非線形電磁力が作用するはり質量系の過渡振動*

小島 宏行**, 白石 秀雄***, 長屋 幸助**

Transient Vibrations of a Beam Mass System Subjected to Nonlinear Electromagnetic Force

by Hiroyuki KOJIMA, Hideo SHIRAISHI, and Kosuke NAGAYA

In this report, the transient vibrations of a beam mass system subjected to nonlinear electromagnetic force are investigated theoretically and experimentally in consideration of both the nonlinearity of the electromagnetic force and the inductance of an electromagnet. The beam is fixed at one end, and the mass is attached to another end. The electromagnetic force produced by the electromagnet acts on the mass. The electromagnet is excited by sinusoidal waves, rectangular waves and rectangular pulse voltages by using a micro computer. In the analysis, the electromagnetic force is approximated by using a series of rectangular pulses, and the lateral vibrations of the beam are obtained by adding the individual responses due to each rectangular pulse. The response solution of the governing partial equation of the beam mass system is derived by the Laplace transformation method. The numerical results agree well with the experimental ones.

Key Words: Vibration, Beam Mass System, Nonlinear Transient Response, Electromagnetic Force, Inductance

1. 緒 言

電磁力の作用する機械振動系について種々の研究がなされており、谷口らは電磁パイプレータを取付けた一自由度振動系の振動特性について報告している⁽¹⁾。Kana は、電磁力が作用する一自由度のばね質量系の振動特性について調べており⁽²⁾、Dao は多自由度系の場合を取扱っている。また Moon は、永久磁石による磁気吸引力が作用している片持ばりの動的挙動について報告している⁽⁴⁾⁽⁵⁾。著者らは、前報において交番電磁力が作用するはり質量系の強制振動について報告したが⁽⁶⁾、電磁力が作用する弾性体の過渡振動を、電磁力の非線形性を考慮して詳細に調べた研究は、まだ見受けられないように思われる。

本報は、電磁力が作用するはり質量系の過渡振動を、電磁力の非線形性ならびに電磁石のインダクタンスを考慮して理論的に調べるとともに、実験を行い理論式の妥当性を検証したものである。はりの一端は固定されており、他端には集中質量が取付けられている。

る。この集中質量には、電磁石による電磁力が作用しており、電磁石には、正弦波、方形波および方形波パルス電圧が印加されている。解析においては、時間を微小区間に分割することにより、電磁力を連続した方形波パルスで近似的に記述するとともに、はり質量系の運動方程式にラプラス変換法を適用して、系の過渡応答を導いている。

2. 実験装置

図1は、電磁力により駆動されるはり質量系を示したものである。はりの固定端に原点 O を、はりの軸線にそって x 軸をとり、はりのたわみを y とする。また

図1 実験装置概略図

* 昭和59年10月17日 第62期全国大会講演会において講演，原稿受付 昭和60年8月9日。

** 正員，群馬大学工学部（〒376 桐生市天神町1-5-1）。

*** 准員，東京三洋電機（株）（〒370-05 群馬県邑楽郡大泉町180）。

集中質量を m , はりの長さを l , 集中質量と電磁石との間のギャップを G とする。実験においては, まず正弦波, 方形波ならびに方形波パルスを Z-80-CPU の RAM 内に記憶させるとともに, これらの波形を D-A コンバータにより電圧として出力させ, 電力増幅器を介して電磁石を励磁した。電流波形は, 外部抵抗 R_1 の電圧を測定し記録した。また, はりの先端の変位 y は, 渦電流形非接触変位計により検出し, ペン書きオシログラフに波形を記録した。実験装置の諸元は以下のとおりである。

はりの長さ $l=232.5$ mm, 幅 20.3 mm, 厚み 1.7 mm, $\rho A l=0.0575$ kg, $m=0.0781$ kg, $\kappa=m/\rho A l=1.36$, $\beta_1 l=1.17$, $\Omega_1/2\pi=8.72$ Hz, $E=1.52\times 10^5$ N/mm², $I=7.59$ mm⁴, $R_1=15.8$ Ω , $R_2=4.2$ Ω , $L=187.2$ mH, $R=R_1+R_2=20.0$ Ω

