段付棒に作用する衝撃力の測定理論*

柳 原 直 人**, 斎 藤 博**

A Measuring Theory of Impact Force Acting on a Bar with Two Different Diameters

by Naoto YANAGIHARA and Hiroshi SAITO

The true value of impact force, in high speed deformation tests of metals, is commonly measured by the use of the Hopkinson-bar method. But, a defect of this method is the restriction of measurable time because of the length of the bar. One of the authors suggested constructing a measuring theory for impact force acting on a bar with uniform cross sectional area, based on the theory of the propagation of longitudinal elastic stress waves. From the stresses detected at two points on the bar, two stress waves travelling in opposite directions along the bar axis are separated, and the impact force is estimated, without the restriction of the measuring time. This paper presents a new theory for measuring the impact force which occurs on a bar having two different diameters. The results of the experiments clearly confirm the correctness and usefulness of this theory.

Key Words: Shock, Measurement, One Dimensional Elastic Stress Wave, Different Cross Sectional Area, Use of Micro Computer

1. 緒 言

高速変形試験などにおいて材料に作用する衝撃力を正確に測定する場合には、分割ホプキンソン圧縮棒法(SHPB法)が多く用いられている。しかし、この方法は棒の長さによって測定時間が制約されるため、測定時間が長くなったり、試験装置の都合上長い棒を使用できない場合などには、応力波の反射の影響によって測定できなくなる。そのため、最近では圧電素子を衝撃面に接着して測定する方法も検討されている。

著者らは、衝撃力を受ける丸棒において、衝撃力を受ける断面から少し離れた2箇所にひずみゲージを接着し、この2箇所で測定した応力の値から、測定時間の制約を受けずに衝撃力を求める理論⁽¹⁾と衝撃面の速度および変位量を求める理論を導き、その理論に基づいた Yanagihara-bar 法の測定システムを完成させた⁽²⁾⁽³⁾。これにより、短い棒を使っても丸棒の先端に加わる衝撃力、速度および変位量が時間の制約を受けずに測定できるようになった。しかし、これまでの理論では、衝撃力の作用する部分と、ひずみゲージで応

力を測定する部分とが、連続した同一の断面積を有する棒でなければ適用できなかった。

本研究では、先の理論に棒の断面積が異なる境界における応力波の透過と反射の影響を加えることにより、衝撃力が作用する部分と、ひずみゲージで応力を測定する部分の断面積が異なる段付棒においても適用できる理論を導いている。そして、実験によって理論が有効であることを確認している。また、SHPB法等において、加圧棒の直径に対して試料の直径を減少させた場合に生ずる測定誤差の増加率を示している。

2. 分離された応力波の理論⁽¹⁾

図1に示すように、同一材料で断面積一様な丸棒の任意の点にa点とb点を考え、その両者の間隔を l_1 とする。この丸棒内を応力波が伝ばしているとき、時刻 T にa点を通過している左右からの応力波の値を $\sigma_{La}(T)$, $\sigma_{Ra}(T)$ とする。

この時のa点とb点の応力 $\sigma_a(T)$, $\sigma_b(T)$ は、応力波がa点からb点まで伝ばするのに必要な時間を t_1 とすると、それぞれ、次式によって表される。

$$\sigma_a(T) = \sigma_{La}(T) + \sigma_{Ra}(T) \cdots \cdots (1)$$

$$\sigma_b(T) = \sigma_{La}(T - t_1) + \sigma_{Ra}(T + t_1) \cdots \cdots (2)$$

式(1)と、時間をずらした式(2)より、次式

* 昭和60年11月20日 関西支部第245回講演会において講演, 原稿受付 昭和60年3月7日。

** 正員, 玉川大学工学部(〒194 町田市玉川学園6-1-1)。

$$\sigma_{La}(T) = \sigma_a(T) - \sigma_b(T - t_1) + \sigma_{La}(T - 2t_1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

