自律性 Duffing 方程式の厳密解とその計算法*
(解の表示と特性パラメータの試行計算)

田村英之**, 松田吉昭***

Exact Solutions of the Autonomous Duffing Equation
and Their Computation
(Expression of Solutions and Trial Calculation
of a Characteristic Parameter)

by Hideyuki TAMURA and Yoshiaki MATSUDA

Exact solutions of the autonomous Duffing equation including the so-called bistable spring system, are obtained in the Fourier expansion by using elliptic functions. The characteristic parameter J in the Fourier coefficients as well as the governing parameter m (or the complementary parameter m_1) of the complete elliptic integral of the first kind, $K(m)$, must be determined to satisfy conditions which arise due to the situation of the system and the non-dimensional natural frequency ν . In this paper three algorithms are established to compute the parameter m or m_1 exactly by a trial method, and also three approximate formulae to express J are proposed. The solutions are classified as five cases according to the characteristics of the spring system and the type of the wave form of the vibration. The frequency responses and some salient features of the solutions are examined and illustrated generally. The numerical results of $J(\nu)$ are shown in tabular form, the relative accuracy of which is about 10^{-14} .

Key Words: Vibration, Duffing Equation, Free Vibration, Exact Solution, Hard Spring, Soft Spring, Cubic Spring, Bistable Spring

1. 緒 言

1 自由度振動系のばね関数が、変位に関する線形項と3次の非線形項で構成される場合の運動は(狭義の) Duffing 方程式により記述される。そのばね関数の各項の係数の大小や符号のちがいに、ハードスプリング、ソフトスプリングなどの区別があり、飛移ばね⁽¹⁾⁽²⁾もこの方程式に含められる。それらの自由振動は、すべて、だ円関数により厳密に解かれ⁽³⁾⁽⁴⁾フーリエ級数により表示されるが(後述するように)その係数の中に含まれる特性パラメータに関する第1種完全だ円積分の母数を求めるために、超越方程式を解かねばならない⁽⁶⁾から、数値計算は必ずしも容易な作業とはいえない。計算機を利用するとしても、あらゆる条件に対して可能な限り十分な精度の計算を能率よく実行するためには、かなりの工夫を必要とする。いわゆるアルゴリズムの研究が重要な問題となるゆえんである。

ところで、通常の計算機内の数値は、すべて確率事象的丸めおよびその累積のために、およそ 10^{-6} (単精

度)あるいは 10^{-15} (倍精度) 程度の相対誤差⁽⁶⁾をかかえている。以下、この値を u と記す。これ以上の精度を求めて計算することは無意味であると同時に、常にこれだけの精度に到達する努力をすべきであろうと考える。これが本報の議論の出発点である。

さて、非線形振動論にとって、より一般広範な系を処理できる、より高精度の解法を開発し完成することは永遠の課題であり、鋭意努力がかさねられているところであるが、解法の精度や有効性を検討するために、厳密解の知られている例題は貴重な存在である。

自律性 Duffing 方程式はその一典型であるが、実際に計算できる(厳密)解の(数値的)精度や信頼性が十分判明していないと無意味である上に、その計算の難易が利用価値を大きく左右する。場合によっては、要求精度に見合うよう計算作業の厳密さを調整し手数を節約するなども、計算機の有効利用の上から配慮されてよいことであろう。よって、アルゴリズム、プログラムとも十分検討に値するし、解の性質も十分に吟味しておく必要がある。

このような見地から、本報では、自律性 Duffing 系の厳密解について、系のパラメータの可能なすべての条件のもとで、常に合理的な最良の計算精度を保証する、いくつかのアルゴリズムと近似式、ならびにそれ

* 昭和61年4月3日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年9月26日。

** 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*** 正員、宮崎大学工学部 (〒880 宮崎市霧島1-1-1)。

らの最適な組合せと使い分けを提案するとともに、解
そのものの性質に関しても若干の考察を添える。

2. 基礎式

自律性 Duffing 方程式を次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} Md^2x/dt^2 + Ax + Bx^3 &= 0 \\ M, A, B: \text{系のパラメータ (定数)} \\ \text{ただし } M > 0 \\ A > 0 \text{ かつ } B \geq 0 \\ \text{あるいは, } A \leq 0 \text{ かつ } B > 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

