玉軸受に起因する四次の非線形復元力をもつ回転軸の 和差調波・超和差調波振動*

石田 幸男**, 池田 隆**
山本 敏男***, 岡田 宏樹****

Summed-and-Differential Harmonic and Super-Summed-and-Differential Harmonic Oscillations of a Rotating Shaft Caused by Quartic Nonlinearity Due to Ball Bearings

by Yukio ISHIDA, Takashi IKEDA,
Toshio YAMAMOTO, and Hiroki OKADA

This paper deals with summed-and-differential harmonic and super-summed-and-differential harmonic oscillations in a rotating shaft system which are caused by quartic nonlinearity. We theoretically analyze these oscillations, paying special attention to the nonlinear components represented by the polar coordinates. We clarify which kind of nonlinear component has an influence on each oscillation. In experiments, the shaft was supported by double-row angular contact ball bearings, and the restoring force had nonlinear spring characteristics involving quartic nonlinearity, in addition to quadratic and cubic ones. Experimental results were compared with the theoretical results regarding the probability of occurrence and the shape of the resonance curve. As the result, it has become clear that such analysis is very effective in predicting the occurrence of oscillations in a practical rotating shaft system.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Bearing, Quartic Nonlinearity, Summed-and-Differential Harmonic Oscillation, Super-Summed-and-Differential Harmonic Oscillation

1. ま え が き

玉軸受の角度のがたに起因して回転軸は非線形ばね特性をもつことがある⁽¹⁾。著者らは、単列深みぞ玉軸受で支えられた回転軸系に発生する各種の和差調波振動^{(2)~(4)}、超和差調波振動⁽⁵⁾⁽⁶⁾について、それらの振動特性を明らかにしたが、座標の三乗までの非線形項に起因して発生する振動に限られていた。一般にはさらに高次の非線形項も考えられ、また系がどのような非線形特性をもつかは軸受の種類、装置の寸法などに依存する。著者らは最近、複列アンギュラ玉軸受により両端支持された回転軸系では四乗の非線形項が現れ、それに起因して発生する分数調波振動と超分数調波振動について報告した⁽⁷⁾。四乗の非線形項に起因する振動には和差調波振動や超和差調波振動も考えられるが、著者の一人は四次の非線形復元力をもつ往復振動系の超和差調波振動⁽⁸⁾について解析したが、回転軸系における研究はないようである。

本論文では、複列アンギュラ玉軸受で支持し既報⁽⁷⁾

とは寸法、形状の異なる回転軸系における四乗の非線形項に起因する和差調波振動と超和差調波振動について、極座標表示の非線形成分⁽⁷⁾⁽⁹⁾と関連させて理論解析を行い、各振動の発生の難易、共振曲線の形状などを実験結果と比較検討した。

2. 運動方程式

簡単のため、円形断面の弾性軸に円筒形の回転体が取付けられた対称回転軸系において、回転体のたわみと傾きが連成しない場合の傾き振動を考える。この二自由度系はふれまわり振動をする最も簡単な系となる。座標軸 z を上下軸受中心線に一致させた静止直交座標系 $O-xyz$ において、回転体の傾きの xz, yz 平面への投影をそれぞれ θ_x, θ_y ⁽¹⁰⁾、回転体の極慣性モーメントを I_p 、直径まわりの慣性モーメントを I 、動不釣りあいを τ 、軸のばね定数を δ 、回転速度を ω 、時間を t 、減衰係数を c 、軸の復元モーメントの各非線形項を $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ で表す。さらに、発生する振動振幅と同程度の大きさをもつ代表角度 τ_0 を導入し、次の無次元量

* 昭和59年10月27日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和60年4月26日。

** 名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

*** 正員、名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

**** (株)東芝 (〒210 川崎市幸区堀川町72)。

$$\left. \begin{aligned} \theta'_x &= \theta_x / \tau_0, \theta'_y = \theta_y / \tau_0, \tau' = \tau / \tau_0, \\ i_p &= I_p / I, t' = t \sqrt{\delta / I}, \omega' = \omega / \sqrt{\delta / I}, \\ c' &= c / \sqrt{\delta I}, N'_{\theta x} = N_{\theta x} / (\delta \tau_0), \\ N'_{\theta y} &= N_{\theta y} / (\delta \tau_0) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

