モード解析に関する研究*
〔第5報, 多点曲線適合(その2)〕

吉村卓也**, 長松昭男***

Research on Modal Analysis
[5th Report, Multi-Reference Curve-Fitting (Part 2)]

by Takuya YOSHIMURA and Akio NAGAMATSU

Many kinds of curve fit techniques have been developed for estimation of the modal parameters of a mechanical structure, using the theory of modal analysis. As one of the most popular curve fit techniques which correspond to multiple input vibration test, the Vold in time domain method (Poly-reference) is known and used extensively. In this paper, a new method which is made from improving the Vold in time domain is proposed to obtain global modal parameters. The feature of this method is as follows. All the residue and the residual compliance is obtained at the same time by referring to all the transfer functions making use of eigen value and eigen vector, which is determined by Poly-reference method. By using this method, modal parameters of the fly wheel of an automobile are identified. Comparing this new method with former methods, the validity of the new method is confirmed.

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Curve-Fitting, Vibration Test, Transfer Function

1. ま え が き

現在, 機械構造物の動特性を実験的に同定する方法としては, 機械系の振動特性を固有振動数, モード減衰比, 固有モードなどのモード特性の形で表し, これを同定する曲線適合と呼ばれる方法と, 質量行列, 減衰行列, 剛性行列などの特性行列の形で表し, これを同定する特性行列同定法がある⁽¹⁾. このうち後者は特性行列が物理的に明確な意味をもち, 設計変更や最適化に役立てやすいなどの長所があるが, 系を同定するための未知数が多いので, その正確な同定は難しく, 現在基礎研究が進められている段階である⁽²⁾. これに対して前者は, 後者に比べて未知数が少なく必要な計算機容量と時間が少ないこと, またFFTアナライザなどの計測機器やミニコンピュータの発達により, 現場で手軽に振動試験, 同定, 評価を行えるようになったことにより, 現在幅広く普及している.

この曲線適合と呼ばれる手法は, その解析精度を向上させる目的から, 盛んに研究, 開発が進められてき

た. これを参照する測定点と対象とする自由度について表現すれば, 単点一自由度から単点多自由度, さらに多点多自由度を経て, 現在では複数の点を励振点とする多点励振多点多自由度曲線適合の研究が進められている⁽¹⁾. そこで本研究では, この多点励振に対応した曲線適合手法として現在最も広く利用されている方法の一つである, 時間領域データを用いたボルドの方法⁽³⁾(ポリリファレンス)に注目し, この解法を改良した新しい多点励振曲線適合手法を提案する. そのために本論文では, まず, ボルドの方法について簡単な説明を加え, 次にそれを改良した新しい曲線適合手法についての説明を行う. そしてさらに, 自動車のフライホイールを供試体として簡単な加振実験を行い, 従来の方法と新しい方法により曲線適合を行い, これを比較検討する.

2. 解析方法の説明

2・1 ボルドの方法 ここでは, 時間領域データを用いたボルドの方法(ポリリファレンス)について簡単に説明する. 今励振点数を f , 測定点数を l とし, 一つの励振点に対する各測定点の伝達関数が合計 f 組得られたとすれば, これを逆フーリエ交換することにより単位衝撃応答を得ることができる. この方法で

* 昭和61年4月2日 第63期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和60年10月14日.

** 学生員, 東京工業大学大学院(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1).

*** 正員, 東京工業大学.

用いる応答は、変位、速度、加速度のいずれでもよいが変位応答が得られた場合について説明する。

点 b を励振したときの、時刻 $t = kT$ (T は時間間隔を表す) における l 点の変位応答を縦に並べた l 行のベクトルを $\{H_b(kT)\}$ とし、系の自由度を n とすれば、

$$\{H_b(kT)\} = [\phi][\beta]^k \{\xi_b\} \dots \dots \dots (1)$$

ここで

$$[\beta] = \begin{bmatrix} e^{s_1 T} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{s_{2n} T} \end{bmatrix}$$

$$[\phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_{2n}\}] \dots \dots \dots (2)$$

上式で、 s_r は r 次の固有値を、 $\{\phi_r\}$ は r 次の固有ベクトルを、 $\{\xi_b\}$ は点 b を励振したときのモード寄与ベクトルを表す。