関連する変数, 定数は, すべて実数とする。(A>0, B>0) は, ハードスプリング, (A>0, B<0) はソフトスプリングであり, (A=0, B>0) を単項(3次曲線)ばね, (A<0, B>0) を飛移ばね⁽¹⁾⁽²⁾と呼んでおく。変数, 定数の置換により, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 d^2\xi/d\theta^2 + \alpha\xi + \beta\xi^3 &= 0 \\ \text{ここに } \alpha &= 1 \text{ かつ } \beta = \pm 1 \\ \text{あるいは } \alpha &= 0 \text{ かつ } \beta = 1 \\ \text{あるいは } \alpha &= -1 \text{ かつ } \beta = 1 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

α, β の組合せに応じて, 自明 [解: $\xi(\theta) \equiv 0$] でない解に対応する ν [無次元 (固有) 振動数] の変域はまちまちである。(x, t, M, A, B) と ($\nu, \xi, \theta, \alpha, \beta$) との関係は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \omega t, \nu = \omega/\omega_0 \\ \text{ただし } \omega &\text{ は (固有円) 振動数} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{|A|/M}, \xi = \sqrt{|B/A|}x \\ \alpha &= \text{sgn}(A), \beta = \text{sgn}(B) \\ \text{ただし } A &\neq 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 1/\sqrt{M}, \xi = \sqrt{B}x \\ \alpha &= 0, \beta = 1 \\ \text{ただし } A &= 0, B > 0 \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

容易に知れるように, $\xi = \bar{\xi}(\theta)$ が式(2)の解であるとき, $\xi = \pm \bar{\xi}(\theta + \theta_0)$, (θ_0 は任意の定数) も解である。また一般性を失うことなく, 解 $\xi(\theta)$ は, θ に関して常に周期 2π としておく。

解 $\xi(\theta)$ は, だ円関数 $\text{cn } v, \text{sn } v, \text{dn } v$ などで表されるが, その表示はいわゆる q 展開⁽⁹⁾によるのが好都合である。(例えば) $\text{cn } v, \text{sn } v$ については,

$$\left. \begin{aligned} \left(\text{cn}\right)_{\text{sn}} v &= \frac{2\pi}{\sqrt{m} K(m)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{r-1/2}}{1 \pm q^{2r-1}} \\ &\times \left(\frac{\cos}{\sin}\right) \frac{2r-1}{2K(m)} \pi v \\ \text{ただし, } q &= \exp[-\pi K(1-m)/K(m)] \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$K(m)$ は第1種完全だ円積分であって, 第2種完全だ円積分 $E(m)$ とともに, 次の定義と計算式⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾によ

$$\left. \begin{aligned} K(m) &= \int_0^{\pi/2} d\phi / \sqrt{1-m \sin^2 \phi} \\ K_1(m) &\equiv K(1-m) \\ E(m) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m \sin^2 \phi} d\phi \\ E_1(m) &\equiv E(1-m) \\ m &= (0 \sim 1): (\text{だ円積分の}) \text{ 母数} \\ m_1 &\equiv 1-m: \text{補母数} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} K(m) &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n m^n \\ E(m) &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n}{1-2n} m^n \\ K(1-m) &= \ln \frac{4}{\sqrt{m}} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n m^n - m \sum_{n=0}^{\infty} R_n Q_{n+1} m^n \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし,} \\ Q_0 &= 1, (n > 0) \\ Q_n &= \left[\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 = Q_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 \\ R_0 &= 1, (n > 0) \\ R_n &= 2 \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = R_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

とくに $m \rightarrow 0$ では,

$$\left. \begin{aligned} K(m) &\rightarrow (\pi/2)(1+m/4) \\ E(m) &\rightarrow (\pi/2)(1-m/4) \\ K_1(m) &\equiv K(1-m) \rightarrow \ln(4/\sqrt{m}) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