を用いると、無次元化された運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + N_{\theta x} &= (1 - i_p) \tau \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + N_{\theta y} &= (1 - i_p) \tau \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ただし、記号の肩の ' は省略してある。式(2)の中の $c, N_{\theta x}, N_{\theta y}$ は微小量 ε と同程度 [$O(\varepsilon)$ と書く] の大きさとする。復元モーメントを座標の四乗までの項で表せば、系のポテンシャルエネルギー V は

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 + V_N, V_0 = (\theta_x^2 + \theta_y^2) / 2, \\ V_N &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=3)}}^3 \varepsilon_{ij} \theta_x^i \theta_y^j + \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=4)}}^4 \beta_{ij} \theta_x^i \theta_y^j \\ &+ \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=5)}}^5 \mu_{ij} \theta_x^i \theta_y^j \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

で与えられる。上式中の V_0, V_N は復元モーメントのそれぞれ線形成分、非線形成分に相当する。また、 $N_{\theta x} = \partial V_N / \partial \theta_x, N_{\theta y} = \partial V_N / \partial \theta_y$ である。非線形成分の物理的意味を明確にするため、式(3)を $\theta_x = \theta \cos \varphi, \theta_y = \theta \sin \varphi$ により極座標 (θ, φ) に変換すると次式を得る。

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \{\varepsilon^{(1)} \cos \varphi + \varepsilon^{(2)} \sin \varphi + \varepsilon^{(3)} \cos 3\varphi \\ &+ \varepsilon^{(3)} \sin 3\varphi\} \theta^3 + \{\beta^{(0)} + \beta^{(2)} \cos 2\varphi \\ &+ \beta^{(2)} \sin 2\varphi + \beta^{(4)} \cos 4\varphi \\ &+ \beta^{(4)} \sin 4\varphi\} \theta^4 + \{\mu^{(1)} \cos \varphi + \mu^{(1)} \sin \varphi \\ &+ \mu^{(3)} \cos 3\varphi + \mu^{(3)} \sin 3\varphi + \mu^{(5)} \cos 5\varphi \\ &+ \mu^{(5)} \sin 5\varphi\} \theta^5 \\ &= V_0 + \{\varepsilon^{(1)} \cos (\varphi - \varphi_1) + \varepsilon^{(3)} \cos 3(\varphi - \varphi_3)\} \theta^3 \\ &+ \{\beta^{(0)} + \beta^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_2) \\ &+ \beta^{(4)} \cos 4(\varphi - \varphi_4)\} \theta^4 \\ &+ \{\mu^{(1)} \cos (\varphi - \varphi_1') + \mu^{(3)} \cos 3(\varphi - \varphi_3') \\ &+ \mu^{(5)} \cos 5(\varphi - \varphi_5')\} \theta^5 \end{aligned} \dots (4)$$

上式により、 V_N は φ が 2π 変化する間に n 回変動する各成分に分けられ、係数 $\varepsilon_{ij}, \beta_{ij}$ のポテンシャルエネルギーの項から生ずる非線形成分を $N(n) (n=0, 1, \dots, 4)$ 、係数 μ_{ij} の項から生ずるものを $N'(n) (n=1, 3, 5)$ とする。式(4)では係数の肩の () 内の数字は n を表す。式(3)、(4)の係数間の関係は既報⁽⁷⁾⁽⁹⁾に示されている。式(2)の振動数方程式は

$$G(p) \equiv 1 + i_p \omega p - p^2 = 0 \dots (5)$$

で与えられる。式(5)から求まる二つの固有振動数を $p_f (>0), p_b (<0)$ とする。

3. 理論解析

和差調波・超和差調波振動の各共振点 ω_0 付近では、調和振動以外に二つの振動が同時に発生する。これらの振動の全位相を θ_f, θ_b とすれば、その瞬間振動数 $\dot{\theta}_f, \dot{\theta}_b$ はそれぞれ $\omega = \omega_0$ における固有振動数 p_{f0}, p_{b0} にほぼ等しく、 $O(\varepsilon^0)$ の精度で

