ガタ支持部をもつはり振動系の不規則応答*

遠 藤 満**, 岡 智 彦***

The Effects of Gapped Supports on the Random Vibration of a Beam

by Mitsuru ENDO and Tomohiko OKA

The influence of gapped supports on the steady-state random response of a beam-like structure was examined, mainly by means of digital simulation. Two kinds of models were assumed as the restoring and damping effects of gapped supports: one is the parallel composition of the Hertz-type contact spring and dashpot; and the other is that of a linear spring and dashpot. In order to ascertain the validity of digital simulation, the experiment was carried out. Then, on the basis of digital simulation, the applicability of the equivalent linearization method was examined, and it was proved to be valid only when the stiffness of gapped supports is moderately soft. Finally, as a result of digital simulation, it was shown that the relative displacement response does not change so much even if the stiffness of gapped supports changes greatly; while the absolute acceleration response and impact force are remarkably affected by the stiffness of gapped supports.

Key Words: Vibration of Continuous System, Random Vibration, Gapped Supports, Digital Simulation, Equivalent Linearization Method

1. 緒 言

配管系などの構造物においては支持部にガタを設けて熱による伸びを吸収するとともに地震などの強制入力加わる際にはその振動を抑制する効果ももたせているようである。またこのような例にとどまらず、ガタを有する機械構造系の非線形振動は基本的でかつ實際上からも重要な問題として、これまで集中系に調和入力加わる場合⁽¹⁾⁽²⁾、1自由度系に不規則入力加わる場合^{(3)~(6)}、はり振動系が調和加振される場合^{(7)~(9)}あるいは集中系で近似した配管系が地震入力を受ける場合⁽¹⁰⁾などが取扱われている。しかしながらガタ支持部をもつはりのような分布定数系が不規則励振されるような場合についてはあまり研究されていないように思われる。そこで本研究ではガタ支持部をもつはり振動系が定常不規則励振を受ける場合を想定し、主としてデジタルシミュレーション手法によりその不規則応答を求め、振動応答に及ぼすガタ支持部の影響について検討することを目的としている。また実験を行ってシミュレーション結果と比較し、さらに等価線形化

析も行つてその適用限界を検討することも目的とする。

2. デジタルシミュレーション

2.1 振動系のモデル 本研究において想定した振動系を図1に示す。はりの一端を剛なる外枠に固定し、他端近傍に a なるガタを含む支持部を上下対称に配し、外枠全体が $\tilde{A}(t)$ なる不規則励振を受けるものと仮定する。ガタ支持部の復元力特性としてはばねとダッシュボットの並列系で表されるものと仮定し、ばね特性としては Hertz の接触ばねと線形ばねの2種類を想定する。

2.2 計算法 図1のガタ支持部をもつはり振動系モデルにおいて、ガタ支持部のばねモデルとして

図1 ガタ支持部をもつはり振動系

* 昭和61年3月15日 東海支部第35期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和60年4月13日。

** 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*** 東京工業大学大学院。

Hertz ばねを仮定すると、運動方程式は

$$\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + C_b I \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + F_b(t) \delta(x-b) = 0 \quad (1)$$

ここで

$$F_b(t) = \{K_H(y_b - a)^{3/2} + C\dot{y}_b\}1(y_b - a) + \{-K_H(-y_b - a)^{3/2} + C\dot{y}_b\}1(-y_b - a)$$

となる。上式において ρ, A, E, I ははりの密度、断面積、縦弾性係数、断面二次モーメントを表し、また Y, y は絶対変位および相対変位を表す。さらに C_b ははりに関する減衰定数、 K_H, C はそれぞれ Hertz のばね定数およびガタ支持部の減衰定数を表すものとする。ガタ支持部は $x=b$ の位置に取付けられており、その点の相対変位が y_b である。ガタ支持部のばねが線形ばねの場合には $F_b(t)$ は次式のように表される。

$$F_b(t) = \{K_L(y_b - a) + C\dot{y}_b\}1(y_b - a) + \{-K_L(-y_b - a) + C\dot{y}_b\}1(-y_b - a) \quad (2)$$

式(1)(2)中の $1(\cdot)$ は単位ステップ関数を表す。ここで

$$Y = y + \tilde{A}(t) \quad (3)$$

であるからこれを式(1)に代入すると

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C_b I \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + F_b(t) \delta(x-b) = -\rho A \ddot{\tilde{A}}(t) \quad (4)$$

