変厚円すい殻の振動*

(第3報, 高次修正理論による解析)

高橋 伸**, 鈴木勝義**, 小沢田 正**

Vibrations of Conical Shells with Variable Thickness (3rd Report, Analysis by the Higher-Order Improved Theory)

by Shin TAKAHASHI, Katsuyoshi SUZUKI, and Tadashi KOSAWADA

A method is presented for solving free vibrations of conical shells with variable thickness. Three components of displacements are assumed to have quadratic expressions of thickness. The characteristic equations are solved by a new method. Frequencies and distributions of displacements and stresses are presented, and the former is compared with the Mirsky method and also a linear approximation method.

Key Words: Vibration, Conical Shell, Thick Shell Theory, Variable Thickness, Exact Solution, Three Dimensional Theory

1. 緒 言

円すい殻の非軸対称振動の研究は Federhofer⁽¹⁾以来多数あり, 著者らの論文⁽²⁾⁽³⁾にも示している。その後 Soldatos ら⁽⁴⁾ Massalas ら⁽⁵⁾ 入江ら⁽⁶⁾の論文がある。前二者はドンネル形の運動方程式をガラーキン法で解き, 後者は古典理論の式を9組の境界条件のもとで解いている。著者らは厚肉円すい殻の振動研究のため, 前回は殻の断面内の任意点の3方向の変位を厚さ方向の座標の一次式と仮定し, 応力ひずみ関係は一つは Mirsky の仮定(以下 Mirsky 法とよぶことにする)に従い, 他は三次元フックの法則(一次近似法とよぶ)を用い振動数を求めた。本論文では変位に厚さ方向の座標の二次式を, 応力ひずみ関係に三次元フックの法則を仮定(二次近似法とよぶ)し, 振動方程式, 境界条件を求めた。ついで前回の結果と比較するため, 厚さが軸方向に直線的に変化する円すい殻の境界条件が固定または自由の場合について, 厳密解, Ritz 法の解を求めた。また変位と応力とを計算し, 種々考察を試みた。特性方程式の解法については新しい便利な計算法を示

している。

2. 振動方程式, 境界条件

厚さの変化する円すい殻の自由振動を考える。円すい殻の中央面の頂点を O, 軸を OC, 半頂角を θ_0 とする。代表的長さを R とし, 中央面上の任意点 P の球座標を (Rx, θ_0, ϕ) , 点 P から中央面に垂直に z だけ離れた点を Q, その座標を $(r, \theta_0 + \phi, \phi)$ とする。点 Q における座標方向の変位を $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}) \sin pt$, また OP, PQ, ϕ 方向の変位を z の二次式に仮定し, $[u_0 + zu_1/R + z^2u_2/R^2, w_0 + zw_1/R + z^2w_2/R^2, v_0 + zv_1/R + z^2v_2/R^2] \sin pt$, (p : 円振動数, t : 時間) とおく。ただし, $u_0, u_1, \dots, w_2$ は x, ϕ のみの関数とする。 $y =$

$$\overline{OP} = Rx, \overline{PQ} = z$$

図 1

* 昭和59年11月24日 東北支部仙台地方講演会において講演, 原稿受付 昭和60年3月1日。

** 正員, 山形大学工学部 (〒992 米沢市城南4-3-16)。

$\tan \phi (=z/Rx)$, $1/s^2 = 1 + y^2$ とおき, $\tan \phi$, $\cot \theta \tan \phi$ は充分小さいとする. $\theta = \theta_0 + \phi$, $s' = \sin \theta_0 / r \sin \theta$, $\phi' = \phi \sin \theta_0$ とおくと, Love⁽⁷⁾により, ひずみは次のようになる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \partial \bar{u} / \partial r, & \varepsilon_\theta &= \partial \bar{w} / r \partial \theta + \bar{u} / r, & \varepsilon_\phi &= s' \partial \bar{v} / \partial \phi' + (\bar{w} / r) \cot \theta + \bar{u} / r, & \gamma_{r\theta} &= \partial \bar{u} / r \partial \theta + \partial \bar{w} / \partial r - \bar{w} / r, \\ \gamma_{\theta\phi} &= \partial \bar{v} / r \partial \theta - (\bar{v} / r) \cot \theta + s' \partial \bar{w} / \partial \phi', & \gamma_{\phi r} &= s' \partial \bar{u} / \partial \phi' + \partial \bar{v} / \partial r - \bar{v} / r \end{aligned} \quad (1)$$