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_f &= (p_{f0} / \omega_0) \omega (\equiv \omega_f), \dot{\theta}_b = (p_{b0} / \omega_0) \omega (\equiv \omega_b), \\ k \omega_f + l \omega_b &= m \omega \quad [\text{ただし, } k, l \text{ は整数 } (\neq 0), \\ m &= 1, 2, 3, |k| + |l| + |m| = 5] \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

が成立する。式(6)を満たす振動を記号 $[(kp_f + lp_b) / m]$ で表す。 $O(\varepsilon)$ の精度でこの振動解を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x + R_f \cos \theta_f + R_b \cos \theta_b + P \cos \theta_\omega \\ &+ \varepsilon(a_f \cos \theta_f + b_f \sin \theta_f \\ &+ a_b \cos \theta_b + b_b \sin \theta_b) \\ \theta_y &= R_f \sin \theta_f + R_b \sin \theta_b + P \sin \theta_\omega \\ &+ \varepsilon(a'_f \sin \theta_f + b'_f \cos \theta_f \\ &+ a'_b \sin \theta_b + b'_b \cos \theta_b) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

ただし、 $\theta_f = \omega_f t + \delta_f, \theta_b = \omega_b t + \delta_b, \theta_\omega = \omega t + \beta$ である。振幅 $R_f, R_b, a_f, \dots$ 、および位相差 δ_f, δ_b は時間的にゆるやかに変化する $O(\varepsilon^0)$ の大きさの量とする。また、調和振動解は $O(\varepsilon^0)$ の精度で十分であるので、式(7)では全位相 θ_ω をもつ $O(\varepsilon)$ の大きさの項は省略してある。この調和振動解は既報⁽⁷⁾と同様である。

次に、式(7)を式(2)に代入し、 $O(\varepsilon)$ の精度で振動数 ω_f, ω_b について調和バランスをとれば、 $R_f, R_b, \delta_f, \delta_b$ に関する一階の連立微分方程式が得られる。それを $O(\varepsilon^0)$ の精度で解けば、定常解 $R_f = R_{f0}, R_b = R_{b0}$ 間の振幅比 ν を与える次式を得る。

$$\nu^2 \equiv (R_{b0} / R_{f0})^2 = (lp_{f0}) / (kp_{b0}) \dots (8)$$

上式から、 lp_{f0} と kp_{b0} の値は同符号であり、また $p_{f0} > 0, p_{b0} < 0$ であるから、振動 $[(kp_f + lp_b) / m]$ が発生するには少なくとも k と l は異符号でなければならないことがわかる。さらに $k < 0, l > 0$ では式(6)を満たす共振点は存在しないことを考慮すれば、この二自由度系で発生可能な和差調波・超和差調波振動は表1に示されるものに限られる。一例として、 $[3p_f - p_b]$ 様式の和差調波振動について $R_f, R_b, \delta_f, \delta_b$ に関する一階の連立微分方程式を示すと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} (2\omega_f - i_p\omega)R_f\dot{\delta}_f &= G(\omega_f)R_f + 4\beta^{(0)}(R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2)R_f - 6R_f^2R_bP(\mu_c^{(1)}\cos\phi + \mu_s^{(1)}\sin\phi) \\ (2\omega_f - i_p\omega)\dot{R}_f &= -c\omega_fR_f - 6R_f^2R_bP(\mu_c^{(1)}\sin\phi - \mu_s^{(1)}\cos\phi) \\ (2\omega_b - i_p\omega)R_b\dot{\delta}_b &= G(\omega_b)R_b + 4\beta^{(0)}(2R_f^2 + R_b^2 + 2P^2)R_b - 2R_f^2P(\mu_c^{(1)}\cos\phi + \mu_s^{(1)}\sin\phi) \\ (2\omega_b - i_p\omega)\dot{R}_b &= -c\omega_bR_b + 2R_f^2P(\mu_c^{(1)}\sin\phi - \mu_s^{(1)}\cos\phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\phi = 3\delta_f - \delta_b$ である。上式から、振動 $[3p_f - p_b]$ に関する非線形成分は、方向性のない成分 $N(0)$ と $N'(1)$ 成分であることがわかる。式(9)は既報⁽⁶⁾と同様な方法で解けるが、その結果、定常解は振幅が零でない解 R_{f0} 、 R_{b0} 、 ϕ_0 と振幅が零の解 $R_{f0} = R_{b0} = 0$ に分けられる。振幅が零でない解については、式(8)より