式(1)を $k=0 \sim p$ について並べると

$$\begin{Bmatrix} \{H_b(0 \cdot T)\} \\ \{H_b(1 \cdot T)\} \\ \vdots \\ \{H_b(p \cdot T)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi] \\ [\phi][\beta] \\ \vdots \\ [\phi][\beta]^p \end{bmatrix} \{\xi_b\} \\ = [\Psi] \{\xi_b\} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $2n = lp$ となるように p を選べば、行列 $[\Psi]$ は、 $(p+1)l = 2n + l$ 行 $2n$ 列であるから、行は列より l 多く、次式を満たす $l \times l$ の行列 $[B_i]$ が考えられる。

$$\sum_{i=0}^p [B_i][\phi][\beta]^{p-i} = [0] \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 $[B_0]$ を単位行列とすれば、

$$\sum_{i=1}^p [B_i] \{H_b((p-i+k)T)\} = -\{H_b((p+k)T)\} \\ \dots \dots \dots (5)$$

が任意の k に対して成立する。

式(5)を $k=0, 1, \dots, m$ について並べれば

$$[B][T_b] = -[D_b] \dots \dots \dots (6)$$

ここで

$$[B] = [[B_1], [B_2], \dots, [B_p]] \\ [T_b] = \begin{bmatrix} \{H_b((p-1)T)\}, \dots, \{H_b((p-1+m)T)\} \\ \{H_b((p-2)T)\}, \dots, \{H_b((p-2+m)T)\} \\ \vdots \\ \{H_b(0 \cdot T)\}, \dots, \{H_b(mT)\} \end{bmatrix} \\ [D_b] = [\{H_b(p \cdot T)\}, \dots, \{H_b((p+m)T)\}] \\ \dots \dots \dots (7)$$

励振点が変わっても $[B]$ は不変だから

$$[B][[T_1], \dots, [T_f]] \\ = -[[D_1], \dots, [D_f]] \dots \dots \dots (8)$$

式(8)を最小二乗法により解けば、次式が得られる。

$$[B] = -\left[\sum_{b=1}^f [D_b][T_b]^T \right] \left[\sum_{b=1}^f [T_b][T_b]^T \right]^{-1} \\ \dots \dots \dots (9)$$

このように、この解法の第1段階は、式(9)の $[D_b][T_b]^T$, $[T_b][T_b]^T$ を計算することであるが、これらは、付録に示すように自己相関及び相互相関関数からなる行列で表せる。

さて、式(9)より $[B]$ が求まれば、第2段階は、式(4)より $[\beta]$ と $[\phi]$ 、すなわち固有値と固有ベクトルを求めることである。式(4)は、 $[B_0]$ が単位行列より

$$-\sum_{i=1}^p [B_i][\phi][\beta]^{p-i} = [\phi][\beta]^p \dots \dots \dots (10)$$

と表せ、式(10)は次のような標準的固有値問題に帰着できる ($[I]$ は単位行列を表す)。

$$[A] \begin{bmatrix} [\phi][\beta]^{p-1} \\ \vdots \\ [\phi][\beta]^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi][\beta]^{p-1} \\ \vdots \\ [\phi][\beta]^0 \end{bmatrix} [\beta] \\ [A] = \begin{bmatrix} -[B_1], -[B_2], \dots, -[B_p] \\ [I] & 0, & \dots, & 0 \\ 0 & [I] & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & [I], & 0 \end{bmatrix} \dots \dots (11)$$

すなわち、行列 $[A]$ ($lp \times lp$) の固有値解析を行うことにより、固有ベクトル $\{\phi_r\}$ と、式(2)の関係から固有値 s_r ($r=1 \sim 2n$) を得ることができる。

以上の解法を、一般には次のように解く。すなわち、励振点数 f と測定点数 l を比べると、通常 l は f に比べて大きいので、線形系においては励振点と測定点を入れ換えても伝達特性は等しい、という Maxwell-Betti の相反定理を適用し、これを l 点励振 f 点応答のデータと解釈する。これにより式(11)の行列 $[A]$ の次数は $f \cdot p$ となり、行列 $[A]$ を小さく表現する。以上のようにして、固有値 s_r と固有ベクトル $\{\phi_r\}$ ($r=1 \sim 2n$) を求めるのがボルドの方法である。