さて, 式(6)は,

$$[\pi/2K(m)]v = \theta \dots (12)$$

とおくことにより, θ に関して周期 2π となり, 次のように変形整理される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{m} K(m)}{\pi} \left(\text{cn}\right)_{\text{sn}} \frac{2K(m)}{\pi} \theta \\ = \sum_n^{1,3,5,\dots} \left(\frac{\cos}{\sin}\right) n\theta / \left(\frac{\cosh}{\sinh}\right) nJ \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\text{cn}\right)_{\text{sn}} \frac{2K(m)}{\pi} \theta \\ = \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 \frac{d^2}{dv^2} \left(\text{cn}\right)_{\text{sn}} v \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ここに, J を特性パラメータと定義する。

$$J \equiv (\pi/2)K(1-m)/K(m) = J(m) \dots (14)$$

3. ハードスプリング系 ($\alpha=1, \beta=1$) の自由振動

この場合, 式(2)は次のように書かれる。

$$\nu^2 d^2\xi/d\theta^2 + \xi + \xi^3 = 0 \dots (15)$$

この解を次のように仮定する,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C \operatorname{cn}[2K(m)\theta/\pi] \\ \text{ただし } C, K(m) &: \text{未定定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

これを, 式(15)に代入し, 式(13)と, だ円関数に関する公式⁽⁹⁾を利用すると次式を得る,

$$\left[\nu^2 \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 (2m-1-2m \operatorname{cn}^2 v) + 1 + C^2 \operatorname{cn}^2 v \right] C \operatorname{cn} v = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$\operatorname{cn} v$, $\operatorname{cn}^3 v$ 各項の係数を零とおくと, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} \nu^2 \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 (2m-1) + 1 &= 0 \\ \therefore m &= m(\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$C=0$, あるいは,

$$\left. \begin{aligned} -2\nu^2 \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 m + C^2 &= 0 \\ \therefore C &= 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{m} K(m)}{\pi} \nu = c(\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

与えられた ν に対して, 式(18)を満足するよう m を求め, それを式(19)に用いて, 非自明解の振幅 C が定まる. 式(16), (19), (13)を組合せると次の表示を得る.

$$\xi(\theta) = 2\sqrt{2} \nu \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{\cosh nJ(\nu)} \dots\dots\dots (20)$$

式(18)は超越方程式であって, 試みの法により解けばよく, 変数 m に関して単調であり常に単根が得られる. K の性質により, 次の対応があることがわかる.

$$\left. \begin{aligned} m \rightarrow 0+; \nu \rightarrow 1+, J \rightarrow \infty, |\xi| \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 0.5-; \nu \rightarrow \infty, J \rightarrow (\pi/2)+, |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots (21)$$

$\nu \rightarrow \infty$ の場合の解は, 式(20)にて $J = \pi/2$ とおくことにより求められ, それはまた $\alpha=0, \beta=1$ (単項ばね)の $0 < \nu < \infty$ に対する解表示と一致する⁽⁶⁾. その場合の数値結果を表1に示している.

4. ソフトスプリング系

($\alpha=1, \beta=-1$) の自由振動

$$\nu^2 d^2 \xi / d\theta^2 + \xi - \xi^3 = 0 \dots\dots\dots (22)$$

表1 単項ばね系 ($\alpha=0, \beta=1$) の解

Case No. ③	
n	$a_n / \sum_i a_i \equiv \bar{a}_n$
1	0.955005986960621
3	0.4304949557749190-01
5	0.1860487231133060-02
7	0.803989523060930-04
9	0.3474353880804180-05
11	0.1501404446245710-06
13	0.6488156902092640-08
15	0.2803786820495610-09
17	0.1211626144899390-10
19	0.5235911319193180-12
21	0.2262642437839740-13
23	0.9777764536894900-15
$\xi_{\max} = 1.18034059901610 \nu$,	
$\xi(\theta) = \xi_{\max} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \bar{a}_n \cos n\theta$	

この解を次のように仮定する,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C \operatorname{sn}[2K(m)\theta/\pi] \\ \text{ただし } C, K(m) &: \text{未定定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

前章の式(17)以下と類似の処理により, 次式を得る,

$$\left[-\nu^2 \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 (1+m-2m \operatorname{sn}^2 v) + 1 - C^2 \operatorname{sn}^2 v \right] C \operatorname{sn} v = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$\operatorname{sn} v$, $\operatorname{sn}^3 v$ 各項の係数を零とおくと, それぞれ,

$$-\nu^2 \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 (1+m) + 1 = 0 \dots\dots\dots (25)$$

$$2\nu^2 \left[\frac{2K(m)}{\pi} \right]^2 m - C^2 = 0 \dots\dots\dots (26)$$

与えられた ν に対して, 式(25)を満足するよう m を求め, それを式(26)に用いて, 振幅 C が定まる. 式(23), (26), (13)を組合せると次の表示を得る.