$$\nu^2 \equiv (R_{b0}/R_{f0})^2 = -p_{f0}/(3p_{b0}) \dots\dots\dots (10)$$

となる。式(9)、(10)から振幅 R_{f0} に関する共振曲線の式が得られる。

各振動に対する共振曲線を以下に列記する。

$$\left. \begin{aligned} \text{振動 } [3p_f - p_b] : & \left(\frac{\nu}{9\nu^2 + 1} \right)^2 [4\sigma - 4\beta^{(0)}\{(7\nu^2 + 5)R_{f0}^2 + 8P^2\}]^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{c\omega}{\omega_0} \right)^2 = (2\mu^{(1)}PR_{f0}^2)^2 \quad (a) \\ \text{振動 } [p_f - 3p_b] : & \left(\frac{\nu}{\nu^2 + 9} \right)^2 [4\sigma - 4\beta^{(0)}\{(5\nu^2 + 7)R_{f0}^2 + 8P^2\}]^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{c\omega}{\omega_0} \right)^2 = (4\mu^{(3)}\nu^2 PR_{f0}^2)^2 \quad (b) \\ \text{振動 } [2p_f - 2p_b] : & \left(\frac{\nu}{\nu^2 + 1} \right)^2 [\sigma - 2\beta^{(0)}\{3(\nu^2 + 1)R_{f0}^2 + 4P^2\}]^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{c\omega}{\omega_0} \right)^2 = (3\mu^{(1)}\nu PR_{f0}^2)^2 \quad (c) \\ \text{振動 } [(2p_f - p_b)/2] : & \left(\frac{\nu}{4\nu^2 + 1} \right)^2 [3\sigma - 4\beta^{(0)}\{(5\nu^2 + 4)R_{f0}^2 + 6P^2\}]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c\omega}{\omega_0} \right)^2 = (3\mu^{(1)}P^2 R_{f0})^2 \quad (d) \\ \text{振動 } [(p_f - 2p_b)/2] : & \left(\frac{\nu}{\nu^2 + 4} \right)^2 [3\sigma - 4\beta^{(0)}\{(4\nu^2 + 5)R_{f0}^2 + 6P^2\}]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c\omega}{\omega_0} \right)^2 = (6\mu^{(3)}\nu P^2 R_{f0})^2 \quad (e) \\ \text{振動 } [(p_f - p_b)/3] : & \left(\frac{\nu}{\nu^2 + 1} \right)^2 [\sigma - 2\beta^{(0)}\{3(\nu^2 + 1)R_{f0}^2 + 4P^2\}]^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{c\omega}{\omega_0} \right)^2 = (2\mu^{(3)}P^3)^2 \quad (f) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに $\sigma = (\omega/\omega_0)^2 - 1$ であり、 $O(\varepsilon^0)$ の精度では $G(\omega_f) = G(\omega_b) = -\sigma$ が成立する。また式(11)の各式の ν には式(8)を用いる。定常解の安定判別は既報⁽⁶⁾と同様に行える。式(11)において、非線形成分 $N(0)$ の係数 $\beta^{(0)}$ は共振曲線の傾きを決め、右辺の非線形成分 $N'(n)$ の係数 $\mu^{(1)}$ 、 $\mu^{(3)}$ は振動発生に関係する。後者の係数の種類は各振動で異なり、関与する非線形成分を表1にまとめた。一般に、実際の系では $N'(n)$ の n が小さい成分ほどその大きさは大きい⁽⁶⁾ことを考慮すれば、表1に列挙した各振動の発生の難易は非線形成分 $N'(n)$ のどの成分が関与するかを調べればある程度予測できる。しかし、共振曲線を表す式は各振動で異なるため、共振曲線に対する各パラメータの影響