となる。上式で $\dot{\cdot}$ は d/dt を表す。ここで規準モード分解法を用いることにして解 y を

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) f_n(x) \quad (5)$$

と仮定する。上式で $f_n(x)$ は片持はりの規準モード関数を表す。式(5)を式(4)に代入し、通常の規準モード法の手続きに従うと、最終的に一般化座標 $a_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) に関し次式が得られる。

$$\ddot{a}_n(t) + 2\beta_n \omega_n \dot{a}_n(t) + \omega_n^2 a_n(t) + \frac{F_b(t) f_n(b)}{\rho A N_n} = -\frac{P_n}{N_n} \ddot{\tilde{A}}(t) \quad (6)$$

ここで

$$\beta_n = \frac{C_b \omega_n}{2E}$$

$$\int_0^l f_n^2(x) dx = N_n$$

$$\int_0^l f_n(x) dx = P_n$$

上式において l ははり長さ、 ω_n は片持はりの n 次の固有角振動数を表す。さて式(6)に基づきデジタルシミュレーションを行うにあたって、まず時系列不規則加速度入力 $\ddot{\tilde{A}}(t)$ が必要となる。本研究では $\ddot{\tilde{A}}(t)$ のパワースペクトルとして図2のような有帯域ホワイトノイズを仮定し、平均値零の定常ガウス分布に従う

入力波形を次式のような三角級数モデルによって近似した⁽¹¹⁾。

$$\ddot{\tilde{A}}(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (7)$$

ここで

$$\omega_k = (k-1/2)\Delta\omega \quad (k=1 \sim N)$$

$$\Delta\omega = \omega_u/N$$

$$a_k^2 = 4S\Delta\omega$$

また N は ω の正領域に対する分割数、 ϕ_k は $k=1, 2, \dots, N$ に対し互に独立な零から 2π で一様な確率変数を表す。シミュレーションの計算手法は式(7)を式(6)に代入して、ルンゲ・クッタ・ギル法により順次計算を行い、定常状態に達した後の一定時間の時間平均を計算して応答の rms 値を求め、さらに FFT 手法により応答のパワースペクトルを求めた。ただし一つの入力波形では結果に誤差を含む恐れがあるため本研究では8個の異なる入力波形(7)を発生させてそれらの応答の平均をとって最終結果とした。標本数をこの程度に選べばガタ支持部に当たらないときの線形振動系の応答のシミュレーション結果は解析解に一致する。

3. 実験

3.1 実験方法 実験装置の概略図を図3に示す。はりは厚さ2mm、幅30mmのりん青銅であり、ガタ支持部のストッパはジュラルミン製で金属片に半球面状突起を設けたものであり、この半球面の半径は5mmである。なおこの金属片を外枠にねじで固定する

図2 有帯域ホワイトノイズ

図3 実験装置の概略

際スペーサを用いることによりガタの大きさを変化させられるようにした。外枠はジュラルミン製で比較的剛性が高くなるように設計した。この外枠を動電形加振機の振動子に取付け、0~100 Hz ($\omega_u=628$ rad/s) の周波数成分をもつ帯域ホワイトノイズ加速度入力に励振した。応答の測定ははりを取付けた基礎台から 12 mm の所にひずみゲージを貼り、曲げモーメントの測定を行った。この実験装置についてはガタ支持部の復元力特性は Hertz ばねとダッシュポットの並列系とみなしたが、減衰定数 C ははりとガタ支持部との種々の衝突速度に対する反発係数を測定し、それと等価になるような C の値を数値的に逆算しそれらを平均して求めた。一方 Hertz のばね定数 K_H は接触部の形状と材質によって定まる。このようにして求められた K_H と C の値は次のようである。

$$K_H = 4.74 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$$

$$C = 60.0 \text{ Ns/m}$$

なおはりの全長 l は 167 mm であり、支持部までの距離 b は 157 mm である。また入力大きさ $S\ddot{A}$ は $1.77 \times 10^{-2} (\text{m/s}^2)/(\text{rad/s})$ である。

3.2 シミュレーション結果との比較 曲げモーメントの rms 値について実験とシミュレーション結果を比較したのが図 4 である。なおシミュレーションにおいては 3 次モードまで考慮し、入力パワースペクトルの分割数 N は 700、時間積分のきざみ幅 Δt は 0.5×10^{-4} s とした。なお図 4 において σ_0, σ_{M0} はそれぞれガタ支持部がない線形振動系のガタ支持部における相対変位の rms 値、および曲げモーメントの rms 値を表している。図 4 より実験とシミュレーション結果はほぼ一致しているといえよう。一方 2 種類のガタすきまの場合について曲げモーメントのパワースペクトルを比較したのが図 5 (a), (b) である。ほぼ実験とシミュレーション結果は対応しているといえよう。特に (b) 図よりガタ (すき間) が小さくなると 1 次の共振点が高周波側に移動していることが観察される。

