衝突振動系におけるカオス挙動*

小 寺 忠**

Chaotic Behaviour in Impact Vibration System

by Tadashi KOTERA

Impact vibration in a spring-mass system with a degree of freedom is simulated on analog computer, and chaotic motions are observed by kind of mapping. The chaotic motions have complicated strange attractors. These results agree with those by a digital computer. When the static clearance between the mass and the stopper changes, a periodic solution changes into chaos in the form of (a) the period doubling bifurcation at the stability boundary s_{-1} of the periodic solution, (b) the jumping at the stability boundary s_{+1} and (c) the jumping at the boundary of existence of the periodic solution.

Key Words: Vibration, Impact Vibration, Chaos, Strange Attractor, Period Doubling Bifurcation, Jumping.

1. 緒 言

非線形振動系におけるカオスは最近広く研究されており、すでに多数の文献が見られる⁽¹⁾。力学系の分野では衝突を伴う振動系がカオスを発生する代表的なものであるが、Holmesらの若干の研究が見られる程度で⁽²⁾、カオスの存在定理はもちろんのこと、カオス挙動それ自体がまだ十分には知られていない。一自由度のばね・質量系の衝突振動についていえば、著者らも実験やアナログシミュレーションによって不規則な衝突振動が存在することをすでに確認はしているが⁽³⁾⁽⁴⁾、カオスの観点からは考察せず、もっぱら周期解とその安定性のみを解析してきた。またアナログ計算機では、通常の位相面軌道の挙動のみを観察してきた。

衝突振動の応用の観点からすれば、大きな衝突速度をもつ安定周期解が実現するパラメータ領域を求めることが重要で、カオスはむしろ困る現象である。しかし現時点では衝突振動でのカオス発生メカニズムも発生するパラメータ領域も未知である。

そこで本報では、アナログ計算機 EAI-1000 で衝突

振動を実現し、いわゆるマッピングを実行して、衝突振動におけるカオスを考察している。またデジタル計算機でもシミュレートして、両者の結果を比較し、よく一致することを確認している。

2. 力学モデル

本報で取扱う力学系は図1のような一自由度ばね・質量系で、減衰係数 d' は零とする。この場合の無次元運動方程式は次式ようになる。

$$y'' + y = \cos \eta \tau \dots\dots\dots (1)$$

ただし $y = x/x_{st}$, $x_{st} = F_0/k$, $' = d/d\tau$, $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0^2 = k/m$, $\eta = \omega/\omega_0$ 。座標 x の原点は質量 m の静止平衡位置にとっている。さて、衝突の瞬間を時間 τ の原点に選び、その時の外力の位相を φ 、衝突直後の質量 m の

図1 衝突振動系のモデル

* 昭和59年12月11日 第34回応用力学連合講演会において講演, 原稿受付 昭和60年7月15日。

** 正員, 神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。

無次元速度を V として衝突の位置を $y = -\bar{r} = -r/x_{st}$ (r はすきま, 予圧があるときは $r < 0$) とおけば, 式(1)の解は

$$y(\tau) = -\left(\bar{r} + \frac{1}{1-\eta^2} \cos \varphi\right) \cos \tau + \left(V + \frac{\eta}{1-\eta^2} \sin \varphi\right) \sin \tau + \frac{1}{1-\eta^2} \cos(\eta\tau + \varphi) \dots\dots\dots (2)$$

と書ける。よって無次元すきま $\bar{r}$ および無次元振動数 η が与えられている場合, 衝突後の挙動は φ と V の二つのみに支配される。次の衝突は $y = -\bar{r}$ となる時に起こるので, その時の τ を求めれば衝突速度 $dy/d\tau$ が求められ, 衝突の反ばつ係数を R とすれば, 次の φ と V は $\varphi = \eta\tau + \varphi$ および $V = -Rdy/d\tau$ によって定義される。以後この操作をくり返すことにより, 衝突時の φ と V が求められるので, 衝突振動は極座標 (V, φ) で表現するのが便利である。

点 (V, φ) の軌道は, 外力の一周期ごとに (y, y') をプロットしたものではないので, カオスを観察する際によく用いられるいわゆるポアンカレ写像⁽¹⁾ではないが, 衝突振動の場合にはこのほうが合理的といえる。