2.2 解析方法を導くための準備 ここでは、2.3節で述べる解析方法を導くための二つの準備を述べる。

2.1節で述べたように、ボルドの方法では、 f 点励振 l 点測定のデータを、 l 点励振 f 点測定と解釈して考えた。しかしこのように縮小すると、式(11)を解いて得られる固有ベクトル $[\phi]$ も f 行であり、励振点に関する成分しか含まない。そこでここでは、このような入れ換えをせず、そのまま式(1)を l 行、式(11)の次数を $l \cdot p$ とする。これが第1の準備である。

第2の準備は、すべての励振点においても応答を測定し、測定点数 l の中に、これらの励振点を含めることである。

以上の二つを準備すれば、式(11)を解いて得られる固有ベクトルの中には、すべての測定点と励振点に関

する成分が含まれることになる。

なお一般に時間領域の曲線適合においては、計算で仮定する固有モード数 n' は真の固有モード数 n より大きくとり、後に仮のモードを削除することにより、真の固有モードの解析精度を向上させるということが行われている。ここでも同様に上述の準備に基づいて、 n' を仮定し、後に n 組の共役な固有値と固有ベクトルを選択したとする。

2.3 提案する方法 点 i を励振点、点 j を測定点としたとき、 n 自由度の一般粘性減衰系の伝達関数(コンプライアンス) $G_{ji}(\omega)$ は、次のように表せる。

$$G_{ji}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\phi_{rj}\phi_{ri}}{d_r(j\omega - s_r)} + \frac{\phi_{rj}^*\phi_{ri}^*}{d_r^*(j\omega - s_r^*)} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 ϕ_{rj} は r 次の固有ベクトルの点 j における成分、 s_r は r 次の固有値を表す。また d_r は次のようにして定める。一般粘性減衰系の運動方程式

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

において(右辺) $= \{0\}$ としたら

$$[D]\{\dot{y}\} + [E]\{y\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の r 次の固有ベクトルを $\{\phi_r\}$ としたとき、

$$\{\phi_r\}^T [D]\{\phi_r\} = d_r \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、対象とする n 自由度に関しては、固有値 s_r と固有ベクトル $\{\phi_r\}$ ($r=1 \sim 2n$) は、前述の準備により、すべての励振点と測定点に関して求められているので、式(12)より、任意の測定点間の伝達関数は、 d_r を求めることにより記述できる。ここで提案する方法は、すべての励振点に対応した、すべての測定点のデータを参照して、 d_r を求める方法である。この方法には、時間領域データを用いる方法と、周波数領域データを用いる方法の二とおりが考えられ、次にその各々について説明する。

2.4 時間領域データを用いる方法 式(12)で表される伝達関数(コンプライアンス)を $s=j\omega$ において逆ラプラス変換すれば、単位衝撃変位応答が得られる。これは、 $t=kT$ とおけば、

$$\begin{aligned} h_{ji}(kT) &= \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\phi_{rj}\phi_{ri}}{d_r} e^{s_r kT} + \frac{\phi_{rj}^*\phi_{ri}^*}{d_r^*} e^{s_r^* kT} \right\} \\ &= \sum_{r=1}^{2n} \frac{\phi_{rj}\phi_{ri}}{d_r} e^{s_r kT} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、一点 b を励振したときの l 個の測定点における応答を縦に並べ $\{H_b(kT)\}$ とすれば

$$\{H_b(kT)\} = [\phi][\phi_b][\beta]^k \left\{ \frac{1}{d} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで

$$\begin{aligned} [\phi_b] &= \begin{bmatrix} \phi_{1b} \\ \vdots \\ \phi_{2nb} \end{bmatrix} \\ \left\{ \frac{1}{d} \right\}^T &= \left[\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_{2n}} \right] \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