ただし ρ , A ははりの密度および横断面積, $\beta_1 l$, $\Omega_1/2\pi$ ははり質量系の第一次振動モードにおける固有値ならびに固有振動数, E , I ははりの縦弾性係数および断面二次モーメント, R_1 は外部抵抗, R_2 , L は電磁石の巻線の抵抗ならびにインダクタンスである。なお, はりに用いた材料は, 深しぼり用のみがき帯鋼であり, 電磁石は, 軟鋼の丸棒 (直径 20 mm) に銅線 (直径 0.8 mm) を 943 回巻いたものである。

図 2 は, 電磁力 F を電流 i の二乗で除した値を示しており, この値は次式のように表すことができる。

$$F/i^2 = \alpha_0(1 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3) \quad (1)$$

ここに α_1 , α_2 , α_3 は, 電磁吸引特性に関する係数である。なお図 2 中の実線は, 測定値を最小二乗法により三次式で近似した曲線であり, このときの α_1 , α_2 , α_3 の値は, 次のとおりである。

$G=10$ mm の場合:

$$\alpha_0=0.918 \text{ N/A}^2, \quad \alpha_1=0.133 \text{ mm}^{-1}$$

図 2 電磁吸引特性

$$\alpha_2=8.599\times 10^{-3} \text{ mm}^2, \quad \alpha_3=1.908\times 10^{-4} \text{ mm}^{-3}$$

$G=15$ mm の場合:

$$\alpha_0=0.483 \text{ N/A}^2, \quad \alpha_1=0.117 \text{ mm}^{-1}$$

$$\alpha_2=1.091\times 10^{-2} \text{ mm}^2, \quad \alpha_3=3.626\times 10^{-4} \text{ mm}^{-3}$$

3. 理論解析

図 3 に示すように, 時間を微小区間 Δh に分割し, この時間区間では, 電磁石に流れる電流 i ならびに電磁吸引力 F を近似的に一定と見なして解析を行う。したがって, 任意の時間 $t=t_m$ における変位 y_m は, それ以前の区間の m 個の方形波パルスによる応答を重ね合わせることで求めることができる。つぎに, k 番めの方形波パルスによる応答を調べる。電気系の方程式ならびにはりの運動方程式は, 次式で表される。

$$L \frac{di}{dt} + R_i = q(t) \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

ここに $q(t)$ は, 電磁石に印加した電圧である。また, 図 3 中の k 番めの方形波パルス F_k が集中質量 m に作用していることから, はりの境界条件は次式のように書くことができる。

$$x=0; y=0, \quad \partial y/\partial x=0 \quad (4)$$

$$x=l; \partial^2 y/\partial x^2=0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -EI(\partial^3 y/\partial x^3) &= -m(\partial^2 y/\partial t^2) \\ &+ F_k u[t-(k-1)\Delta h] - F_k u[t-k\Delta h] \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $u(t)$ は単位ステップ関数である。式 (2) 中の $q(t)$ は, 次式で与えられる。

(i) 正弦波の場合

$$q(t) = E_0 \sin(\pi t/a) \cdot u(t) \quad (7)$$

(ii) 方形波の場合

図 3 方形波パルスで近似した電磁力のモデル

$$q(t) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \{u[t-2(n-1)a] - 2u[t-(2n-1)a] + u[t-2na]\} \dots (8)$$

(iii) 方形波パルスの場合

$$q(t) = E_0[u(t) - u(t-a)] \dots (9)$$

ただし、 E_0 は入力電圧の最大値であり、 a はパルス幅である。式(2)中のインダクタンス L は、はりのたわみ y の関数であるが、実験を行った結果、その影響は無視し得る程度であることが確かめられたので、ここでは定数と考えることにする。したがって、式(7)～(9)を式(2)に代入し電流 i について解くと、次式が得られる。

(i) 正弦波の場合

$$I'(\tau) = \frac{\pi\xi/\xi}{1+(\pi\xi/\xi)^2} \exp\left(-\frac{\tau}{\xi}\right) + \frac{1}{1+(\pi\xi/\xi)^2} \left\{ \sin \frac{\pi\xi}{\xi} - \frac{\pi\xi}{\xi} \cos \frac{\pi\xi}{\xi} \right\} \dots (10)$$

(ii) 方形波の場合

$$I'(\tau) = -\tanh(-\xi/2\xi) \exp(-\tau/\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{(2n-1)\pi \{[(2n-1)\pi\xi/\xi]^2 + 1\}} \times \left\{ \sin \left[\frac{(2n-1)\pi\tau}{\xi} \right] - \left[\frac{(2n-1)\pi\xi}{\xi} \right] \times \cos \left[\frac{(2n-1)\pi\tau}{\xi} \right] \right\} \right\} \dots (11)$$