も考慮して発生の可能性を検討しなければならない。一例として、減衰係数 c の影響を調べた共振曲線を図1~6に示す。図の縦軸には振幅の和 $R_{f0} + R_{b0}$ をとった。図1~6では、 $i_p = 0.23$ 、 $\tau = 0.25$ (ただし、図6では $\tau = 0.5$)、 $\beta^{(0)} = 0.1$ 、 $\mu^{(1)} = 0.1$ 、 $\mu^{(3)} = 0.05$ とした。各図から、 c の値が大きくなるにつれて共振曲線は ω 軸から離れることから、振動が発生し難くなることがわかる。 $c = 0$ の場合、振動 $[(p_f - p_b)/3]$ の共振曲線(図6)は ω 軸と2点で交わるが、他の振動(図1~5)では1点で交わる。

振動発生に関係する非線形成分 $N'(n)$ が共振曲線に及ぼす影響を示す一例として、振動 $[3p_f - p_b]$ に関与する成分 $N'(1)$ の影響を図7に示す。 $\mu^{(1)}$

図1 和差調波振動 $[3p_f - p_b]$

図2 和差調波振動 $[p_f - 3p_b]$

表 1 和差調波・超和差調波振動に関与する非線形成分とその発生状況

Type	Mode		Nonlinear component		Experimental result*	
	Two-degree-of-freedom system	Four-degree-of-freedom system	Inclination of a resonance curve	Intensity of occurrence	Rotor R ₁	Rotor R ₂
Summed-and-differential harmonic oscillation		$[3p_1+p_2]$	$N(0)$	$N'(3)$	High speed	
		$[p_1+3p_2]$				
		$[-3p_3-p_4]$	$N(0)$	$N'(5)$	x	High speed
		$[-p_3-3p_4]$			High speed	High speed
	$[3p_f-p_b]$	$[3p_1-p_3]$	$N(0)$	$N'(1)$		
		$[3p_1-p_4]$				
		$[3p_2-p_3]$			O	High speed
		$[3p_2-p_4]$			x	High speed
	$[p_f-3p_b]$	$[p_1-3p_3]$	$N(0)$	$N'(3)$	High speed	
		$[p_1-3p_4]$			High speed	
		$[p_2-3p_3]$			O	x
		$[p_2-3p_4]$			High speed	High speed
		$[2p_1+2p_2]$	$N(0)$	$N'(3)$		
		$[-2p_3-2p_4]$	$N(0)$	$N'(5)$	High speed	High speed
	$[2p_f-2p_b]$	$[2p_1-2p_3]$	$N(0)$	$N'(1)$		
		$[2p_1-2p_4]$				
		$[2p_2-2p_3]$			O	High speed
		$[2p_2-2p_4]$			High speed	High speed
Super-summed-and-differential harmonic oscillation		$[(2p_1+p_2)/2]$	$N(0)$	$N'(1)$	High speed	
		$[(p_1+2p_2)/2]$			O	High speed
		$[(-2p_3-p_4)/2]$	$N(0)$	$N'(5)$	x	x
		$[(-p_3-2p_4)/2]$			x	High speed
	$[(2p_f-p_b)/2]$	$[(2p_1-p_3)/2]$	$N(0)$	$N'(1)$	High speed	
		$[(2p_1-p_4)/2]$			High speed	
		$[(2p_2-p_3)/2]$			O	O
		$[(2p_2-p_4)/2]$			x	x
	$[(p_f-2p_b)/2]$	$[(p_1-2p_3)/2]$	$N(0)$	$N'(3)$	O	High speed
		$[(p_1-2p_4)/2]$			High speed	High speed
		$[(p_2-2p_3)/2]$			O	O
		$[(p_2-2p_4)/2]$			x	High speed
		$[(p_1+p_2)/3]$	$N(0)$	$N'(1)$	x	High speed
		$[(-p_3-p_4)/3]$	$N(0)$	$N'(5)$	x	x
	$[(p_f-p_b)/3]$	$[(p_1-p_3)/3]$	$N(0)$	$N'(3)$	x	High speed
		$[(p_1-p_4)/3]$			x	High speed
		$[(p_2-p_3)/3]$			x	x
		$[(p_2-p_4)/3]$			x	x

*) O: appearance; x: non-appearance; High speed: resonance point is out of experimented speed range; /: no resonance point.