なお、式(17)の $[\phi]$ と $[\beta]$ は、式(2)で与えられる。また式(1)と式(17)の関係は、次式によって与えられる。

$$\{\xi_b\}^T = \left[\frac{\phi_{1b}}{d_1}, \dots, \frac{\phi_{2nb}}{d_{2n}} \right] \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、データ数を q 個とすれば、式(17)を q 個縦に並べて次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \{H_b(0 \cdot T)\} \\ \{H_b(1 \cdot T)\} \\ \vdots \\ \{H_b((q-1)T)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi][\phi_b] \\ [\phi][\phi_b][\beta] \\ \vdots \\ [\phi][\phi_b][\beta]^{q-1} \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{d} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)を

$$\{H_b\} = [A_b] \{1/d\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と表せば、 $\{1/d\}$ は、すべての励振点に関しても共通な項なので、 f 個の励振点に関して次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_f \end{bmatrix} \left\{ \frac{1}{d} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)の行数は、 $q \cdot l \cdot f$ であり、 $\{1/d\}$ は n 組の共役な複素数であるから、未知数は $2n$ 個である。 $q \cdot l \cdot f$ は、 $2n$ に比べてはるかに大きいので、式(22)は、実際には $\{1/d\}$ を実部と虚部に分離し、最小二乗法によって解けばよい。

2.5 周波数領域データを用いる方法 一般粘性減衰系の伝達関数は、式(12)で与えられるが、式(12)を共役なものを含む、 $2n$ 次の固有モードの和として表せば、 $\omega = \omega_k$ に対して次式が成り立つ。

$$G_{ji}(\omega_k) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\phi_{rj}\phi_{ri}}{d_r(j\omega_k - s_r)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

点 b を励振したとき、周波数 ω_k における l 点の伝達関数を縦に並べ、 $\{G_b(\omega_k)\}$ とすれば、

$$\begin{aligned} \{G_b(\omega_k)\} &= \sum_{r=1}^{2n} \frac{\{\phi_r\}\phi_{rb}}{d_r(j\omega_k - s_r)} \\ &= [\phi][\phi_b][\Gamma_k] \left\{ \frac{1}{d} \right\} \end{aligned}$$

$$[\Gamma_k] = \begin{bmatrix} 1/(j\omega_k - s_1) \\ \vdots \\ 1/(j\omega_k - s_{2n}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

なお、式(24)の $[\phi]$ は式(2)で、 $[\phi_b]$ は式(18)で与えられる。データ数を q 個とし、式(24)を縦に並べれば

$$\begin{Bmatrix} \{G_b(\omega_1)\} \\ \{G_b(\omega_2)\} \\ \vdots \\ \{G_b(\omega_q)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\phi][\phi_b][\Gamma_1] \\ [\phi][\phi_b][\Gamma_2] \\ \vdots \\ [\phi][\phi_b][\Gamma_q] \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{d} \right\} \dots\dots (25)$$

式(25)を

$$\{G_b\} = [\Pi_b] \{1/d\} \dots\dots\dots (26)$$

と表せば, $\{1/d\}$ は, すべての励振点に関しても共通な項なので, 式(22)と同じように, f 個の励振点に対する応答に関して, 次式が成り立つ.

$$\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_f \end{Bmatrix} \left\{ \frac{1}{d} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

式(27)は, 複素数であるから, 両辺を実部と虚部に分けて解く. したがって実際には, 式(27)は, $2 \cdot q \cdot l \cdot f$ 行で表され, $\{1/d\}$ も実部と虚部に分けて, 未知数を $2n$ とし, 最小二乗法によって解くことができる.

また, 式(27)は, これを解く際に, 一般に周波数領域の曲線適合で行われているように, 重み関数を用いて解くこともできる.

以上のように, 時間領域または, 周波数領域のデータを用いて, これらの加振点の異なるデータすべてを参照して, $\{1/d\}$ を定めることができる.

2.6 剰余項を考慮する方法 2.4 節および 2.5 節で説明した方法は, 式(12)に示されるように, 解析する対象周波数範囲外の固有モードの影響を表す剰余項を考慮していなかった. この剰余項を考慮する方法をここで示す. 式(12)は剰余項を含めれば, 次のように書き直せる.

$$G_{ji}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\psi_{rj}\psi_{ri}}{d_r(j\omega - s_r)} + \frac{\psi_{rj}^*\psi_{ri}^*}{d_r^*(j\omega - s_r^*)} \right\} - \frac{Y_{ji}}{\omega^2} + Z_{ji} \dots\dots\dots (28)$$

ここで, Y_{ji} , Z_{ji} は, それぞれ, 点 i を励振点, 点 j を測定点としたときの, 剰余質量, 剰余剛性を表す. 剰余項は, 相反定理の成り立つ点, すなわち, i と j を入れ換えた点では本来等しくなる.

$$Y_{ij} = Y_{ji}$$

$$Z_{ij} = Z_{ji} \dots\dots\dots (29)$$

しかしこの他の点においては, モード分離されていないため, 一義的に表すことができず, 各々の点において異なった値をとる.