図 4 曲げモーメントの rms 値

4. 等価線形化法

4.1 解析法 はりを有限要素化することにより等価線形化手法による近似解析を試みた。ガタ支持部のばねが線形ばねの場合にははりを n 個に有限要素化した基礎方程式を示すと以下になる。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} + \{F_b\} = \{F\} \cdots (8)$$

ここで

$$\{y\} = [y_1, y_2, \dots, y_{2n}]^T$$

で y_{2i-1} は i 節点のたわみ、 y_{2i} は i 節点のたわみ角を表す。またガタ支持部ははりの先端に位置していると仮定すると $\{F_b\}$ の $2n-1$ 番めの要素だけが値をもち

$$\{F_b\}_{2n-1} = \{K_L(y_{2n-1} - a) + C\dot{y}_{2n-1}\}1(y_{2n-1} - a) + \{-K_L(-y_{2n-1} - a) + C\dot{y}_{2n-1}\}1(-y_{2n-1} - a)$$

となる。さていま式(8)を次のような等価線形方程式

(a) $a = 0.73 \text{ mm}$

(b) $a = 0.17 \text{ mm}$

図 5 曲げモーメントのパワースペクトル
[0 dB = $0.762 \times 10^{-6} (\text{Nm})^2 / (\text{rad/s})$]

で近似する。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [\tilde{C}]\{\dot{y}\} + [\tilde{K}]\{y\} = \{F\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし $[\tilde{C}]$, $[\tilde{K}]$ はガタ支持部位置の要素に関する減衰定数 c_0 およびばね定数 k_0 をそれぞれ $\tilde{c}$, $\tilde{k}$ で置きかえたマトリックスとする。さていま式(8)と(9)の方程式系の差を $\{\epsilon\}$ とすると ϵ_{2n-1} だけが値をもつから

$$\frac{\partial E[\epsilon_{2n-1}^2]}{\partial \tilde{c}} = 0, \frac{\partial E[\epsilon_{2n-1}^2]}{\partial \tilde{k}} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

より $\tilde{c}$, $\tilde{k}$ を決定する。いま応答 y の確率密度関数としてガウス分布を仮定すると、若干の計算の後次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c} &= c_0 + \frac{2C}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_a^\infty e^{-y^2/(2\sigma_y^2)} dy \\ \tilde{k} &= k_0 + \frac{2K_L}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \int_a^\infty y(y-a)e^{-y^2/(2\sigma_y^2)} dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

上式において σ_y は相対変位の rms 値であるが、これは式(9)より求められる応答のパワースペクトル $S_y(\omega)$ より次式によって表される。

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega \dots\dots\dots (12)$$

ただし $S_y(\omega)$ の中に $\tilde{c}$, $\tilde{k}$ を含むので σ_y は式(11), (12)を用いて逐次近似により求めた。

4・2 シミュレーション結果との比較 実験と同じはり振動系の先端部分に線形ばねよりなるガタ支持部があるとしたときの先端部分での相対変位についてシミュレーション結果と比較したのが図6である。ここでガタ支持部の線形ばねのばね定数 K_L ははりの静的なばね定数 $3EI/l^3$ に等しく選んでおり、その値は $1.55 \times 10^3 \text{ N/m}$ である。また $C=1.0 \text{ Ns/m}$ であり、入力 S_A は $0.05 \text{ (m/s}^2\text{)}^2/(\text{rad/s})$ である。なお有限要素化の際の分割数は収束性を確かめた上で3分割とした。図6に示すようにシミュレーションと等価線形化法の結果は比較的良好に合っているが、これはガタ支持部のばねが比較的柔かいためであり、別の例として

図6 シミュレーションと等価線形化法との比較

K_L が非常に大きい場合や Hertz ばねの場合には誤差が増大する結果が得られた。したがって等価線形化手法はガタ支持部のばねがはり振動系のばね定数とほぼ同程度の柔かいばねである場合に限り適用可能であるということができる。

5. デジタルシミュレーションによる不規則応答結果の検討

ここでははり振動系の不規則応答に与えるガタ支持部の影響についてデジタルシミュレーションによって検討してみよう。

まず実験の場合と同じ振動系の場合について、入力 S_A を一定にしてガタの大きさ a を変えた場合、およ

(a) 相対変位

(b) 絶対加速度

(c) ガタ支持部の衝撃力

図7 入力を一定とした場合とガタ(すき間)を一定とした場合の比較

び a を一定にして入力の変えをえた場合のガタ支持部での相対変位, 絶対加速度, およびガタ支持部の衝撃力の変化を示したのが図7(a)~(c)である。ただし収束性も検討の上考慮したモードは3次までとしている。このときのモード減衰比 $\beta_n (n=1\sim3)$ はすべて0.01とした。図7において $\sigma_0, \sigma\ddot{y}_0$ はガタ支持部がない線形振動系のガタ支持部での相対変位と絶対加速度のrms値を表し, σF_0 ははりが静的に σ_0 だけ変位するに要する力を表しており, 図7では横軸, 縦軸をそれぞれこれらの量によって無次元化して表示している。結果をこのように表示すると図(a)~(c)のいずれの場合もほぼ3曲線は一つの曲線で近似できることがわかる。このことは一つのシミュレーション結果