が求められる。この式(3)を $2t_1$ 時間ずつずらした式を次々に代入して整理し、時間をずらして移項した式(2)に代入することにより、左右方向からの応力波の値は、次式のように求まる。

$$\sigma_{La}(T) = \sum_{n=0}^k \sigma_a(T - 2nt_1) - \sum_{n=0}^k \sigma_b(T - t_1 - 2nt_1) + \sigma_{La}(T - 2\{K+1\}t_1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_{Ra}(T) = \sum_{n=0}^k \sigma_b(T - t_1 - 2nt_1) - \sum_{n=1}^k \sigma_a(T - 2nt_1) - \sigma_{La}(T - 2\{K+1\}t_1) \quad \dots\dots\dots (5)$$

3. 衝撃応力の測定理論

時刻 T において、図2に示される段付棒内の d 点を通して左右からの応力波を $\sigma_{Ld}(T)$, $\sigma_{Rd}(T)$, 段付部の c 点から右側に発進する応力波を $\sigma_{Lc}(T)$, c 点から右側から入射してくる応力波を $\sigma_{Rc}(T)$ とする。

また、 a 点および d 点の方向から進行する応力波が c 点を通してときの反射率 α_1, α_2 および透過率 β_1, β_2 は、 c 点の右側と左側の断面積を A_1, A_2 とすると、次式のように表される⁽⁴⁾。

$$\alpha_1 = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\alpha_2 = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\beta_1 = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\beta_2 = \frac{2A_2}{A_1 + A_2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

応力波が d 点から c 点までの距離 l_3 を進行するのに必要な時間を t_3 とすると、時刻 T に c 点から右側に発進する応力波 $\sigma_{Lc}(T)$ は、その時に c 点から右側から入射した応力波の反射波と、 t_3 時間前に d 点を通してきた応力波の透過波との和であり、次式のように表される。

$$\sigma_{Lc}(T) = \sigma_{Rc}(T) \cdot \alpha_1 + \sigma_{Ld}(T - t_3) \cdot \beta_2 \quad \dots\dots (10)$$

図1 弾性丸棒内の応力波伝ばモデル

また、時刻 T に d 点を通して右側からの応力波 $\sigma_{Rd}(T)$ は、時刻 $T - t_3$ に c 点から右側から入射してきた応力波の透過波と、時刻 $T - 2t_3$ に d 点を左側から通過していった応力波によって c 点で発生した反射波との和であり、次式のように表される。

$$\sigma_{Rd}(T) = \sigma_{Rc}(T - t_3) \cdot \beta_1 + \sigma_{Ld}(T - 2t_3) \cdot \alpha_2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(10)を t_3 時間だけずらして移行し、式(11)に代入して整理すると、

$$\sigma_{Rd}(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{Rc}(T - t_3) \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \alpha_2) + \sigma_{Lc}(T - t_3) \cdot \alpha_2 \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここで $\beta_1 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$ より、式(12)は次式のようになる。

$$\sigma_{Rd}(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{Rc}(T - t_3) + \sigma_{Lc}(T - t_3) \cdot \alpha_2 \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

次に、式(10)を t_3 時間遅らせて移項することにより、次式が求まる。

$$\sigma_{Ld}(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{Lc}(T + t_3) - \sigma_{Rc}(T + t_3) \cdot \alpha_1 \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

時刻 T における d 点の応力は、その時に d 点を通して左右からの応力波の和として表され、これに $\alpha_2 = -\alpha_1$ の条件を加えることにより

$$\begin{aligned} \sigma_d(T) &= \sigma_{Ld}(T) + \sigma_{Rd}(T) \\ &= \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{Lc}(T + t_3) + \sigma_{Rc}(T - t_3) \\ &\quad + [\sigma_{Rc}(T + t_3) + \sigma_{Lc}(T - t_3)] \cdot \alpha_2 \} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

となる。いま、 c 点から a 点までの距離 l_2 が l_3 と等しい場合には $t_2 = t_3$ となり、これらの応力波を a 点を通過する応力波で表すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_a(T) &= \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{La}(T + 2t_3) + \sigma_{Ra}(T - 2t_3) \\ &\quad + [\sigma_{Ra}(T) + \sigma_{La}(T)] \cdot \alpha_2 \} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、 a 点から b 点までの距離 l_1 が l_3 と等しい