$$\left. \begin{aligned} \xi(\theta) &= 2\sqrt{2} \nu \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sinh nJ(\nu)} \\ \text{あるいは,} \\ \xi(\theta) &= 2\sqrt{2} \nu \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\theta}{\sinh nJ(\nu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

式(21)相当の対応は,

$$\left. \begin{aligned} m \rightarrow 0+; \nu \rightarrow 1-, J \rightarrow \infty, |\xi| \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 1-; \nu \rightarrow 0+, J \rightarrow 0, |\xi| \rightarrow 1- \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とくに $\nu \rightarrow 0+$ の場合, 式(27)の表示は不定形になるが, 式(25)により, $m \rightarrow 1-$ にて,

$$\nu \rightarrow \pi/2\sqrt{2} K(1-) \dots\dots\dots (29)$$

と表されることにより, 式(27)の n (奇数) 次調波の振幅の極限を計算してみると,

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow 0 \\ (m \rightarrow 1-)}} 2\sqrt{2} \nu / \sinh \left[n \frac{\pi}{2} \frac{K(1-m)}{K(m)} \right] = \frac{\pi}{K(1-)} / \frac{\pi}{2} \frac{\pi/2}{K(1-)} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} \dots\dots\dots (30)$$

となるから, $\xi(\theta)$ は片振幅1の矩形波を表すことができる.

5. 解の一般的表示と母数の試行計算

5.1 解の分類と母数の決定 前章までは, とくにハードおよびソフトスプリング系について詳論したが, 式(2)に示すような他の α, β 条件の場合も, すべて, だ円関数を用いて解かれ, 式(20), (27)相当のフーリエ展開で表示される⁽⁶⁾⁽⁸⁾. これらは一般に次式で表すことができる.

$$\xi(\theta) = 2\sqrt{2} \nu \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \right) \dots\dots\dots (31)$$

そのフーリエ係数中の特性パラメータ J [式(14)] に必

要な K の母数 m を決定する固有の条件式が、それぞれの α, β に随伴する。これらの一覧を表 2 にまとめた。解は 5 とおりに場合分けされ、以下、表に記すように、①, ..., ⑤と呼び分ける。このうち③は m の試行計算を必要とせず $J = \pi/2$ であり、解の表示は容易である(表 1)から、以後の表には含めていない。計算作業の中心は $m = m(\nu)$ の決定であり、最終的に J が十分の精度で求められること、さらに a_n の精度や信頼性が十分確認されることが必要である。

表 2 中の $m(\nu)$ の決定方程式 modulus equation を、一般に次のように記す。

$$f(m) - 1 \equiv \varepsilon = 0 \dots \dots \dots (32)$$

いずれの方法によるにせよ、とにかく $|\varepsilon|$ が十分微小となるように m の逐次近似が進められる。 m, f と

表 2 場合分けと母数の決定方程式

Case No.	Name	α	β	Range of parameter	Modulus equation $f(m)-1=0$
①	Hard spring	1	1	$1 < \nu < \infty$ $0 < m < 1/2$ $\infty > J > \pi/2$	$\left(\frac{2\nu K}{\pi}\right)^2 (1-2m)-1=0$
②	Soft spring	1	-1	$0 < \nu < 1$ $1 > m > 0$ $0 < J < \infty$	$\left(\frac{2\nu K}{\pi}\right)^2 (1+m)-1=0$
③	Cubic spring	0	1	$0 < \nu < \infty$ $m=1/2$ $J=\pi/2$	$m=1/2$
④	Bistable spring (mode 1)	-1	1	$0 < \nu < \infty$ $1 > m > 1/2$ $0 < J < \pi/2$	$\left(\frac{2\nu K}{\pi}\right)^2 (2m-1)-1=0$
⑤	Bistable spring (mode 2)	-1	1	$0 < \nu < \sqrt{2}$ $1 > m > 0$ $0 < J < \infty$	$\left(\frac{\nu K}{\pi}\right)^2 (2-m)-1=0$