さて, 外力の一周期ごとに1回衝突が起こるような安定な周期解があるとする, それに対応する φ と V は衝突の回数を重ねても変化しないので, 点 (V, φ) は安定な不動点となる。一般に外力の N 周期の間

に M 回の衝突を周期的にくり返す安定な解があるとすると, それは M 個の不動点で表現される ($z = M/N$ -周期解と名付ける)。また不安定な周期解の不動点は必ずあん点になる⁽⁵⁾ので, これに出入りする4本の不変曲線が存在するはずで, これらを求めることによって安定な定常周期解の引込領域が得られる。

特に $z = 1/N, 2/N$ および $3/N$ 周期解の不動点(そしてそれがあん点ならばその点での不変曲線の接線のこう配も)は解析的に求められる⁽⁶⁾ので, これらの周期解の不変曲線したがって引込領域は精度よく求められる。

3. アナログシミュレーション

文献(4)ではチェコスロバキアのアナログ計算機 MEDA-41 TC による衝突振動のシミュレーションで, 通常の位相面軌道 $y-y'$ を描かせることによって, 運動の種類と安定性を判別した。これによって不規則な衝突振動が存在することを確認したが, (V, φ) 平面での軌道は求めなかった。その後アナログ計算機 EAI-1000 を用いて MEDA とは異なる方式で衝突振動をシミュレートし, (V, φ) 平面の軌道を得ることができたので, その回路図と計算結果を示す。

図2は回路の図で, 外力発生回路, 質量 m の運動の回路, 積分器制御用の信号発生回路および (V, φ) 出力用回路より成っているが, 詳細な説明は省略する。

図2 アナログ計算機のブロック線図

動作原理だけをまとめれば次のとおりである。

(1) 初期値 φ と V を係数器 P_{00} , P_{04} および P_{15} にセットする。

(2) メインスイッチを OP にし、すべての積分器のモードを OP にする。計算が始まる。

(3) 比較器 C_{10} で $y = -\bar{r}$ の瞬間を検出し、そのときの y' と y を加算器 S_{14} , S_{15} に Store する。同時に積分器 I_{00} , I_{03} を HLD モードにする。ただし I_{10} , I_{13} は OP モードのままとする。

(4) S_{14} の y' に P_{17} の反ばつ係数 R をかけ、 I_{10} の IC に入れておく。

(5) $y = -\bar{r}$ になってから一定時間の後に、CLK によって I_{10} , I_{13} を IC モードにすると、(4) の初期値がセットされる。

(6) $MONO_1$ を用いてさらに一定時間の後にすべての積分器を OP モードにする。

以後(3)~(6)をくり返す。しかし、このままでは I_{00} , I_{03} が HLD モードになるたびに外力信号 $\cos(\eta\tau)$

$+\varphi$ の振幅が減少してしまうので、 C_{00} , $MONO_0$ および D_{11} を用いて一周ごとに I_{00} , I_{03} を IC モード (この間 I_{10} , I_{13} は HLD モード) にして、外力の振幅の安定化を計っている。以上の動作をすべて矛盾なく実行させるために種々の論理要素を使っているの、かなり複雑な回路になっている。

衝突瞬間の点 (V, φ) は、T/S 加算器 S_{04} の出力を横軸に、 S_{05} の出力をたて軸にとれば得られる。また通常の位相面軌道 (y, y') は S_{13} と S_{15} の出力により描くことができる。

図2では η や $\bar{r}$ は定数であるが、 P_{05} や P_{13} を積分器と組合せれば、 η や $\bar{r}$ が徐々に変化した場合の挙動を知ることでもある。

4. カオス挙動

今日の時点では衝突振動系にカオスが発生するための十分条件も必要条件も不明であるので、本報ではアナログ計算機およびデジタル計算機による計算結果

図3 アナログ計算機による (V, φ) の軌道 ($R=0.785$)

をいくつか示すだけにする。ただし以下の計算では、反ばつ係数 R としては、文献(4)~(6)と同様に文献(3)で実験的に求めた値 0.785 を用い、 R を変えた場合の様子については別の機会にのべることにする。