この剰余項を考慮することは, 時間領域データを用いる方法, 周波数領域データを用いる方法のいずれにおいても可能であるが, ここでは, 周波数領域データを用いてこれを考慮する方法を示す.

式(24)は, 剰余項を考慮すれば, 次のように表せる.

$$\{G_b(\omega_k)\} = [[\phi][\phi_b][\Gamma_k], [X_k], [I]] \{D\} \dots\dots\dots (30)$$

ここで, $[I]$ は l 次の単位行列を表し,

$$[X_k] = \begin{bmatrix} -1/\omega_k^2 & & \\ & \ddots & \\ & & -1/\omega_k^2 \end{bmatrix} (l \text{ 行 } l \text{ 列})$$

$$\{D\}^T = [1/d_1, \dots, 1/d_{2n}]$$

$$Y_{1b}, \dots, Y_{lb},$$

$$Z_{1b}, \dots, Z_{lb} \quad (2n+2l \text{ 列}) \dots\dots\dots (31)$$

式(30)を, 複数の励振点について考えれば, 式(27)に対応して, 次式が得られる.

$$\begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \vdots \\ \Pi_f \end{Bmatrix}, \begin{bmatrix} X & & I \\ & X & \\ & & \ddots \\ & & & X \\ & & & & I \end{bmatrix} \{D\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} (lq \text{ 行 } l \text{ 列})$$

$$\{D\}^T = [1/d_1, \dots, 1/d_{2n},$$

$$Y_1^T, \dots, Y_f^T, \quad (2n+2lf \text{ 列})$$

$$Z_1^T, \dots, Z_f^T]$$

$$Y_b^T = [Y_{1b}, \dots, Y_{lb}]$$

$$Z_b^T = [Z_{1b}, \dots, Z_{lb}] (l \text{ 列}) \dots\dots\dots (33)$$

しかし, このように Y_b^T , Z_b^T を並べていくと, 励振点数, または測定点数が多い場合には, 剰余項を考慮することによって未知数が飛躍的に増大してしまう. そこでこのような場合には, 相反定理の成り立つ点に関しては, 式(29)を考慮し, また, Y_{ji} , Z_{ji} は一般粘性減衰系では, 本来複素数であるが, 通常, 虚部は実部に比べて小さいと考えられるので, これを実数に近似することにより, 未知数を減らすことができる. こうして式(32)に相等する式を考え, これを実部と虚部に分離して最小二乗法により $\{D\}$ を解けばよい. こうすれば, すべてのデータを参照して $\{1/d\}$ が得られるとともに, 参照するデータに関しては, 各伝達関数における剰余項もまた, すべてを同時に得られることになる.

2.7 従来の方法との比較 ここでは, 本報で新

しく提案した曲線適合方法と、従来のボルドの方法の違いを簡単に比較し、その特徴を述べる。

いま、測定点が l 点あるとすれば、式(12)の伝達関数は、次のような行列で表示できる。

$$[G(\omega)] = \sum_{r=1}^n \left[\frac{[U_r]}{j\omega - s_r} + \frac{[U_r^*]}{j\omega - s_r^*} \right]$$

$$[G(\omega)] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1l} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{l1} & G_{l2} & \cdots & G_{ll} \end{bmatrix}$$

$$[U_r] = \frac{1}{d_r} \{\phi_r\} \{\phi_r\}^T$$

$$= \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1l} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{l1} & U_{l2} & \cdots & U_{ll} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

ここで、 $[G(\omega)]$ は伝達関数行列を、 $[U_r]$ は留数行列を表す。

いま、 l 個の測定点の中の f 点を加振点として選び、 l 点で測定を行ったとすれば、得られたデータは、伝達関数行列 $[G(\omega)]$ の f 個の列に対応する。

本報で提案する方法は、したがって次のように表現できる。まず、伝達関数行列の f 列のデータをすべて参照して固有値と固有ベクトルを求め、次に同じく f 列のデータを参照して $1/d_r$ を求める。これにより、留数行列は、 f 列が同時に決定され、しかも各項に対する剰余項も同時に考慮できる。