の値が大きいほど共振曲線は ω 軸に近づくため、振動が発生しやすくなることがわかる。

後述の装置は回転体のたわみと傾きが連成する四自由度系であり、上述の二自由度系とは非線形項の数、発生する振動の種類などが異なる。四自由度系では固有振動数 p_n ($n=1\sim 4$, $p_1 > p_2 > 0 > p_3 > p_4$) は 4 個存

在するため、式(6)に対応する関係式 $kp_i + lp_j = m\omega$ を満たす振動の種類も増え、さらに 3 個以上の振動が同時に発生する $\pm p_i \pm p_j \pm 2p_k = \omega$, $\pm p_i \pm p_j \pm p_k \pm p_l = \omega$ 様式の和差調波振動や $\pm p_i \pm p_j \pm p_k = 2\omega$ 様式の超和差調波振動の発生も考えられる。このうち 2 個の固有振動数が関与する振動については、三乗までの非線形項に起因する振動について既報⁽⁹⁾で示したように、 $p_f > 0$, $p_b < 0$ の制限をなくし正負のいずれの値もととり得るとすれば、簡単な二自由度系を用いて関与する非線形成分の種類とか共振曲線の形状などに関して四自由度系と定性的に同じ結果を得ることができる。その解析において、 $kp_i + lp_j = |k||p_i| + |l||p_j| = m\omega$ の関係が成立する振動のみが発生可能であることも前と同様に示すことができる。したがってここでは、四自由度系に発生する振動のうち調和振動成分以外に 2 個の振動が同時に発生するものについての解析結果のみを表 1 に示した。

図 3 和差調波振動 $[2p_f - 2p_b]$

図 4 超和差調波振動 $[(2p_f - p_b)/2]$

図 5 超和差調波振動 $[(p_f - 2p_b)/2]$

図 6 超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/3]$

図 7 和差調波振動 $[3p_f - p_b]$ に及ぼす非線形成分 $N'(1)$ の影響

4. 実験装置と実験結果

図8に実験装置の概略を示す。1個の対称な回転体Rを最下端にもつ円形断面の弾性軸Sを二つの玉軸受で鉛直に支持し、上部に複列自動調心玉軸受(#1200)、下部に複列アンギュラ玉軸受(#5204)を使用した。装置では、下部軸受の角度のがたの中心と上下軸受中心線とがわずかにずれているため、軸は非対称性の非線形ばね特性をもち、ずれの量が変わるとそのばね特性も変化する。回転軸の寸法は、直径 $d=12$ mm, 軸受間距離 $b=480$ mm, 下部軸受と回転体中心の距離 $a=220$ mmである。2種類の回転体を用い、回転体 R_1 の寸法は質量 $m=11.94$ kg, $I_p=0.0361$ kg $\cdot$ m 2 , $I=0.0384$ kg $\cdot$ m 2 , 回転体 R_2 は $m=4.27$ kg, $I_p=0.0200$ kg $\cdot$ m 2 , $I=0.0106$ kg $\cdot$ m 2 である。実験では、

図8 実験装置の概略

水平面内の直角な2方向(x, y 方向)について回転体のたわみ振動を光学的に測定した。

図9に、回転体 R_1 を使用した場合の系の固有振動数 p_i ($i=1\sim4$)の実測値を実線で示した。また破線は結合振動数(たとえば p_2-3p_3 , $2p_2-2p_3$ など)を表し、対応する各種の振動の共振点は図9中の○印の横座標で示される。いろいろな組立状態で実験を行い、発生した振動が表1にまとめてある。表1中の○印は発生した場合、×印は発生しなかった場合を示す。なお3章で述べた調和振動以外に3個以上の振動が同時に発生する振動については、共振点が高速で測定範囲外のものや共振点が存在しないものも多く、また測定範囲

図9 p - ω 線図(回転体 R_1) 図10 回転体 R_1 を用いた系における共振曲線 図11 回転体 R_2 を用いた系における共振曲線

図 12 和差調波振動 $[3p_2 - p_3]$ の波形 ($\omega = 2491 \text{ rpm}$)