表 3 解とその誤差の表示

Case No.	a_0	a_n	n	Relative error of amplitudes
① ④	0	$\frac{1}{\cosh nJ}$	odd	$\frac{\delta a_n}{a_n} = -\tanh nJ \quad nJ \frac{\delta J}{J}$
②	0	$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sinh nJ}$	odd	$\frac{\delta a_n}{a_n} = -\coth nJ \quad nJ \frac{\delta J}{J}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{\cosh 2nJ}$	even odd	$\frac{\delta a_n}{a_n} = -\tanh 2nJ \quad 2nJ \frac{\delta J}{J}$

Note: $\xi(\theta) = 2\sqrt{2}\nu \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \right]$, $J = (\pi/2) \cdot K(1-m)/K(m)$, $\delta a_n, \delta J$: errors

表 5 準線形 ($m \rightarrow 0$) の場合

Case No.	Modulus equation $f_0(m)-1=0$	Derivative df_0/dm	ν ($m \rightarrow 0$)	m ($\rightarrow 0$)	Fundamental amplitude (limit ν), $2\sqrt{2}\nu a_1$	Harmonic amplitudes (limit ν), $2\sqrt{2}\nu a_n$
①	$\frac{\nu^2}{\nu^2-1} \left[2m \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 - P(2+P) \right] - 1 = 0$	$\frac{g}{1-\nu^2}$	1+	$\frac{2}{3} \frac{\nu^2-1}{\nu^2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\nu^2-1}, (\nu+1+)$	$4\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{\nu^2-1}}{2\sqrt{6}} \right]^n$
②	$\frac{\nu^2}{1-\nu^2} \left[m \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 + P(2+P) \right] - 1 = 0$		1-	$\frac{2}{3} \frac{1-\nu^2}{\nu^2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\nu^2}, (\nu+1-)$	$4\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2\sqrt{6}} \right]^n$
⑤	$\frac{\nu}{\sqrt{2-\nu^2}} \left[P^2 + \frac{m}{2} [0 - P(2+P)] \right] - 1 = 0$	$\frac{g/[(2-\nu^2) f_0]}{= g/(2-\nu^2)}$	$\sqrt{2}-$	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2-\nu^2}}{\nu}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{1-\frac{\nu^2}{2}}, (\nu+\sqrt{2}-)$	$4 \left[\frac{\sqrt{1-\nu^2/2}}{2\sqrt{6}} \right]^n$

Note: $P = \frac{2}{\pi} K - 1 = \frac{m}{4} (1+Q) = \frac{m}{4} \left[1 + \left(\frac{3}{4} \right)^m + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \right)^m + \dots \right]$, $K = \frac{\pi}{2} (1+P)$, $J = \ln 4 / \sqrt{m(+0)} + \dots$,
 $Q = \frac{4}{m} \left(\frac{2}{\pi} K - 1 \right) - 1 = \frac{4P}{m} - 1 = \frac{9}{16} m \left[1 + \left(\frac{5}{6} \right)^m + \left(\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} \right)^m + \dots \right]$, g : Derivative in Table 4

に u の程度の相対誤差 (不確定性) を有するとして、上式から m の誤差 δm は、およそ

$$|\delta m| \approx (u + |\varepsilon|) / |df/dm| \dots \dots \dots (33)$$

と考えられる。 $|\delta m| \approx |mu|$ の精度で m が求められ、しかも、試行計算が円滑に進行するためには、

$$\left. \begin{aligned} |df/dm| &\geq 1/|m|, \text{あるいは} \\ |df/d(\ln|m|)| &\geq 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

が成立すべきことならびに $f(m)$ の直線性が良好であることが必要である

5.2 誤差の推定 まず次式が成り立つ⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾。〔以下、 $K(m), K_1(m)$ などを K, K_1 などと略記する。式(7)参照〕

$$dK/dm = (E - m_1 K) / 2m_1 m \dots \dots \dots (35)$$

J を m で微分し、上式と Legendre の関係式⁽¹³⁾

$$K_1 E + K E_1 - K K_1 = \pi/2$$

とを組合せると以下の諸式を得る。

$$dJ/dm = -(\pi/2K)^2 / 2mm_1 \dots \dots \dots (36)$$

$$\delta J/J = (-\pi/4KK_1 m_1)(\delta m/m) \dots \dots \dots (37)$$

$$\delta J/J = (\pi/4KK_1 m)(\delta m_1/m_1) \dots \dots \dots (38)$$

また、フーリエ係数 a_n およびその誤差 δa_n と、上記 J の誤差 δJ の関係は表 3 のようにまとめられる。さらに、表 2 の $f(m)$ に対応する df/dm は表 4 のように示される。これらが、アルゴリズムを検討する根拠