より他の場合の結果を推定できることを示しており, 実用上有用と考える。

次に Hertz ばねの場合と比較的柔かい線形ばねの場合を比較したのが図8(a)~(c)である。 $K_i = K_H$ の場合が Hertz ばねの場合で $K_H = 4.74 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$ であり, $K_i = K_L$ の場合が線形ばねの場合で $K_L = 1.55 \times 10^8 \text{ N/m}$ である。減衰定数 C は実験の場合と同じく $C = 60 \text{ Ns/m}$ においており, また入力 $S\ddot{A}$ は $0.05(\text{m/s}^2)^2/(\text{rad/s})$ である。図をみてもわかるように相対変位にはほとんど差が認められないが, 絶対加速度とガタ支持部の衝撃力にあっては大きな差のあることがわかる。また絶対加速度の挙動と衝撃力の挙動には似た特徴のあることが観察される。

最後にガタ支持部の線形ばねのばね定数を大幅に変化させたときのガタ支持部での相対変位と絶対加速度の変化を示したのが図9(a), (b)である。 $K_L, C, S\ddot{A}$ の値は図8と同様である。相対変位についてはばね定数を大幅に変化させてもほとんど変化しないが, 絶対加速度についてはばね定数を大きくすると増加する傾向が認められ, さらにばね定数が非常に大きい場合には Hertz ばねの場合の挙動に似てくることがわかる。

以上図8, 9からもわかるようにガタ支持部のばねがこわい場合には絶対加速度, 衝撃力ともに顕著に大

(a) 相対変位

(b) 絶対加速度

(c) ガタ支持部の衝撃力

図8 Hertz ばねの場合と線形ばねの場合の比較

(a) 相対変位

(b) 絶対加速度

図9 ガタ支持部の線形ばね定数を大幅に変化させた場合

きくなるのに対し、相対変位ではさほどの変化がみとめられないことから、ガタを設けることによって制振の役割ももたせようとする場合には柔かいばねで支持するほうがはりに大きな衝撃力を与えないという点で有利であるといえることができる。

6. 結 論

ガタ支持部をもつはり振動系に定常不規則入力がかかる場合を想定し、主としてデジタルシミュレーション手法により不規則応答の性質を調べるとともに、実験および等価線形化解析を試みた。その結論をまとめると以下ようになる。

(1) デジタルシミュレーションによる結果は実験結果とほぼ一致し、本研究における規準モード分解法によるデジタルシミュレーションの有効性が確かめられた。

(2) デジタルシミュレーション結果との比較の結果、等価線形化手法はガタ支持部のばねがはり振動系のガタ支持部位置での静的変位に対するばね定数とほぼ同程度の柔かいばねである場合に限り有効であることがわかった。

(3) 本研究で想定した振動系については、ガタの大きさが減少するにつれ相対変位の rms 値は単調に

減少するが、絶対加速度の rms 値は必ずしも単調に減少するとは限らず、ガタ支持部のばねが比較的こわい場合にはガタ支持部がない場合よりも加速度応答値が大きくなる a (ガタの大きさ) の範囲が存在する。したがって制振効果としてはりの受ける衝撃力も考慮するならば、適度に柔かいばねでガタ支持部を構成するほうが有効であるといえることができる。

最後に本研究を遂行するにあたり、実験器具の貸与などの便をはかって下さった東京工業大学の坂田勝教授に深く感謝する。

文 献

- (1) 渡辺, 機論, 49-447, C (昭 58), 1924.
- (2) 藤田・服部, 機論, 45-395, C (昭 54), 737.
- (3) Masri, S. F. and Ibrahim, A. M., *J. Acoust. Soc. Am.*, 53-1 (1973), 200.
- (4) 入江・ほか 2 名, 機講論, No. 740-12 (昭 49-11), 83.
- (5) 藤田・服部, 機論, 45-397, C (昭 54), 985.
- (6) 藤田・服部, 機論, 46-403, C (昭 55), 227.
- (7) Watanabe, T., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 100-3 (1978), 487.
- (8) 渡辺, 機論, 46-405, C (昭 55), 519.
- (9) Masri, S. F., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E*, 48 (1981), 404.
- (10) 鈴木・大山, 機講論, No. 840-11 (昭 59-10), 127.
- (11) 星谷, 確率論手法による振動解析, (昭 49), 59, 鹿島出版会.