内にあるものについてもその発生は認められなかった。図 10 は、回転体 R_1 を用いた系に発生した和差調波振動 $[3p_2 - p_3]$, $[p_2 - 3p_3]$, $[2p_2 - 2p_3]$, および超和差調波振動 $[(p_1 + 2p_2)/2]$ の共振曲線を示す。また図 11 は、回転体 R_2 を用いた場合に得られた超和差調波振動 $[(2p_2 - p_3)/2]$, $[(p_2 - 2p_3)/2]$ の共振曲線を示す。いずれの図においても、縦軸には軸の変位の最大値がとられている。

図 12 に図 10 の共振曲線の $\omega = 2491 \text{ rpm}$ における和差調波振動 $[3p_2 - p_3]$ の波形の一例を示す。発生振動数を $\omega_2 (= p_2)$, $\omega_3 (= p_3)$ とすると、同じ波形が繰返される AA 間の振動数比は $\omega_2 : \omega_3 : \omega = 11 : (-7) : 40$ であるので、 $3\omega_2 - \omega_3 = \omega$ の関係が成立していることがわかる。

表 1 において理論結果と実験結果を比較すると、発生強さに成分 $N'(1)$ が関与する振動が最も発生しやすく、成分 $N'(3)$ が関与する振動は一部発生し、成分 $N'(5)$ が関与する振動は発生していない。このことから、非線形成分 $N'(n)$ ($n=1, 3, 5$) の n が小さい成分が関与する振動ほど実際に発生しやすいことがわかる。

5. 結 論

1 個の回転体をもつ対称回転軸系に発生する四乗の非線形項に起因する和差調波・超和差調波振動について調べた結果、以下のことが明らかになった。

(1) 四乗の非線形項をもつ二自由度系 ($p_f > 0 > p_b$) では、 $kp_f + lp_b = m\omega$ ($|k| + |l| + |m| = 5$) の様式の振動のうち、 $[3p_f - p_b]$, $[p_f - 3p_b]$, $[2p_f - 2p_b]$ の様式の和差調波振動と、 $[(2p_f - p_b)/2]$, $[(p_f - 2p_b)/2]$,

$[(p_f - p_b)/3]$ 様式の超和差調波振動が発生する可能性がある。

(2) 四乗の非線形項をもつ四自由度系 ($p_1 > p_2 > 0 > p_3 > p_4$) では、 $kp_i + lp_j = m\omega$, $\pm p_i \pm p_j \pm 2p_k = \omega$, $\pm p_i \pm p_j \pm p_k \pm p_l = \omega$, $\pm p_i \pm p_j \pm p_k = 2\omega$ の振動が考えられる。二自由度系と同様に解析できる $kp_i + lp_j = m\omega$ の振動については、以下で添字 i, j は 1, 2, k, l は 3, 4 の値をとるとすれば、 $[3p_i + p_j]$, $[-3p_i - p_j]$, $[3p_i - p_k]$, $[-3p_i + p_k]$, $[2p_i + 2p_j]$, $[-2p_i - 2p_j]$, $[2p_i - 2p_k]$ 様式の和差調波振動と、 $[(2p_i + p_j)/2]$, $[(2p_i - p_k)/2]$, $[(p_i - 2p_k)/2]$, $[(p_i + p_j)/3]$, $[(p_i - p_k)/3]$ 様式の超和差調波振動が発生する可能性がある。

(3) 四乗の非線形項に起因する和差調波・超和差調波振動には極座標表示の非線形成分 $N(0)$ と $N'(n)$ ($n=1, 3, 5$ のいずれか) が関与し、前者は共振曲線の傾きを決め、後者は振動発生強さに関係する。

(4) 実験装置に複列アンギュラ玉軸受を用いた場合、四乗の非線形項に起因する各種の和差調波・超和差調波振動が発生した。

(5) 実験では、非線形成分 $N(0)$, $N'(1)$ が関与する振動のうち和差調波振動 $[3p_2 - p_3]$, $[2p_2 - 2p_3]$ と超和差調波振動 $[(p_1 + 2p_2)/2]$, $[(2p_2 - p_3)/2]$ が発生し、非線形成分 $N(0)$ と $N'(3)$ が関与する振動のうち和差調波振動 $[p_2 - 3p_3]$ と超和差調波振動 $[(p_1 - 2p_3)/2]$, $[(p_2 - 2p_3)/2]$ が発生した。成分 $N(0)$ と $N'(5)$ が関与する振動は発生しなかった。