図1より

$$\begin{aligned} \bar{u} &= s(u_0 + zu_1/R + z^2 u_2/R^2) + ys(w_0 + zw_1/R + z^2 w_2/R^2), & \bar{v} &= v_0 + zv_1/R + z^2 v_2/R^2, \\ \bar{w} &= -ys(u_0 + zu_1/R + z^2 u_2/R^2) + s(w_0 + zw_1/R + z^2 w_2/R^2), \\ \partial / \partial r &= (s/R) \partial / \partial x + ys \partial / \partial z, & \partial / r \partial \theta &= -(ys/R) \partial / \partial x + s \partial / \partial z \end{aligned} \quad (2)$$

E, ν を縦弾性係数, ポアソン比, $\mu = E/2(1+\nu)$, $\lambda = \nu E/\mu(1+\nu)(1-2\nu)$, $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi$ とする. 応力ひずみ関係に三次元フックの法則を仮定すると, 応力は次のようになる.

$$(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\phi) / \mu = \lambda \varepsilon + 2(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\phi), \quad (\tau_{r\theta}, \tau_{\theta\phi}, \tau_{\phi r}) / \mu = \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta\phi}, \gamma_{\phi r} \quad (3)$$

中央面の任意点における y の上下限を $\pm H$, $k = \cot \theta_0$ とする. 体積要素は $(1+ky)R^3 x^2 d\phi' dx dy$ なので, γ/g を密度とすると, 円すい殻の振動の1周期間のラグランジュアン L は次のようになる.

$$L = \frac{\mu}{2} \iint \left[\int_{-H}^H \left\{ \frac{\gamma \dot{p}^2}{\mu g} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) - \lambda \varepsilon^2 - 2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\phi^2) - \gamma_{r\theta}^2 - \gamma_{\theta\phi}^2 - \gamma_{\phi r}^2 \right\} (1+ky) dy \right] R^2 x^2 dx d\phi' \quad (4)$$

式(4)に式(1)~(3)を代入し, $s' = 1/Rx(1+ky)$, $\cot \theta = (k-y)/(1+ky)$ などの関係を用いて y について積分し, L を x, ϕ' に関する積分式にする. その式の第1変分を計算, 部分積分をすると次式が求まる. ただし, $\eta = 2 + \lambda$, $\alpha^4 = \gamma p^2 R^2 / \mu g$, x_1, ϕ_1 などは x, ϕ' の上下限とする.