図3はカオス状態での点 (V, ϕ) の軌道の例で、点が続んでいわゆるストレンジアトラクタ⁽¹⁾になっていることがよくわかる。いずれの場合も計算時間は1 min 程度である。図3(h)を除いて初期条件に無関係にカオスになるが、図3(h)の場合は初期条件によってカオスになったり、外力の一周期に2回衝突が起こる安定な $z=2/1$ 周期解(F点)になったりする。また図3(c)の場合を除いて原点からストレンジアトラクタが出ているが、これは接触のような弱い衝突を伴っていることを示している。図3(c)の場合は三つのリミットサイクルのようなものになっているが、有限の外力周期で運動がくり返されないかぎりカオスと呼んでもよい。

図4は、図3と同じパラメータの場合のデジタル計算機による結果で、図3とよく一致している。図4(h)のあん点Sに至る不変曲線は2章の終わりにのべた方法で求めたもので、Sから出る不変曲線とは交わらないが(いわゆるホモクリニック点⁽¹⁾は存在しないが)、カオスが存在する。

5. 分岐と跳躍

安定定常解からカオスへ、あるいはカオスから安定定常解への移行はどのようなになっているかを調べてみよう。

まずアナログ計算機による結果を図5に示す。図5は、積分器を用いてすきま $\bar{\tau}$ を非常にゆっくり変化させたときの衝突直後の速度 V の変化の様子を示している。図5(a)は $\eta=1.1$ の場合で、 $\bar{\tau}=0.5$ 付近の $z=1/1$ 周期解の状態から $\bar{\tau}$ を徐々に減少させると、 $z=1/1$ 周期解の s_{-1} 形安定境界⁽⁴⁾⁽⁵⁾において周期倍分岐⁽¹⁾が起こり、 $z=2/2$ 周期解になる。これは $\bar{\tau}=0.38$ 付近で存在境界(運動の途中で新たな衝突が起こる)に達して $z=6/4$ 周期解へ跳躍する。 $\bar{\tau}$ をさらに減少させると $z=6/4$ 周期解は $\bar{\tau}=0.35$ 付近でカオスに移行している(この間にも多分周期倍分岐があると思われるが、この写真からは何もわからない)。逆にカオス状態から $\bar{\tau}$ を徐々に増加させると、分岐とは逆の過程で $z=3/2$ 周期解になり、 $\bar{\tau}=0.45$ 付近でこれは s_{+1} 形安定境界に達して $z=2/2$ 周期解へ跳躍する。図5(b)は $\eta=1.2$ の場合で、 $\bar{\tau}=-0.3$ 付近の $z=2/1$ 周期解の状態から $\bar{\tau}$ を減少させると、 $\bar{\tau}=-0.41$ 付近で s_{+1} 形安定境界に達して別の形の $z=2/1$ 周期解へ跳躍し、 $\bar{\tau}=-0.44$ 付近でそれは存在境界に達して直ちにカオスになっている。逆にカオス状態より $\bar{\tau}$

図4 デジタル計算機による (V, ϕ) の軌道

を増加させると $\bar{r} = -0.41$ 付近でカオスが突然消えて(カオスの危機と呼ばれている⁽¹⁾) $z=2/1$ 周期解になり, この $z=2/1$ 周期解は $\bar{r} = -0.35$ 付近で s_{+1} 形安定境界に達して最初の形の $z=2/1$ 周期解に跳躍し

ている. 図 5 (c) は $\eta=1.3$ の場合で, $\bar{r} = -0.4$ 付近の $z=2/1$ 周期解の状態から $\bar{r}$ を減少させると, $\bar{r} = -0.5$ 付近で s_{+1} 形安定境界に達してカオスへ跳躍し, 逆にカオス状態から $\bar{r}$ を増加させると, $\bar{r} = -0.45$

図 5 アナログ計算機による $\bar{r}$ - V 線図

図 6 デジタル計算機による $\bar{r}$ - V 線図

付近で $z=2/1$ 周期解に跳躍している。図 5 (d) は $\eta=1.1$ の場合の $\bar{\tau}=-0.16\sim 0.05$ 付近での様子で、カオスと複雑な周期解とが連なっている。有限個の連続な曲線が周期解を表している。

図 6 は図 5 と同じパラメータの場合のデジタル計算機による結果である。図 5 と非常によく一致していることがわかる [図 5 では輝点 ($V, \bar{\tau}$) の明るさは一様ではなく、暗くて見えにくいものもある]。いずれも $\bar{\tau}$ を小さなきざみで変化させ、各 $\bar{\tau}$ について 50 回衝突させ、初め 20 回は過度現象としてプロットさせていない。