これに対して留数を求める方法には、従来次のような二通りの方法があった。

(1) 固有値と固有ベクトルからモードの寄与率を求める方法。

(2) 固有値のみを用いて、単点ごとに周波数領域で最小二乗法を繰返す方法。

このうち(1)は、時間領域データに対して式(3)を用いて、固有値と固有ベクトルからモードの寄与率 $\{\xi_i\}$ を最小二乗法により求める方法であり、この方法と新しい方法の違いは、式(3)と式(20)の対比から明らかなように、式(3)の $\{\xi_i\}$ は励振点によって異なるが、式(20)の $\{1/d\}$ は励振点に依存しないという点である。よって励振点と測定点を入れ換えずに解いた場合、式(3)から寄与率を求める方法は、式(20)または、式(21)を用いて伝達関数行列の f 個の列を 1 列ずつ独立に参照し、これを f 回繰返して解いたものと等しくなる。

また、(2)の方法は、固有ベクトルを利用しないので、1 点のみのデータを参照し、最小二乗法を $f \cdot l$ 回

繰返すことになる。

なお、(1)、(2)の方法とも各点ごとに剰余項を考慮することが可能である。

本報で提案する方法と、従来の(1)、(2)の方法の得失を比較すれば、次のような点が挙げられる。

(a) (1)の方法は、伝達関数行列の 1 列ずつを参照するので、測定データに含まれる誤差によって各列の留数が互いに矛盾したものとなる。すなわち、留数行列は、1 列が求まれば、他のすべての列は、この 1 列から求めることができるが、これらが互いに矛盾したものになる。これは(2)の方法についてもあてはまる。

(b) (2)の方法は、伝達関数のグラフを見ただけでは各点ごとに良く一致して見える。しかしこの方法は 1 点しか参照しないために上記の矛盾を含むうえに、固有モードを用いないので近接した、本来重根となるような固有モードに関しては、その分離精度が低下する恐れがある。

(c) 本報で提案する方法では、まず $\{\phi_r\}$ 、 d_r を求め、これにより留数を表しているので、留数はこれらにより一義的に定まり(a)のような矛盾がない。また、ここでは伝達関数行列の f 列を参照して固有値、固有ベクトルを求めたのに対応して、 f 列を同時に参照して $\{1/d\}$ および剰余項を求めているので、得られたモード特性は、従来の方法に比べて、より全体的な意味をもつモード特性であると考えられる。

3. 実験による比較

3.1 多点励振による実験 ここでは、実験データに対して、従来の方法と新しい方法により曲線適合を行い、これらを比較する。

実験は、図 1 のような自動車のフライホイールを供試体として行う。加振はインパルスハンマにて周辺自由の状態で行い、図 1 中の z 方向を加振方向として、円周上に測定点を 8 点とり、この 8 点すべてをまた加振点とする。よって得られる伝達関数は 8 点励振 8 点測定の計 64 個であり、これはまた、 8×8 の伝達関数行列のすべてである。

得られたデータのうち、解析対象とする周波数範囲は、1~4 kHz とし、周波数領域ではコンプライアンスとして、この間で 12.5 Hz おきに 241 個採用する。時間領域データは、これを逆フーリエ変換して単位衝撃変位応答として、時間間隔 0.08 ms のデータが 1024 個得られるが、このうち最初の 512 個を採用する。

3.2 固有値の同定 まず、8 点励振 8 点測定の

データすべてを参照してボルドの方法により固有値解析を行う。なおここでは励振点数と測定点数が等しいので、励振点と測定点を入れ換えて解いても得られる結果は原理的には変わらない。固有モードは12個を仮定して計算を行い、その中から表1に示す5個を真の固有モードとして採用した。

3・3 留数の同定 選択した五つの固有値から大きく分けて三つの方法により留数を求められる。第1の方法は本報で提案する方法であり、固有値と固有ベクトルから8列のすべてのデータを参照して $\{1/d\}$ を求める方法である。第2の方法はボルドが提案した従来の方法であり、伝達関数行列を1列ごとに参照してモードの寄与率 $\{\xi_i\}$ を求める方法である。また、第3の方法は、固有値のみを用いて単点ごとに最小二乗法を繰返して留数を求める方法である。