$$\begin{aligned} \delta L / R &= \iint [E_1 \delta u_0 + E_2 \delta v_0 + E_3 \delta w_0 + E_4 \delta u_1 + E_5 \delta v_1 + E_6 \delta w_1 + E_7 \delta u_2 + E_8 \delta v_2 + E_9 \delta w_2] dx d\phi' \\ &\quad - \int_{\phi_1}^{\phi_2} [T_1 \delta u_0 + T_2 \delta v_0 + T_3 \delta w_0 + T_4 \delta u_1 + T_5 \delta v_1 + T_6 \delta w_1 + T_7 \delta u_2 + T_8 \delta v_2 + T_9 \delta w_2]_{x=x_1}^{x=x_2} d\phi' \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} [T_{10} \delta u_0 + T_{11} \delta v_0 + T_{12} \delta w_0 + T_{13} \delta u_1 + T_{14} \delta v_1 + T_{15} \delta w_1 + T_{16} \delta u_2 + T_{17} \delta v_2 + T_{18} \delta w_2]_{\phi=\phi_1}^{\phi=\phi_2} dx = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \eta \bar{F}_1 x^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \bar{F}_1 x u_0 + \eta \bar{F}_2 k x^3 \partial u_1 / \partial x + \eta \bar{F}_2 x^4 \partial u_2 / \partial x + \lambda \bar{F}_2 x^3 u_2 + \lambda \bar{F}_1 k x w_0 + \lambda \bar{F}_1 x^2 w_1 \\ &\quad + 3\lambda \bar{F}_2 k x^3 w_2 + \lambda \bar{F}_1 x \partial v_0 / \partial \phi' + \lambda \bar{F}_2 x^3 \partial v_2 / \partial \phi', \\ T_4 &= \eta \bar{F}_2 k x^3 \partial u_0 / \partial x + \eta \bar{F}_2 x^4 \partial u_1 / \partial x + \lambda \bar{F}_2 x^3 u_1 + \eta \bar{F}_3 k x^5 \partial u_2 / \partial x + 2\lambda \bar{F}_2 k x^3 w_1 + 2\lambda \bar{F}_2 x^4 w_2 + \lambda \bar{F}_2 x^3 v_1 / \partial \phi', \\ T_7 &= \eta \bar{F}_2 x^4 \partial u_0 / \partial x + \lambda \bar{F}_2 x^3 u_0 + \eta \bar{F}_3 k x^5 \partial u_1 / \partial x + \eta \bar{F}_3 x^6 \partial u_2 / \partial x + \lambda \bar{F}_3 x^5 u_2 + \lambda \bar{F}_2 k x^3 w_0 \\ &\quad + \lambda \bar{F}_2 x^4 w_1 + 3\lambda \bar{F}_3 k x^5 w_2 + \lambda \bar{F}_2 x^3 \partial v_0 / \partial \phi' + \lambda \bar{F}_3 x^5 \partial v_2 / \partial \phi', \\ T_3 &= \bar{F}_1 x^2 u_1 + 2\bar{F}_2 k x^3 u_2 + \bar{F}_1 x^2 \partial w_0 / \partial x + \bar{F}_2 k x^3 \partial w_1 / \partial x + \bar{F}_2 x^4 \partial w_2 / \partial x, \\ T_6 &= \bar{F}_2 k x^3 u_1 + 2\bar{F}_2 x^4 u_2 + \bar{F}_2 k x^3 \partial w_0 / \partial x + \bar{F}_2 x^4 \partial w_1 / \partial x + \bar{F}_3 k x^5 \partial w_2 / \partial x, \\ T_9 &= \bar{F}_2 x^4 u_1 + 2\bar{F}_3 k x^5 u_2 + \bar{F}_2 x^4 \partial w_0 / \partial x + \bar{F}_3 k x^5 \partial w_1 / \partial x + \bar{F}_3 x^6 \partial w_2 / \partial x, \\ T_2 &= \bar{F}_1 (x^2 \partial v_0 / \partial x - x v_0) + \bar{F}_2 k x^3 \partial v_1 / \partial x + \bar{F}_2 (x^4 \partial v_2 / \partial x - x^3 v_2) + \bar{F}_1 x \partial u_0 / \partial \phi' + \bar{F}_2 x^3 \partial u_2 / \partial \phi', \\ T_5 &= \bar{F}_2 k x^3 \partial v_0 / \partial x + \bar{F}_2 (x^4 \partial v_1 / \partial x - x^3 v_1) + \bar{F}_3 k x^5 \partial v_2 / \partial x + \bar{F}_2 x^3 \partial u_1 / \partial \phi', \\ T_8 &= \bar{F}_2 (x^4 \partial v_0 / \partial x - x^3 v_0) + \bar{F}_3 k x^5 \partial v_1 / \partial x + \bar{F}_3 (x^6 \partial v_2 / \partial x - x^5 v_2) + \bar{F}_2 x^3 \partial u_0 / \partial \phi' + \bar{F}_3 x^5 \partial u_2 / \partial \phi', \\ T_{10} &= G_1 \partial u_0 / \partial \phi' - G_2 k x \partial u_1 / \partial \phi' + G_2 x^2 \partial u_2 / \partial \phi' + \bar{F}_1 x \partial v_0 / \partial x - G_1 v_0 + G_2 k x v_1 + \bar{F}_2 x^3 \partial v_2 / \partial x - G_2 x^2 v_2, \\ T_{13} &= -G_2 k x \partial u_0 / \partial \phi' + G_2 x^2 \partial u_1 / \partial \phi' - G_3 k x^3 \partial u_2 / \partial \phi' + G_2 k x v_0 + \bar{F}_2 x^3 \partial v_1 / \partial x - G_2 x^2 v_1 + G_3 k x^3 v_2, \\ T_{16} &= G_2 x^2 \partial u_0 / \partial \phi' - G_3 k x^3 \partial u_1 / \partial \phi' + G_3 x^4 \partial u_2 / \partial \phi' + \bar{F}_2 x^3 \partial v_0 / \partial x - G_2 x^2 v_0 \\ &\quad + G_3 k x^3 v_1 + \bar{F}_3 x^5 \partial v_2 / \partial x - G_3 x^4 v_2, \\ T_{12} &= G_1 \partial w_0 / \partial \phi' - G_2 k x \partial w_1 / \partial \phi' + G_2 x^2 \partial w_2 / \partial \phi' - G_1 k v_0 + G_1 x v_1 - G_2 k x^2 v_2, \\ T_{15} &= -G_2 k x \partial w_0 / \partial \phi' + G_2 x^2 \partial w_1 / \partial \phi' - G_3 k x^3 \partial w_2 / \partial \phi' + k^2 G_2 x v_0 - G_2 k x^2 v_1 + (\bar{F}_2 + G_2) x^3 v_2, \\ T_{18} &= G_2 x^2 \partial w_0 / \partial \phi' - G_3 k x^3 \partial w_1 / \partial \phi' + G_3 x^4 \partial w_2 / \partial \phi' - G_2 k x^2 v_0 + G_2 x^3 v_1 - G_3 k x^4 v_2, \\ T_{11} &= \lambda \bar{F}_1 x \partial u_0 / \partial x + \eta G_1 u_0 - \eta G_2 k x u_1 + \lambda \bar{F}_2 x^3 \partial u_2 / \partial x + \eta G_2 x^2 u_2 + \eta G_1 k w_0 \\ &\quad + (\lambda \bar{F}_1 - \eta k^2 G_2) x w_1 + \eta G_2 k x^2 w_2 + \eta G_1 \partial v_0 / \partial \phi' - \eta G_2 k x \partial v_1 / \partial \phi' + \eta G_2 x^2 \partial v_2 / \partial \phi', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{14} = & -\eta G_2 k x u_0 + \lambda \bar{F}_2 x^3 \partial u_1 / \partial x + \eta G_2 x^2 u_1 - \eta G_3 k x^3 u_2 - \eta k^2 G_2 x w_0 + \eta G_2 k x^2 w_1 \\
& + (2\lambda \bar{F}_2 - \eta k^2 G_3) x^3 w_2 - \eta G_2 k x \partial v_0 / \partial \phi' + \eta G_2 x^2 \partial v_1 / \partial \phi' - \eta G_3 k x^3 \partial v_2 / \partial \phi', \\
T_{17} = & \lambda \bar{F}_2 x^3 \partial u_0 / \partial x + \eta G_2 x^2 u_0 - \eta G_3 k x^3 u_1 + \lambda \bar{F}_3 x^5 \partial u_2 / \partial x + \eta G_3 x^4 u_2 + \eta G_2 k x^2 w_0 \\
& + (\lambda \bar{F}_2 - \eta k^2 G_3) x^3 w_1 + \eta G_3 k x^4 w_2 + \eta G_2 x^2 \partial v_0 / \partial \phi' - \eta G_3 k x^3 \partial v_1 / \partial \phi' + \eta G_3 x^4 \partial v_2 / \partial \phi'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 = & \partial T_1 / \partial x + \partial T_{10} / \partial \phi' - T_{11} + \alpha^4 (\bar{F}_1 x^2 u_0 + \bar{F}_2 k x^3 u_1 + \bar{F}_2 x^4 u_2), \\
E_4 = & \partial T_4 / \partial x + \partial T_{13} / \partial \phi' - T_3 - T_{14} + \alpha^4 (\bar{F}_2 k x^3 u_0 + \bar{F}_2 x^4 u_1 + \bar{F}_3 k x^5 u_2), \\
E_7 = & \partial T_7 / \partial x + \partial T_{16} / \partial \phi' - 2T_6 - T_{17} + \alpha^4 (\bar{F}_2 x^4 u_0 + \bar{F}_3 k x^5 u_1 + \bar{F}_3 x^6 u_2), \\
E_2 = & \partial T_2 / \partial x + \partial T_{11} / \partial \phi' + T_{10} + k T_{12} + \alpha^4 (\bar{F}_1 x^2 v_0 + \bar{F}_2 k x^3 v_1 + \bar{F}_2 x^4 v_2), \\
E_5 = & \partial T_5 / \partial x + \partial T_{14} / \partial \phi' - x T_{12} + T_{13} + \alpha^4 (\bar{F}_2 k x^3 v_0 + \bar{F}_2 x^4 v_1 + \bar{F}_3 k x^5 v_2), \\
E_8 = & \partial T_8 / \partial x + \partial T_{17} / \partial \phi' + T_{16} + k T_{18} - 2T_{19} + \alpha^4 (\bar{F}_2 x^4 v_0 + \bar{F}_3 k x^5 v_1 + \bar{F}_3 x^6 v_2), \\
E_3 = & \partial T_3 / \partial x + \partial T_{12} / \partial \phi' - k T_{11} + \alpha^4 (\bar{F}_1 x^2 w_0 + \bar{F}_2 k x^3 w_1 + \bar{F}_2 x^4 w_2), \\
E_6 = & \partial T_6 / \partial x + \partial T_{15} / \partial \phi' - x T_{11} - 2k T_{14} + T_{20} + \alpha^4 (\bar{F}_2 k x^3 w_0 + \bar{F}_2 x^4 w_1 + \bar{F}_3 k x^5 w_2), \\
E_9 = & \partial T_9 / \partial x + \partial T_{18} / \partial \phi' - 2x T_{14} - 3k T_{17} + T_{21} + \alpha^4 (\bar{F}_2 x^4 w_0 + \bar{F}_3 k x^5 w_1 + \bar{F}_3 x^6 w_2),
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
T_{19} = & \bar{F}_2 (x^3 \partial w_1 / \partial \phi' + 2x^4 v_2), \quad T_{21} = 4\bar{F}_2 x^3 (u_1 + \partial v_1 / \partial \phi' - 2x w_2), \\
T_{20} = & 2\bar{F}_1 x (u_0 + k w_0 + \partial v_0 / \partial \phi' - x w_1) + 2\bar{F}_2 x^3 (u_2 - k w_2 + \partial v_2 / \partial \phi')
\end{aligned}$$