図2 段付丸棒内の応力波モデル

場合には $t_3 = t_1$ となり、この式に式(4)、(5)の時間をずらし、代入して整理し、 $1 + \alpha_2 = \beta_1$ の条件を加えると、次式が求まる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_a(T+2t_1) - \sigma_b(T+t_1) + \sigma_a(T) \cdot \beta_1 - \sigma_b(T-t_1) + \sigma_a(T-2t_1) \} \dots\dots\dots (17)$$

上式において、丸棒の両断面積が等しい場合には、 $\beta_2 = \beta_1 = 1$ となる。

また、d点からc点までの距離 l_3 を l_1 と等しくし、c点からa点までの距離 l_2 を l_1 の2倍とした場合には、 $t_3 = t_1$ 、 $t_2 = 2t_1$ となり、同様に整理すると次式が求まる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_a(T+3t_1) - \sigma_b(T+2t_1) + [\sigma_a(T+t_1) - \sigma_b(T) + \sigma_a(T-t_1)] \cdot \beta_1 - \sigma_b(T-2t_1) + \sigma_a(T-3t_1) \} \dots\dots\dots (18)$$

以降、 $l_3 = l_1$ とし、 k を1より大きい整数として、 $l_2 = kl_1$ とした場合には、d点の応力は次式によって表すことができる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \left\{ \sigma_a(T+[k+1]t_1) - \sigma_b(T+kt_1) + \left[\sum_{n=0}^{k-1} \sigma_a(T+[k-1-2n]t_1) - \sum_{n=1}^{k-1} \sigma_b(T+[k-2n]t_1) \right] \cdot \beta_1 - \sigma_b(T-kt_1) + \sigma_a(T-[k+1]t_1) \right\} \dots\dots (19)$$

次に、断面積の異なる部分の長さ l_3 を応力測定点a、bの間隔 l_1 の2倍とし、また、 l_2 を l_1 と等しくした場合を考える。このとき、 $t_3 = 2t_1$ 、 $t_2 = t_1$ となるため、まず式(15)に $t_3 = 2t_1$ を代入すると次式のようになる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{Lc}(T+2t_1) + \sigma_{Rc}(T-2t_1) + [\sigma_{Rc}(T+2t_1) + \sigma_{Lc}(T-2t_1)] \cdot \alpha_2 \} \dots\dots (20)$$

この式の右辺の応力波をa点を通過する応力波で表すと、次式のようになる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_{La}(T+3t_1) + \sigma_{Ra}(T-3t_1) + [\sigma_{Ra}(T+t_1) + \sigma_{La}(T-t_1)] \cdot \alpha_2 \} \dots\dots (21)$$

この式に、式(4)、(5)の時間をずらして代入し、 $1 + \alpha_1 = \beta_1$ として整理すると次式が求まる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_a(T+3t_1) - \sigma_b(T+2t_1) + \sigma_a(T+t_1) - \sigma_b(T) \cdot \beta_1 + \sigma_a(T-t_1) - \sigma_b(T-2t_1) + \sigma_a(T-3t_1) \} \dots\dots\dots (22)$$

k を2より大きい整数として、 l_3 を l_1 の k 倍とし、 l_2 と l_1 を等しくした場合には、 $t_3 = kt_1$ 、 $t_2 = t_1$ となり、

同様に整理することにより次の式が求まる。

$$\sigma_a(T) = \frac{1}{\beta_2} \{ \sigma_a(T+[k+1]t_1) - \sigma_b(T+kt_1) + \sigma_a(T+[k-1]t_1) + \left[\sum_{n=1}^{k-2} \sigma_a(T+[k-1-2n]t_1) - \sum_{n=1}^{k-1} \sigma_b(T+[k-2n]t_1) \right] \cdot \beta_1 + \sigma_a(T-[k-1]t_1) - \sigma_b(T-kt_1) + \sigma_a(T-[k+1]t_1) \} \dots\dots\dots (23)$$

このように、d点の応力は、測定点までの距離が増加すると演算回数は多くなるが、衝撃が加わる部分と応力を測定する部分の断面積が異なる場合においても2箇所の測定応力から求めることができる。また、前報⁽¹⁾で示したように、これらの式は、d点が棒の端面である場合にも適用できる。