表 4 母数の決定方程式の微係数

Case No.	Derivative of modulus equation $\frac{df}{dm} = g$	df/dm ($m \rightarrow 0$)	df/dm ($m_1 \rightarrow 0$)
①	$\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \frac{K}{m_1 m} [(E-K) + m(K-2E)]$	$-\frac{3}{2}$	$m_1 = 1-m$ $K_1^0 = \ln \frac{4}{\sqrt{m_1}}$
②	$\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \frac{K}{m_1 m} [(E-K) + m(K+E)]$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \frac{2}{m_1} K_1^0$
④	$\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \frac{-K}{m_1 m} [(E-K) + m(K-2E)]$	-	$\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^2 \frac{1}{m_1} K_1^0$
⑤	$\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^2 \frac{K}{m_1 m} [2(E-K) + m(2K-E)]$	$\frac{3m}{4}$	$\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^2 \frac{1}{m_1} K_1^0$

Note: $E - K = \frac{-\pi m}{2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^m + \left(\frac{3}{4} \right)^m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^m + \dots \right]$, ($m \rightarrow 0$)

と前提を与える。

5.3 準線形 ($m \rightarrow 0$) の場合における障害と対策
表4に示すように $m \rightarrow 0$ における df/dm は①, ②が非零の定数, ⑤は $O(m) \rightarrow 0$ となる。いずれも式(34)に照らして不都合であり, また $\delta m/m(m)$ の相対誤差が, 式(33)により, ①, ②, ⑤に対してそれぞれ, $u/O(m)$, 同左, $u/O(m^2)$ となるから, 式(37)により, $\delta J/J \rightarrow \infty$ となる。これは, 表2中の $f(m)$ の K が, $m \rightarrow 0$ にて, $K=O(1)$ となることによる障害と考え, 式(8)による $K(m)$ の表現を直接用いて変形整理し, 表5のようにあらためる。例えば①の場合, $f_0(m)$ の m^2 以上の項を省略近似すると, modulus equation から

$$m \simeq (2/3)(\nu^2 - 1)/\nu^2 \dots\dots\dots (39)$$

であり, $df_0/dm = O(m^{-1})$ となることがわかり, 式(34)相当は満足され, 式(33)相当の関係から $\delta m/m \simeq u$, さらに式(37)も $\delta J/J \simeq u$ が達成されて問題は解消する。ほかに②, ⑤の場合もほぼ同様であり, 結果は表5に示すとおりである。

$m \rightarrow 0$ では, 式(11), (14)により, $J \simeq \ln(4/\sqrt{m}) \rightarrow \infty$ であるから, フーリエ係数 a_n (表3) について次の近似が利用される。

$$\begin{aligned} \cosh(nJ) &\simeq \sinh(nJ) \simeq \exp(nJ)/2 \\ &\simeq (4/\sqrt{m})^n/2 \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

これと, $m(\rightarrow 0)$ の表示を組合せて $\xi(\theta)$ の調波振幅を近似表示することができ, 例えば①の場合,

$$2\sqrt{2}\nu a_n \simeq 4\sqrt{2}(\sqrt{\nu^2 - 1}/2\sqrt{6})^n \dots\dots\dots (41)$$

となる。②, ⑤についても同様であり, 結果を表5中に付記した。とくに基本波は, 線形性が微小との仮定に基づく理論⁽¹²⁾による計算結果と完全に一致することが確かめられる。

5.4 超低周波 ($\nu \rightarrow 0, m \rightarrow 1$) の場合における障害と対策
表4によれば, この場合, df/dm については問題なく, 式(33)から $\delta m/m \simeq u$ が期待できる。しかし, 式(37)によれば, $m_1 (=1-m) \rightarrow 0$ のために $\delta J/J \rightarrow \infty$ となることが問題である。このときは, 式(38)に着目して $\delta m_1/m_1 \simeq u$ が成立するようにねらう。まず, 表2の内容を, すべて m による表示から m_1 によるそれにあらため, m_1 を探索する問題にきりかえる(ここに, $df/dm_1 = -df/dm$)。次に試行変数を,

$$y = \ln(16/m_1) \dots\dots\dots (42)$$

にあらためると, $m_1 \rightarrow 0 (m \rightarrow 1)$ において, 表2中の modulus equation の $f(m) = f(1 - 16e^{-y})$ なる関数の (y に関する) 直線性が大幅に改善される。ただし, 陽に y を求めることは精度的に好ましくないので $f(1$