代表的厚さを h_0 , 殻の任意点の厚さを h とすると, $H = (h_0/2R)(h/h_0x)$ となる. $\beta_n = (2n+1)(2R/h_0)^{2n}$ とおくと, 式(6), (7)の $\bar{F}_n, G_n$ は次のようになる. Σ は m について零から無限大までの加算である.

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{n+1} = & (h_0/R)(h/h_0x)^{2n+1}/\beta_n, \quad G_1 = (h_0/R)(h/h_0x)\Sigma(kh/h_0x)^{2m}/\beta_m, \\
G_n - k^2 G_{n+1} = & \bar{F}_n
\end{aligned}$$

$\delta L = 0$ より $E_1 = E_2 = \dots = E_9 = 0$ が振動方程式であり, $T_1 u_0 = T_2 v_0 = \dots = T_9 w_2 = 0$ が円すい殻の大小端部における境界条件である. 以下, 周方向は完全な円である円すい殻を考えるので, ϕ に関する境界条件 $T_{10} u_0 = T_{11} v_0 = \dots = T_{18} w_2 = 0$ は考えない. 上式で $w_1 = u_2 = v_2 = w_2 = 0$, $\bar{F}_n, G_n$ で $(h/h_0)^5$ 以上の項を省略すると, 一次近似法の諸式⁽³⁾と完全に一致する.