6. 結 言

アナログ計算機 EAI-1000 で従来の MEDA (チェコ製) とは異なる方式で衝突振動現象を初めてシミュレートすることができ、衝突時の (V, φ) の軌跡も初めて得ることができた。このアナログ計算機とデジタル計算機で、カオスを発生させた結果をまとめると次のようになる。

(1) アナログ計算機とデジタル計算機の計算結果は非常によく一致しておりアナログ計算機でのシミュレーションは正しいといえる。計算の速度は前者が後者よりも 100 倍以上速いが、パラメータの微調整が困難で、時々誤動作もある。

(2) 無次元振動数 η および無次元すきま $\bar{\tau}$ をさまざまに変化させた結果、カオスが発生する領域が存在することが確かめられた。極座標 V, φ でのカオスの軌道はいわゆるストレンジアトラクタになっている。

(3) $\bar{\tau}$ を徐々に変化させた場合の安定周期解か

らカオスへの移行の仕方には、(a) 周期倍分岐 (s_{-1} 形安定境界) をくり返しながら移行する場合、(b) s_{+1} 形安定境界で跳躍的に移行する場合、そして、(c) 運動の途中において新しい衝突が発生する存在境界で突然カオスになる場合の 3 とおりが見られた。(a) の場合、 $\bar{\tau}$ を逆に変化させたときには、逆の経過をたどるが、(b)、(c) の場合は初めとは異なる $\bar{\tau}$ で跳躍的に安定な周期解に移る。こうして (b)、(c) の場合には周期解とカオスの間にヒステシシが存在する。

(4) 分岐直後のストレンジアトラクタは不安定周期解の周辺にのみ存在するが、大部分のストレンジアトラクタは原点から出る軌道を有している。つまり、接触のような弱い衝突を伴うことが多い。

(5) 不安定周期解の不動点 (あん点) に出入りする不変曲線が交わらなくても (ホモクリニック点がなくとも) カオスは存在しうる。

アナログ計算機 EAI-1000 で衝突振動をシミュレートするにあたり有益な助言を下されたチェコスロバキア科学アカデミ熱力学研究所の ing. F. Peterka, CSc. に心より感謝します。

文 献

- (1) 例えば、平井、システムと制御、28-8 (昭 59), 10.
- (2) 例えば、Shaw, S. W. and Holmes, P. J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50 (1983), 849.
- (3) 川井・小寺、機論、35-274 (昭 44), 1233-1241.
- (4) Peterka, F. and Kotera, T., *Acta Tech. ČSAV*, 27-1 (1982), 92.
- (5) Kotera, T. and Peterka F., *Acta Tech. ČSAV*, 26-6 (1981), 747.
- (6) Kotera, T. and Peterka F., *Acta Tech. ČSAV*, 29-3 (1984), 255.

討 論

〔質問〕 砂 原 善 文

〔京都工芸繊維大学工学学部〕

(1) 連続時間系式 (1) について、(V_n, φ_n) としてアナログシミュレートすることは意味をもつか。

(2) デジタル計算機誤差を考慮して、ストレンジアトラクタの構造を明らかにする必要があるのではないか。たとえば写像が horse shoe の構造をもつか否か、図 4 (h) において、周期とカオスに分かれる初期条件の領域は (V, φ) 平面でどうなっているか。

(3) 離散写像をどこまで解析的に扱えるか。

〔回答〕 (1) 式 (1) は連続時間系であるが、ある衝突から次の衝突までの運動が V と φ で決定され、衝突振動系の挙動を (V, φ) で表現するのが便利

であるから (V, φ) を用いている。アナログコンピュータではこれが短時間で得られる。

(2) ご指摘のとおり計算機の誤差はまぬがれないが、ストレンジアトラクタの構造とか horse shoe の構造とかの検討はできていない。図 4 (h) の場合のカオス領域の境界は、数値計算によるかぎり、あん点 S に至る不変曲線と一致している。

(3) 特に衝突を伴う振動系の場合には、衝突瞬間を解析的に求められないので、写像を解析的に取扱うのは不可能ではないか。解析的に取扱おうとすると、どうしても Shaw ら⁽²⁾, Holmes (付 1) のように特殊な場合に、特殊な仮定を設けなければならないと思う。

(付 1) Holmes, P. J., *J. Sound Vibr.*, 84-2 (1982), 173.