(iii) 方形波パルスの場合

$$I'(\tau) = \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\xi}\right) - \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\tau-\xi}{\xi}\right) \right\} \times u(\tau-\xi) \right\} \dots (12)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{Q_1 L}{R}, \quad Q_1 = \frac{(\beta_1 l)}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \xi = Q_1 a \\ \tau &= Q_1 t, \quad I' = i/I_0, \quad I_0 = E_0/R \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

したがって、式(1)、(10)～(12)より境界条件式(6)

中の F_k は、次式のように表すことができる。

$$F_k = \alpha_0 I_0^2 \bar{I}^2 (1 + \varepsilon_1 V_{k-1} + \varepsilon_2 V_{k-1}^2 + \varepsilon_3 V_{k-1}^3) \dots (14)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{I}^2 &= \{I'(kh-h) + I'(kh)\}^2/4 \\ V_{k-1} &= y_{k-1}/X_s, \quad \varepsilon_1 = \alpha_1 X_s, \quad \varepsilon_2 = \alpha_2 X_s^2 \\ \varepsilon_3 &= \alpha_3 X_s^3, \quad X_s = \alpha_0 I_0^2/k_e \\ k_e &= 3EI/l^3, \quad h = Q_1 \Delta h \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

つぎに、はりの運動方程式(3)ならびに境界条件式(4)～(6)を、初期条件を零としてラプラス変換する

と次式が得られる。

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \beta^4 Y = 0 \dots (16)$$

$$x=0; Y=0, \quad dY/dx=0 \dots (17)$$

$$X=l; d^2 Y/dx^2=0 \dots (18)$$

$$-EI(d^3 Y/dx^3) = -ms^2 Y + (F_k/s) \cdot [\exp\{-s(k-1)\Delta h\} - \exp\{-sk\Delta h\}] \dots (19)$$

ここに

$$Y(x, s) = \int_0^\infty y(x, t) e^{-st} dt, \quad \beta^4 = -\frac{\rho A}{EI} s^2 \dots (20)$$

式(16)の一般解は、次式のように書くことができる。

$$Y = A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x + A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x \dots (21)$$

ここで $A_1 \sim A_4$ は未定係数であり、式(21)を式(17)～(19)に代入すると次式が導かれる。

$$Y = \frac{F_k}{2EI\beta^3 s f} [\exp\{-s(k-1)\Delta h\} - \exp(-sk\Delta h)] \{(\cos \beta l + \cosh \beta l) \times (\sin \beta x - \sinh \beta x) - (\sin \beta l + \sinh \beta l) \times (\cos \beta x - \cosh \beta x)\} \dots (22)$$

ここに

$$f = 1 + \cos \beta l \cosh \beta l - \kappa \beta l (\sin \beta l \cosh \beta l - \cos \beta l \sinh \beta l) \dots (23)$$

式(22)を留数定理を用いてラプラス変換すると、方形波パルス F_k による応答が得られる。この結果を用いると、任意の時間 $t = mh$ におけるはりの振動変位は、次式のように表すことができる。

$$V_m = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\bar{F}_k}{2} (3\nu^2 - \nu^3) [u\{\tau - (k-1)h\} - u(\tau - kh)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\bar{F}_k H_2}{(\beta_n l)^4 H_1} \left\{ \exp\left[-j\left(\frac{\beta_n l}{\beta_1 l}\right)^2\right] \times \{\tau - (k-1)h\} \right\} u\{\tau - (k-1)h\} - \exp\left[-j\left(\frac{\beta_n l}{\beta_1 l}\right)^2(\tau - kh)\right] u(\tau - kh) \right\} \right] \dots (24)$$

ここに

$$\left\{ \begin{aligned} H_1 &= \cos \beta_n l \sinh \beta_n l - \sin \beta_n l \cosh \beta_n l \\ &+ \kappa (\cos \beta_n l \sinh \beta_n l - \sin \beta_n l \cosh \beta_n l) \\ &- 2\kappa \beta_n l \sin \beta_n l \sinh \beta_n l \dots (25) \\ H_2 &= (\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l) (\sin \beta_n l \nu - \sinh \beta_n l \nu) \\ &- (\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l) (\cos \beta_n l \nu - \cosh \beta_n l \nu) \dots (26) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{F}_k &= F_k/\alpha_0 I_0^2, \quad V_m = y_m/X_s \\ \nu &= x/l, \quad j^2 = -1 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