3. 解と特性方程式

q を未定定数, $M = q + 2m$, ($m = 0, 1, 2, \dots$), n を周方向の波の数とする. $k' = n/\sin \theta_0$ とおく. $A_m, B_m, \dots, R_m$ を未定係数として, 解を次式のように仮定する.

$$\begin{aligned}
u_0, u_1, u_2 = & \Sigma [k A_m, B_m x^{-1}, k C_m x^{-2}] x^{M-(1/2)} \sin n\phi, \\
v_0, v_1, v_2 = & \Sigma [k D_m, E_m x^{-1}, k F_m x^{-2}] x^{M-(1/2)} \cos n\phi, \\
w_0, w_1, w_2 = & \Sigma [P_m, k Q_m x^{-1}, R_m x^{-2}] x^{M-(1/2)} \sin n\phi
\end{aligned}$$

式(9)を式(6), (7)に代入すると, 振動方程式と境界条件が x のべき級数の形になる. 振動方程式で x の同べき係数を零とおくと, $A_m \sim R_m$, ($m = 1, 2, \dots$) を $A_0 \sim R_0$ であらわすことができ, また $m = 0$ として $A_0 \sim R_0$ に関する9元一次同次連立方程式(特性方程式)が定まる. 特性方程式から q と $A_0 \sim R_0$ が求まる. これらは18組あり, それぞれに対応する $u_0 \sim w_2$ を $u_{0,l} \sim w_{2,l}$, ($l = 1 \sim 18$) とし, K_l を任意定数, Σ' を $l = 1$ から18までの和とすると

$$u_0 = \Sigma' K_l u_{0,l}, \dots, w_2 = \Sigma' K_l w_{2,l} \quad (10)$$

となる. 式(10)を大小端の18個の境界条件に代入すると, 無次元振動数 q と係数 K_l とが求まる.

特性方程式を解く方法として係数行列式を零とおいて計算する仕方はけたおちが激しく, 大形計算機でも

q の値が求まらなかった. それで次の方法を用いた. q を任意の複素数とし特性方程式のうち8個の式に代入し, $A_0 = 1$ として $B_0 \sim R_0$ を求める. これらの $A_0 \sim R_0$ を残りの1個の特性方程式に代入し, q の値を求める. この q を8個の式に代入して同様の計算をする. この計算を繰返すと q および $A_0 \sim R_0$ は求める値に収束する.

前報⁽²⁾⁽³⁾の解と比較するため, 数値計算は厚さが軸方向に直線的に増加する円すい殻 ($h/h_0x = 1$) について行った.

$n = 2, 1/\beta_1 = 0.002$ の場合, q の18個の値 $\{\pm(T_{rl} \pm iT_{il}), \pm T_l : l = 1, 2, \dots, 9\}$ は図2に示すとおりである. θ_0 が 45° 以下の場合には12複素根と6実根, 55° 以上の場合には8複素根と10実根である. 計算はすべて

NEC PC 9801 を用いて行った。

係数 A_m, B_m などは q またはその実部が正のときは m とともに単調に減少するが、負の時は複雑である。絶対値で比較して最大項と最終項の比が 10^{25} 程度の項数を用いた。項数は多い時で 40 項前後である。負根に対する係数の収束状況の一例を図 3 に示す。