このうち第1の方法は、周波数領域データを用いる方法と時間領域データを用いる方法に分けられ、またすべての方法は剰余項を考慮する方法と考慮しない方法に分けられる。

これらを総体的に比べると、個々の伝達関数のグラフを見たうえでの精度は、第3の方法が最も良く、また第1の方法と第2の方法を比べると後者のほうがやや良くなっている。しかし、これらが真に、全体的な意味でのモード特性を表しているかを調べるために、次のような比較を行う。

3・4 モード特性の比較 2・7節で述べたように、第2の方法は、第1の時間領域データを用いる方法において、伝達関数行列の1列ずつを参照して $\{1/d\}$ を求めるのと同じことである。したがって1列ずつを独立に参照したときの $\{1/d\}$ が列によってどの程度ばらついているか、また、これと第1の方法で求めた $\{1/d\}$ がどのような関係にあるかを知ることは興味深い。これを比較するために、まず得られた固有モードを実部と虚部の各々の二乗和が1になるように規準化し、各方法で $\{1/d\}$ を求めてみた。ここでは、一例として、 $1/d_1$ について各方法で得られた結果を複素平面上で

表し、図2に示す。これらは、いずれも時間領域データを用い剰余項を考慮して求めたものである。1列ずつを参照して求めた $\{1/d\}$ は、データに誤差を含んでいなければ、本来一致するはずの値なので、このようなばらつきを示すということは、データ自体のばらつきを示しているとも考えられる。しかしこれはまた、1列ずつを参照して $\{1/d\}$ を求めると各列の留数は互いに矛盾することを示しており、全体的なモード特性を求めるという見地からは、伝達関数行列の複数の列を同時に参照するほうが好ましいと言える。

また、このことからわかるように、1点だけの伝達関数を示して、その曲線適合精度を比較することは、多数のデータを参照している場合には特に難しいのでここで、次のような比較を行う。

第1の方法は、伝達関数行列の複数の列を同時に参照して $\{1/d\}$ を求める方法なので、本来、励振したすべての列を参照する方法であるが、ここでは点1～8の励振点のうち点5と点8を励振したときの応答、すなわち伝達関数行列の5列めと8列めのデータを除外して他のデータから $\{1/d\}$ を求め測定点5と8の間の伝達関数を再構成してみる。また、これと比較するために、第2の方法と第3の方法では、2列めのデータのみを参照して留数を求めこれから測定点5と8の間の伝達関数を再構成してみる。

ここで、図3は第1の方法により、図4は第2の方法により、図5は第3の方法により点5と点8の間の伝達関数を再構成したものである。なお第1の方法は周波数領域データを用いる方法で行い、第1と第3のいずれの方法においても、最小二乗法における重み関数は用いなかった。

この場合、いずれの方法においても点5と点8の間の伝達関数を参照していない。このように、得られたモード特性を参照していない実験データと比較すれば、これがどの程度全体的な意味でのモード特性であるかを判断する一つの材料になると考えられる。これらの図を比較してもわかるように、全体的なモード特性を求めるという見地からは、単点ごとの最小二乗法

数字は測定点番号を示す

図1 フライホイール概略図

表1 実験により同定した、不減衰固有振動数とモード減衰比

Order	Freq. (Hz)	Modal damping (%)
1	1511	0.31
2	1512	0.30
3	3006	0.76
4	3758	0.18
5	3781	0.34

をくり返す第3の方法よりも、固有ベクトルを用いて伝達関数行列の1列ずつを参照して求める第2の方法のほうが優れており、さらには固有ベクトルを用いて複数の列を同時に参照する第1の方法が最も優れていると考えられる。

最後に、分離された固有モードについて言及する。表1を見ると、同定された固有値の一次と二次は、1511 Hzと1512 Hzと、わずか1 Hzしか離れておらず、これらが本来一つのモードなのか、あるいは各々異なったモードなのかを判断する必要がある。

そこで、本報で提案する方法(第1の方法)により求めた一次と二次の固有モードを図6に示す。これを見ると、これらは、供試体のフライホイールが対称な構造物であり、しかも実験を周辺自由の状態で行ったために生じた重根を示すモードであることがわかる。また、第2の方法によって求めた場合にも、この方法は第1の方法と同じく固有値解析で得られた固有モード $[\phi]$ を用いるために、図6と同じ結果を得ることができる。