$-m_1) - 1 = 0$ の逐次近似にニュートン・ラフソン法を使うものとして, i 番め [肩号 (i)] の m_1 から $(i+1)$ 番め [肩号 ($i+1$)] の m_1 を推定する式を

$$m_1^{(i+1)} = m_1^{(i)} / \exp\left(\frac{\varepsilon^{(i)}/m_1^{(i)}}{(df/dm_1)^{(i)}}\right) \dots\dots\dots (43)$$

とすることにより満足な成果を得た。なおこの場合の解法はさらに工夫の余地がある (別報予定)。

6. 近 似 式⁽⁷⁾⁽⁸⁾

m, ν が特別の値の近傍では, 母数を試行計算することを省略して, 陽に m あるいは J の表示を得ることができる。

6.1 超低周波 ($\nu \rightarrow 0$) の場合 ②, ④, ⑤の $m_1 \rightarrow 0$ の場合がこれに相当する。例として②の場合, $f(m) - 1 = 0$ (表2) から,

$$K(m) = K_1(m_1) = (\pi/2\sqrt{2}\nu)[1 + O(m_1)]$$

これと, 式(11)による $K_1(m_1)$ の形を組合せると,

$$\begin{aligned} m_1 &\simeq 16e^{-2K_1} = 16 \exp\left\{\frac{-\pi}{\sqrt{2}\nu}[1 + O(m_1)]\right\} \\ &= 16e^{-\pi/\sqrt{2}\nu}[1 + 1/O(\nu e^{\pi/\sqrt{2}\nu})] \rightarrow 0 \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

ゆえに, 式(11)の $K(m_1)$, (ただし $m_1 \rightarrow 0$) もあわせ考えて,

$$\begin{aligned} J &= (\pi/2)K(m_1)/K(1-m_1) \\ &= (\pi\nu/\sqrt{2})[1 + O(m_1)] \simeq \pi\nu/\sqrt{2} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

④, ⑤の場合についても同様の表示が得られ, これらを図1中に示している。なお, 通常の計算機 ($10^{-78} \sim 10^{75}$ の数値が処理可能⁽⁵⁾) では, $m_1 \rightarrow 0$ で式(43)の $m_1^{(i+1)}$ が定義不能となる (プログラムにもよるが) ことがあり⁽⁸⁾, その際は式(45)の利用が必要である。

6.2 準線形 ($\nu \rightarrow 1, \sqrt{2}$) の場合 $m \rightarrow 0$ に対して, 表5に示す $\nu(m \rightarrow 0)$ が対応する。 $J \simeq \ln(4/\sqrt{m})$ の誤差が $O(m)$ であり, m 自身, m 程度の相対誤差で, 表5中の $m(\rightarrow 0)$ により近似できる [式(39)] から,

図1 アルゴリズムの適用域一覧
(REAL * 8 にて J の相対誤差 $\delta J/J \leq 10^{-15}$)

図 2 特性パラメータ J , 最大変位 $\xi_{\max}$, 最小変位 $\xi_{\min}$, 変位の平均値 ξ_{mean} , 基本波振幅 A_1 , 波形ひずみ率 h などの周波数特性

$m = O(|\nu - 1|)$ (①, ②の場合), および $O(\sqrt{2} - \nu)$ (⑤

$$J = (\pi/2)[1 + O(\nu^{-2})] \dots \dots \dots (47)$$

の場合) の誤差で J が陽表示され,

である (図 1),

$$\left. \begin{aligned} J &= \ln(4/\sqrt{m}) + O(|\nu - \nu(m \rightarrow 0)|) \\ \text{ただし } m &= m(\rightarrow 0): \text{表 5 参照} \end{aligned} \right\} \dots \dots (46)$$

7. 振幅特性の周波数応答

なる簡潔な表示を得る (図 1).