なお上式中の β_{nl} は、次式の振動数方程式の根である。

$$f=0 \dots\dots\dots (28)$$

4. 実験結果および数値計算結果

はりの振動波形は、式(24)中の m の値を次々と変化させ、そのつど電磁吸引力の値を求めることにより計算することができる。式(24)中の β_{nl} は、収束性を検討し四次振動モードまでのものを用いた。また時間のきざみ幅 h は、小さいほど計算精度は良くなるが、実用上 $h=0.5$ 程度で十分であることがわかった。

図4～7に、系の過渡応答の実験結果と数値計算結果を示す。ただし、はりの振動変位 V は、集中取付け部における値を示しており、電磁石と集中質量の間のギャップは10 mmとしてある。数値計算結果においては、はりのたわみ振動波形は実線で、電磁石の励磁

(a) はりの振動変位

(b) 理論値

$$E_0=16.5 \text{ V}, \xi=14.6, X_s=2.27 \text{ mm}, \nu=1$$

図5 正弦波入力による過渡応答

(a) 励磁電圧

(b) 励磁電流

(c) はりの振動変位

(d) 理論値

$$E_0=18.0 \text{ V}, \xi=3.39, X_s=2.70 \text{ mm}, \nu=1$$

図4 正弦波入力による過渡応答

(a) 励磁電圧

(b) 励磁電流

(c) はりの振動変化

(d) 理論値

$$E_0=10.0 \text{ V}, \xi=3.29, X_s=0.834 \text{ mm}, \nu=1$$

図6 方形波入力による過渡応答

(a) はりの振動変位

(b) 理論値

$$E_0 = 15.8 \text{ V}, \quad \xi = 12.8, \quad X_0 = 1.88 \text{ mm}, \quad \nu = 1$$

図7 方形波パルス入力による過渡応答

電流は破線で示されている。まず図4は、正弦波電圧で電磁石を励磁した場合であり、電磁石巻線のインダクタンスが電流に及ぼす影響は、ほとんど見受けられない。また式(1)からも明らかなように、電磁吸引力は電流の二乗に比例し、その振動数は電流のその2倍である。したがって、図4(c)、(d)のはりのたわみ振幅は、二分の一次分数調波振動であることがわかる。図5は、はり質量系の固有振動数よりもかなり低い振動数の正弦波で電磁石を励磁した場合であり、二次超調波の振動成分が徐々に増大していく様子が見られる。図6は方形波を入力した場合を示しており、電磁石の電流波形は励磁電圧とかなり異なった形状となっており、インダクタンスの影響が顕著であることがわかる。さらに図7は、方形波パルスを入力した場合を示しており、電磁力が作用している期間では、はり

は電磁石のほうに吸引されながら振動している。なお図4~7における数値計算結果は、実験結果に良く一致しており、本報で導いた理論式の妥当性を立証しているものと言えよう。

5. 結 言

本報は、非線形電磁力が作用するはり質量の過渡振動を、電磁力の非線形性ならびに電磁石のインダクタンスを考慮して理論的に調べるとともに、実験を行い理論式の妥当性を検証したものである。電磁石には、正弦波、方形波ならびに方形波パルス電圧が印加されている。得られた結果を要約すると

(1) 電磁石のインダクタンスを考慮して励磁電流を求めた。さらに時間を微小区間に分割することにより電磁力を連続した方形波パルスで記述するとともに、これらのパルスによる応答をラプラス変換法を用いて求め、系の過渡応答解を導いた。

(2) 理論で予期したとおり、電磁力の非線形性に起因する二次超調波ならびに二分の一次分数調波振動が徐々に増大していく様子が実測された。また方形波電圧で電磁石を励磁した場合、インダクタンスの影響が顕著であった。

(3) 数値計算結果は実験結果と良く一致し、本報で導いた理論式の妥当性が立証された。

文 献

- (1) 谷口・ほか2名, 機論, 25-155 (昭34), 681.
- (2) Kana, D. D., *Trans. ASME, Sec. B*, 89-4 (1967), 839.
- (3) Dao, N. V., *Proc. Vib. Prob.*, 14-1 (1973), 85.
- (4) Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.*, 65-2 (1979), 295.
- (5) Moon, F. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1980), 638.
- (6) 小島・ほか3名, 機論, 50-455, C (昭59), 1168.