一方、これに対して、1点ずつを参照する第3の方

数字は参照したデータの加振点番号をAは第1の方法による結果を表す。

図2 モード特性 $1/d_1$ の分布

---: 実験結果, —: 曲線適合結果(図4, 5も同様)

図3 第1の方法による曲線適合結果

法で点1を加振したデータを参照してこれを求めたのが図7である。この方法は、固有値解析で得られた固有モード $[\phi]$ を用いずに、固有値のみを用いて最小二乗法を行うために、このように求められたモードは単なる逆位相を示しており、これらのモードが正しく分離されていないことがわかる。

このように近接したモードを正しく分離するという観点からも、第1の方法が有効であることが確かめられた。

3・5 本報で提案する方法の比較 本報で提案する方法は、時間領域データを用いる方法と、周波数領域データを用いる方法に分けられた。今まで適用した範囲でこれらを比較すると、周波数領域の場合に重み関数を用いなければ、二つの方法はほとんど等しい同定結果を示すこと、また剰余項を考慮する場合には、周波数領域のほうが時間領域よりも、伝達関数を見たうえでの精度は良いこと、などがわかった。

4. ま と め

現在、多点励振に対応した曲線適合方法として最も広く利用されている時間領域データを用いたボルドの方法に注目し、この解法を改良した新しい多点励振曲線適合方法を提案した。この方法の特徴は、ボルドの方法による解法において、すべての測定点と励振点に

図4 第2の方法による曲線適合結果

図5 第3の方法による曲線適合結果

1st : 1511 (Hz)

2nd : 1512 (Hz)

図6 第1の方法により求めた一次と二次の固有モード

1st : 1511 (Hz)

2nd : 1512 (Hz)

図7 第3の方法により求めた一次と二次の固有モード

関する成分を含む固有ベクトルを求め、次にこれを用いて、すべてのデータを参照しすべての測定点に関する留数と剰余項を同時に求められるという点である。

この方法と従来の方法を比較するために、自動車のフライホイールを供試体として加振実験を行い、両方法にて曲線適合を行うことにより、ここで提案した方法が、全体的なモード特性を得るという見地から、より有効であることが確かめられた。

付 録

点 b を励振したときの、測定点 i と j の変位応答の相互相関関数を次のように考える。

$$R_{ij}(\tau) = \sum_{k=0}^{m-1} h_i(kT) h_j((k+\tau)T) \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 $h_i(t)$ は、点 b を励振したときの時刻 t における点 i の応答を添字 b を省略して表したものである。また、自己相関関数および相互相関関数からなる $l \times l$ の行列 $R_b(\tau)$ を次のように定義する。

$$R_b(\tau) = \begin{bmatrix} R_{11}(\tau), \dots, R_{1l}(\tau) \\ \vdots \\ R_{l1}(\tau), \dots, R_{ll}(\tau) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (36)$$

このとき、 $R_{ij}(-\tau) = R_{ji}(\tau)$ であることから

$$R_b(-\tau) = R_b^T(\tau) \quad \dots\dots\dots (37)$$

が成り立つことに注意して $[T_b][T_b]^T$, $[D_b][T_b]^T$ を表せば

$$[T_b][T_b]^T = \begin{bmatrix} R_b(0), & R_b^T(1), & \dots, & R_b^T(p-1) \\ R_b(1), & R_b(0), & \dots, & R_b^T(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_b(p-1), & R_b(p-2), & \dots, & R_b(0) \end{bmatrix}$$

$$[D_b][T_b]^T = [R_b^T(1), R_b^T(2), \dots, R_b^T(p)] \quad \dots\dots\dots (38)$$

このように、ボルドの方法は単点多自由度曲線適合であるプロニーの方法⁽¹⁾を多点に応用したものであり、各測定点間の相互スペクトルの逆フーリエ変換により式(38)を計算することもできる。

文 献

- (1) 長松, モード解析, (昭60), 培風館.
- (2) 大熊・長松, 機論, 51-464, C(昭60), 719.
- (3) Vold, H., Kundrat, J., Rocklin, G. T. and Russell, R., SAE Paper, No. 820194 (1982), 385.