4. 衝撃実験による理論の確認

上記の理論を確かめるため、次のような実験を行った。実験装置は、図3のブロック線図に示すようなもので、測定棒と衝撃棒は鋳鉄製のガイドと空圧式の加速装置により同軸上に設置されている。衝撃棒は、直径25 mm、長さ400 mmの鋼製の丸棒である。測定棒は長さ270 mmの工具鋼製の丸棒で、測定部の直径25 mm、先端は図4のように長さ30、6 mmだけ直径を40 mmから10 mmまでの間で変化させ、その段付部から30、6 mm間隔でaゲージとbゲージが接着されている。ゲージはゲージ長2 mmのP形とN形の半導体ゲージで、それぞれ軸対称に2枚ずつ接着されており4ゲージ法で測定される。ゲージはブリッジボックスに接続され、その出力波形は周波数帯域150 kHzのデジタルオシロスコープに送られ、1 μ s間隔でサンプリングされて記憶される。記憶された応力波形はマイクロコンピュータへRS-232C方式、2400ボーで転送され、理論式に従って計算されてプリンタで記録される。実験におけるブリッジ回路からの出力電圧は、測定棒の応力10 MPa当たり14 mVである。

図5の上方は、先端部の直径比 d/D が0.8の測定

図3 衝撃実験装置のブロック線図

棒の後方から 4.0 m/s の速度で衝撃棒を衝突させた時に a 点と b 点で実測された応力波形である。その下で、その応力から計算された測定棒先端の応力である。実験では、測定棒の先端は自由端となっているので、応力は零となるのが理想であるが、計算された応力はわずかに変動しており、a 点と b 点の応力の変動が大きな所で誤差も大きくなっている。また図 5 の下方の図は、 d/D が 0.7 と 0.6 の時に計算された先端の応力であり、 d/D の減少に従って誤差も増加している。

a 点と b 点の応力から、断面積が変化する段付部に発生している衝撃力 $F_c(T)$ が、次式によって計算できる⁽¹⁾。

$$F_c(T) = \{\sigma_a(T+t_1) - \sigma_b(T) + \sigma_a(T-t_1)\} \cdot A_1 \quad \dots\dots\dots (24)$$

この段付部においては、直径 D の丸棒の先端が直径 d の面積で衝撃力を受けているのと同じである。そこで、この測定法の精度を調べるため、便宜的に、この段付部で発生した衝撃力の最大値 $F_{c\max}$ と、測定誤差である計算された丸棒先端の衝撃力 $F_d(T) = \sigma_d(T) \cdot A_2$ の最大値 $\Delta F_{d\max}$ との比を求めた結果が図

図 4 測定棒先端の形状とゲージ位置

図 5 測定された a, b 点の応力と計算された丸棒先端の応力

6 である。図では、直径比 d/D が約 0.8 から 1.2 の範囲では 3%、0.7 から 1.3 までの範囲では 5% 以下の誤差となっており、段差が小さい場合には、この測定法が十分に使用できることを示している。また、この時の応力波の立上り時間は約 12 μs である。

また、各応力の測定点を 30.6 mm ずつ先端から遠ざけて各応力を測定し、式(18)を用いて先端の衝撃力を計算した時の誤差は、a 点と b 点の応力から計算した場合と比較して約 0.5% 増加した。

このように、この測定法が使用できることは、丸棒の断面積がある程度急激に変化しても一次元弾性応力波理論が十分適応できることを示している。つまり、図 6 は、応力の立上り時間がこの実験における 12 μs と同一な条件にあり、丸棒先端の加圧面から直径の 1.2 倍以上離れた位置で応力を測定する場合において、直径 D の丸棒で直径 d の試料を高速圧縮する際に測定データに含まれる誤差の範囲を示しているといえる。すなわち、図 6 は、 $d/D=1$ の場合と比較した誤差の量が、 $d/D=0.8$ で 1%、 $d/D=0.7$ で 3% 程度であることを示している。深津ら⁽⁵⁾は、丸棒の直径と、試料の直径との比が変化する場合における丸棒内の応力分布が d/D が 0.4 でも、端面から直径以上離れた断面では、応力はほぼ均一に分布する結果を示しているが、本測定理論に基づいた実験においても、一次元弾性応力波理論に基づく衝撃応力の測定においては、 d/D の影響が少ないことが確かめられた。