(6) 一般に、 $N'(n)$ の n が小さい非線形成分が関与する和差調波・超和差調波振動ほど実際には発生しやすい。

文 献

- (1) 山本, 機論, 21-111 (昭 30), 853.
- (2) 山本・ほか 2 名, 機論, 41-341 (昭 50), 133.
- (3) 山本・ほか 2 名, 機論, 46-405, C (昭 55), 465.
- (4) 山本・ほか 3 名, 文献(3)の 473 ページ.
- (5) 山本・ほか 3 名, 機論, 47-418, C (昭 56), 719.
- (6) 山本・ほか 2 名, 機論, 50-456, C (昭 59), 1390.
- (7) 石田・ほか 2 名, 本論文 1280 ページ.
- (8) 山本・ほか 2 名, 機論, 42-357 (昭 51), 1373.
- (9) 山本・石田, 機論, 41-345 (昭 50), 1374.
- (10) 山本, 機械力学, (昭 45), 221, 朝倉書店.

討 論

〔質問〕 田村英之〔九州大学工学部〕

式(11)の下, および5章の結論(3)に, 「 $\beta^{(0)}$ は共振曲線の傾きを決め(中略), $\mu^{(1)}, \mu^{(3)}$ は振動発生 of 強さに関係…」とあるが, 「振動発生 of 強さ」とはどのように定義される量か. 図7に, $\mu^{(1)}$ が $R_{fo} + R_{bo}$ に及ぼす影響が示されているが, $\beta^{(0)}$ はこの曲線をどのように変えるのか例示していただきたい. その変化も, 振動発生 of 強さの変化と言えるのではないか. また図7の説明文中に $\mu^{(1)}$ は曲線を ω 軸に近づけることが「振動を発生しやすくする」とあるのは, 振動発生 of 強さと同義か.

〔回答〕 共振曲線の形状は振動の種類により異なり, たとえば本論文の各振動にみられるように振幅が大きいところにおいて小振幅で曲線が存在しないもの, あるいは既報(付1)の1/2次分数調波振動の場合のように振幅が大きくなると曲線が閉じてなくなるものなどさまざまであるので, 一つの量(たとえば最大振幅, 発生範囲など)だけで振動発生 of 強さや発生 of のしやすさを定義できないが, 一般に, より広い範囲で, より大きな振幅で振動が発生するとき発生がより強くなったと表現した. また, 実際の装置でより大きな確率で発生すると思われる場合に発生しやすいと解釈した. たとえば図7において $\mu^{(1)}$ が大きくなると共振曲線の存在する回転速度領域が広がり, また共振曲線が振幅の小さいところへ延びてくるので, 小さな外乱でその共振曲線へjumpするため発生しやすくなること

(付1) 山本・林, 機論, 28-194 (昭37), 1289.

付図1 和差調波振動 $[3p_f - p_b]$ に及ぼす非線形成分 $N'(0)$ の影響

がわかる. 実際には, この発生強さと発生 of のしやすさは結果的に同じになる場合が多くある.

図7との比較のため付図1に $\beta^{(0)}$ の影響を示す. 両者の比較から共振曲線は全く異なる変化をすることがわかる. $\mu^{(1)}$ が増加するときには図7のように傾きが一定のまま共振曲線が拡大し, またその存在範囲も小振幅側へ延びており, 一方 $\beta^{(0)}$ が変化するときには付図1のように共振曲線が小振幅側へ延びないままで傾きが著しく変化している. 傾きの変化に伴って振幅なども多少は変化するが, 付図1の変化の主な特徴としては, $\beta^{(0)}$ は共振曲線の傾きに影響するということができる. 非線形項の影響を分類してその特徴を明らかにするためには, 共振曲線の主たる変化に注目してその影響をとらえることが妥当であると考え.