性 (供試品 I, $B_0=29.4$ kN)

図 12 ボルト締結部全体の剛性 (供試品 II, $B_0=29.4$ kN)

解析結果とかなりよく一致していると考えられる。

4.2 フランジの剛性 ボルト本数 N がフランジの剛性に及ぼす影響の計算結果を図 10 に示す。ボルト本数が増すにしたがって周辺単純支持円板の剛性に近づくことがわかる。図 10 に示した計算結果は、曲げモーメントの作用する方向とボルトとの位置関係すなわち θ_0 には依存しない。このことは、式(26)における α の係数 $A_m \rho^m + B_m \rho^{-m} + C_m \rho^{m+2} + D_m \rho^{-m+2}$ が $\rho = \beta$ で 0 となることからわかる。なお、解析にあたってはポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、式(26)の級数の項数は 513 で行い十分収束した。

4.3 ボルト締結部全体の剛性 式(30)および、式(31)から求められる曲げモーメントと角度変化 θ との関係を図 11 および図 12 に示す。供試品 I, II とともに解析結果は実験結果とかなりよく一致していると考えられる。

5. 結 言

本研究は、ボルト締結された円形フランジの曲げ剛性の評価方法を確立する目的で、解析および実験により検討し、以下の結果が得られた。

(1) ボルトの剛性を評価するため、フランジ接合面が完全に接触している場合、接合面の一部が分離している場合について、それぞれ曲げモーメントと角度変化との関係を解析的に示した。

(2) (1)に対応する実験結果は、2 直線で表される解析結果とかなりよく一致し、(1)による解析によ

ってボルトの剛性が実用上かなりよく推定できることが示された。

(3) フランジの剛性を評価するため、周辺を等間隔に点支持された円板に曲げモーメントが作用する場合の変位分布を解析的に求め、ボルト本数が剛性に及ぼす影響について定量的に明らかにした。

(4) ボルト締結部の曲げ剛性の評価方法として、ボルト締結部をボルトとフランジとが直列に接続しているばね系と考え、ボルトの剛性とフランジの剛性からボルト締結部全体の剛性を計算する方法を示した。

(5) (4)による解析結果は、実験結果とかなりよく一致することが示された。

終わりに、本研究を行うにあたって貴重なご教示を賜った山梨大学の沢俊行助教授に感謝の意を表します。

文 献

- (1) Konishi, I. and Yamakawa, S., *Proc. Symp. High Strength Steel its Joints*, (1965-11), 97.
- (2) 浅井・ほか 3 名, 機論, 46-402, A (昭 55), 158.
- (3) 沢・ほか 2 名, 機論, 49-442, C (昭 58), 1092.
- (4) 伊東・ほか 2 名, 機論, 43-367 (昭 52), 1123.
- (5) Pavlov, P. A., *Russ. Eng. J.*, 56-10 (1976), 16.
- (6) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 283-289, McGraw-Hill.
- (7) Bassali, W. A., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53 (1957), 728.

討 論

〔質問〕 萩原正弥

(東京工業大学精密工学研究所)

例えばボルトの本数が 4 本の場合、曲げモーメントの方向とボルトの位置関係の影響はないのか。また奇数本のボルトで締結される場合に対しても同じ解析方法が適用できるのか。

〔回答〕 本報では、ボルトおよびフランジの剛性を計算し、さらに締結部全体の剛性を計算している。フランジの剛性は、本文中 4・2 節で示したように曲げモーメントの作用する方向とボルトの位置関係には影響されない。一方、ボルトの剛性はご指摘のように、

曲げモーメントの作用する方向とボルトの位置関係に影響されると考えられる。式(9)および式(13)に示した解析結果は、ボルト位置の方向に曲げモーメントが作用する場合の剛性を表している。したがって、締結部全体の剛性は曲げモーメントの作用する方向とボルトの位置関係に影響されると考えられる。

また、本報では偶数本のボルトで締結された場合の解析結果を示しており、奇数本のボルトで締結された場合については本解析結果をそのまま適用することはできない。奇数本のボルトで締結された場合については今後の研究課題としたい。