5. ま と め

一次元弾性応力波理論に基づき、丸棒の二点の応力を測定して丸棒の任意の断面、先端、段付部および、段付棒の先端の衝撃力を求める理論式が導かれ、その理論の正しさと、その理論を応用した Yanagihara-

図 6 測定誤差と段付部直径比との関係

Bar 法による測定精度が実験によって確かめられた。
また、高速圧縮試験等における加圧棒の直径と、試料の直径との比が変化する場合は測定誤差が示された。
その主な結果を次に示す。

応力の立上り時間が $12\ \mu\text{s}$ より長い条件において

(1) 直径 $D=25\ \text{mm}$ の丸棒の先端が段付きとなっており、この先端に衝撃力が加わる場合、その先端の直径 d が直径比 d/D で約 0.8 から 1.2 までの範囲では 3%, 0.7 から 1.3 までの範囲では 5% の以内の誤差で測定できる。

(2) 材料の高速圧縮試験等において、加圧棒の直径に対する試料の直径 d の減少によって生ずる誤差

は、直径比 $d/D=1$ の場合と比較して $d/D=0.8$ で 1%, $d/D=0.7$ では 3% 以内である。

最後に、本研究に協力していただいた山口俊樹君 [(株) ホーチキ] および、本学技術員の外崎猛、安池寿一氏に感謝の意を表す。

文 献

- (1) 柳原, 機論, 43-375 (昭 52), 4048.
- (2) 柳原・斎藤, 機論, 45-393 (昭 54), 601.
- (3) 柳原・斎藤, 機論, 51-464, C (昭 60), 790.
- (4) 松本ほか 4 名, 機論, 29-197 (昭 38), 49.
- (5) 深津・ほか 3 名, 機論, 50-453, A (昭 59), 869.

討 論

〔質問〕 深津 鋼 次 [名古屋工業大学工学部]

ホプキンソン棒法と関連して下記の点についておたずねしたい。

(1) 異なる材質からなる段付棒に対し貫測定法を用いるには、反射率と透過率を考慮するのみでよいのか。

(2) 段付棒の一方 (図 2 の横断面積 A_2 の部分) の応力が降伏点を超えるとときの d の位置における応力の測定が可能か。

〔回答〕 (1) 材質が異なる場合には、部材の密度 ρ および縦弾性係数 E が変わるため、弾性応力波の伝ば速度 c および反射率 α と透過率 β が違ってくる。本測定法では、応力波が応力測定点 a-b 間の距離 l_1 を伝ばするのに要する時間 t_1 が基準となるため、段付部から d 点までの部材の材質が異なる場合には、その部材内の応力波の伝ば速度 $c_2 = \sqrt{E_2/\rho_2}$ と、段付部以後の部材内の応力波の伝ば速度 $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$ より、

k を整数とし、 l_3 の長さを $l_3 = k \cdot (c_2/c_1) \cdot l_1$ の関係が成り立つように設定する必要がある。したがって、式 (17) を用いて d 点から段付部までの材質が異なる棒で測定する場合には、 $l_3 = (c_2/c_1) \cdot l_1$ とし、 $\beta_1 \cdot \beta_2$ は次式より求める。

$$\beta_1 = \frac{2 \cdot A_1 \cdot \rho_2 \cdot c_2}{A_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 + A_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2}$$

$$\beta_2 = \frac{2 \cdot A_2 \cdot \rho_1 \cdot c_1}{A_1 \cdot \rho_1 \cdot c_1 + A_2 \cdot \rho_2 \cdot c_2}$$

(2) 本測定理論は、応力波の伝ばによるエネルギーの減衰を無視している。したがって、d 点から段付部までの部材が降伏応力を超えた場合には、塑性仕事によるエネルギー減衰が無視できなくなること、塑性変形により l_3 の長さや断面積 A_2 が変化することによる誤差が生じる。この誤差がどの程度となるか、また、どのように補正すればよいかなどは、今後の研究課題であると考えている。