4. 数 値 計 算

代表的長さ R を円すい殻の中央面上の頂点から大端部までの母線の長さとする。したがって大端部では $x=1$ 、小端部の x の値を x_0 とする。代長厚さ h_0 は β_1 の値を先に与え、これから求めることにした。二次近似法では $\beta_1=1000$ の場合は求まらず、逆に前報では求まらなかった $\beta_1=100$ の二次振動数が求まる。数値計算は $\beta=500$ と 100 の場合を示す。ポアソン比は 0.3 とした。使用計算機は $10^{\pm 38}$ でオーバーフローするので $x_0 > 0.35$ の範囲を計算した。

境界条件は一端で 9 個と前報より多い。計算結果を直接比較できるのは、境界条件が固定 ($u_0 \sim w_2 = 0$) か自由 ($T_1 \sim T_9 = 0$) の場合である。ただし両端自由の円すい殻の振動数は前報同様今回も求まらなかった。境界条件については大端を先に示し、例えば大端自由、小端固定を自由固定とよぶことにする。

図 4 に $n=2, \theta_0=40^\circ$ の円すい殻の α と x_0 との関係を示す。まず $\beta_1=500$ の場合を考える。曲線 S_1, S_2, S_3 は両端固定、固定自由、自由固定殻の二次近似法の解で、 M, R_1, R_2 は両端固定殻の Mirsky 法、一次、二次近似法に適用した Ritz 法の解である。Ritz 法は変位の試験関数に $(K_0 + K_1x + K_2x^2)(1-x)(x-x_0)$ の形の式を用い、二次近似法の場合は 27 個の未定定数

を用いた。Ritz の解は同じ x_0 に対して厳密解に比較して、 α の値が一次近似法で約 $1 \sim 2\%$ 大、二次近似法で $2 \sim 5\%$ 大である。曲線 M と S_1 とを比較すると、 α の値が前者が $1.3 \sim 2.7\%$ 低い。固定自由殻では Mirsky 法の α の値が曲線 S_2 より 1% 前後低く、自由固定殻では Mirsky の解は 1 点しか求めてないが、ほぼ S_3 上にある。

図 4 に示さなかったが、両端固定殻二次振動の α の値は、Mirsky 法の値が二次近似法の値より約 1% 下、固定自由二次では両者はほぼ等しい。 $n=6(\theta_0=40^\circ)$ の場合も固定自由、両端固定各一次は両者はほぼ等しい。

次に $\beta_1=100$ の場合である。曲線 BB は両端固定殻の一次振動の α の値、 $BF 1, 2$ は固定自由一次、二次、 $FB 1, 2$ は自由固定一次、二次をあらわす。Mirsky 法の解は両端固定、固定自由の一次についてのみ計算してあったが、3 けた求め、最後のけたがあやしいので、 α の値について正確な比較はできなかった。それらの値は $BB, BF 1$ のわずかに下の方を通る。

Ritz 法の利点は計算が簡単で割合正確な振動数を与えることである。特に振動数方程式の零点が求めにくくなる、大きな n 、小さな β_1 、また θ_0 が 0° や 90° に近い場合は便利である。

古典理論では両端自由殻の振動数が求まるが、厚肉理論では普通求まらない。この点は今後検討したい。

二次近似法は Mirsky 法よりも低い振動数を与えるのではないかと予想して本方法を研究した。二次近似法は一次近似法よりは低い振動数を与えるが、Mirsky 法に比較すると、ほぼ同じか、わずかに高い。

図 5 に厚さ方向の変位と応力との分布の一例を示す。 $n=2, \theta_0=40^\circ, \beta_1=500, \alpha \approx 2.470, x_0=0.8378$ の自由固定円すい殻の一次振動の場合である。図 5 の最上段が小端部、最下段が大端部の断面で、中間は小端部から円すい殻の長さの $1/4, 1/2, 3/4$ の距離の断面

図 2 特性方程式の根

図 3 係数の収束状況

である。縦軸は z 軸で、上下端は $z = \pm h/2$ を示す。図 1 の OP, ϕ , PQ 方向の変位を u, v, w で示している。図 5 に 10^{-5} と側記してある場合は変位や応力の最大値が 10^{-5} 程度に小さいことを示す。

変位をみると近似的に、 u, v は z の一次式、 w は z に無関係である。これが前報の Mirsky 法や、一次近似法から精度のよい振動数が求まる理由である。変位は、より正確には、 z の高次式で、二次近似法の場合も横軸の目盛を拡大すると、例えば w の分布は図 5 の中央段に点線で示すような形になる。高次振動、大きな n , 小さな β_1 に対しては、 z の二次の項の変位に

図 4 小端部の位置 x_0 と振動数 α との関係

およぼす影響が無視できなくなる。

12 けた以上正確な α, x_0 を用いて計算すると、小端部の u, v, w , 大端部の σ_r はほぼ 10^{-13} 程度の大きさで求まる。

大端部の境界条件は $T_1 = T_2 = \dots = T_9 = 0$ で、 $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r} = 0$ とは異なるが、図 5 から解るように、これらの応力はほぼ零である。 z のより高次の項を用いれば $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$ はより小さくなるかどうか今後の検討を続けたい。

図 5 では、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$ は $z = \pm h/2$ で零にならない。両応力は n や β_1 の値によってかなり小さい場合もあるが、一般には他の境界条件の場合や高次振動の場合も零ではない。零にならないのは厚肉殻ゆえか、 z の高次の項を省略したためか、これも検討を続けたい。

Mirsky 法や一次近似法では $\sigma_0 = 0$ と仮定した。この仮定がなくとも、図 5 からわかるように、固定端とその近傍を除いて σ_0 はほぼ零である。

z の二次の項の応力におよぼす影響は変位の場合よりはるかに大きい。応力まで検討する場合は二次近似法を用いて計算するのが望ましい。

図 6 に振動モードの一例を示す。 $n=2, \theta_0=40^\circ, \beta_1=500, \alpha \approx 2.860$ の固定固定円すい殻の場合である。I, II は一次、二次の振動をあらわす。 w_n は 10 倍に拡大して示しており、 u は省略したが、一次が w_n に似た

図 5 変位と応力の分布

図 6 振動モード

形, 二次は w_I に似て節なしの形をし, その最大値はともに 10^{-8} の大きさである. x_0 の値はそれぞれ 0.6753, 0.4518 である.

5. 結 言

円すい殻の任意点の変位を厚さ方向の座標の二次式と仮定(二次近似法)し, 振動数, 変位, 応力などを求めた. その結果次のことがわかった.

(1) 二次近似法は, 紙の上で相当量の計算の後で振動方程式や境界条件が求まる. 特性方程式の新しい解法が見つかったこともあって, 数値計算はパーソナ

ルコンピュータ程度で充分正確な振動数, 変位, 応力などが計算できる.

(2) 前報と比較すると, 一次近似法, 二次近似法, Mirsky 法の順により正確な振動数が求まると考えられる. 二次近似法に適用した Ritz の解は簡単な計算で割合正確な振動数を与える.

(3) 円すい殻の肉厚が厚い場合, 高次振動を考える場合また応力を求める場合は二次近似法で計算することが望ましい.

最後に数値計算その他で種々手伝ってくれた山形大学工学部技官 山口たい子さんに心から謝意を表する.

文 献

- (1) Federhofer, K., *Ing. Arch.*, **9** (1938), 288.
- (2) 高橋・ほか 3 名, 機論, **48-425**, C (昭 57), 31.
- (3) 高橋・ほか 2 名, 機論, **50-453**, C (昭 59), 747.
- (4) Soldatos, G. V., Massalas, C. V. and Tzivanidis, G. J., *Acta Mech.*, **46** (1983), 207.
- (5) Massalas, C. V. and Tzivanidis, G. J., *J. Sound Vib.*, **79-4** (1981), 519.
- (6) Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., *J. Sound Vib.*, **92-3** (1984), 447.
- (7) Love, A. E. H., *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed. (1927), 56, Cambridge University Press.