(無次元固有) 振動数 ν と, $\xi(\theta)$ の (θ に関する) 最

6.3 超高周波 ($\nu \rightarrow \infty$) の場合⁽⁸⁾ ①, ④におけ

大値 $\xi_{\max}$, 最小値 $\xi_{\min}$, 平均値 ξ_{mean} などとの関係を,

る $m \approx 1/2$ の場合は,

①~⑤の各場合について数値計算した結果を図 3 に示

した. ①~④は, 奇数 (n) 次調波 a_n のみから成る解

表 6 フーリエ係数の特性パラメータ $J(\nu)$ (相対誤差 $\approx 10^{-14}$)

Case No. ①	Hard spring	Case No. ②	Soft spring	Case No. ④	Bistable spring (Full swing mode)	Case No. ⑤	Bistable spring (Half swing mode)
ν	J	ν	J	ν	J	$\sqrt{2}-\nu$	J
$+1+$	$+\ln\sqrt{2}/(\nu-1)$	$+1-$	$+\ln\sqrt{2}/(1-\nu)$	$+0+$	$+\nu/2$	$+0+$	$-\ln[12\sqrt{2}/(\sqrt{2}-\nu)]/4$
1.0000000000000001	17.3405489758523	9.999999999999999	17.3405489758523	-0.010	-1.57076326794890-02	-10-13	8.76691788549615
1.0000000000000002	16.5113755385572	9.999999999999999	16.5113755385572	-0.015	-1.57076326794890-02	-20-13	8.59361090336615
1.0000000000000005	16.0558300116253	9.999999999999999	16.0558300116253	-0.020	-1.57076326794890-02	-30-13	8.48473584073876
1.0000000000000010	15.8209256420255	9.999999999999999	15.8209256420255	-0.030	-1.57076326794890-02	-40-13	8.41793889038172
1.0000000000000020	15.6268283907553	9.999999999999999	15.6268283907553	-0.050	-1.57076326794890-02	-50-13	8.37851964181247
1.0000000000000050	15.4045374731386	9.999999999999999	15.4045374731386	-0.070	-1.57076326794890-02	-60-12	8.35178891231316
1.0000000000001000	15.0579438828590	9.999999999999999	15.0579438828590	-0.100	-1.57076326794890-01	-70-12	8.33562533899890
1.0000000000002000	14.7113902525797	9.999999999999999	14.7113902525797	-0.150	-1.57076326794890-01	-80-11	8.32433585438886
1.0000000000005000	14.2532442626448	9.999999999999999	14.2532442626448	-0.200	-1.57076326794890-01	-90-11	8.31726586089933
1.0000000000100000	13.7066713536883	9.999999999999999	13.7066713536883	-0.300	-1.57076326794890-01	-10-10	8.31399790657481
1.0000000002000000	13.1609324607954	9.999999999999999	13.1609324607954	-0.400	-1.57076326794890-01	-20-10	8.31266922706056
1.0000000005000000	12.7553787899350	9.999999999999999	12.7553787899350	-0.500	-1.57076326794890-01	-30-10	8.31266922706056
1.0000000010000000	12.4088051992759	9.999999999999999	12.4088051992759	-0.600	-1.57076326794890-01	-40-10	8.31266922706056
1.0000000020000000	12.1257512654539	9.999999999999999	12.1257512654539	-0.700	-1.57076326794890-01	-50-10	8.31266922706056
1.0000000050000000	11.6040864240755	9.999999999999999	11.6040864240755	-0.800	-1.57076326794890-01	-60-09	8.31266922706056
1.0000000100000000	10.7993672906918	9.999999999999999	10.7993672906918	-0.900	-1.57076326794890-01	-70-09	8.31266922706056
1.0000000200000000	10.4279370395335	9.999999999999999	10.4279370395335	-1.000	-1.57076326794890-01	-80-09	8.31266922706056
1.0000000500000000	9.6460747606980	9.999999999999999	9.6460747606980	-1.500	-1.57076326794890-01	-90-08	8.31266922706056
1.0000001000000000	8.5013071210650	9.999999999999999	8.5013071210650	-2.000	-1.57076326794890-01	-10-08	8.31266922706056
1.0000002000000000	7.4978256463275	9.999999999999999	7.4978256463275	-3.000	-1.57076326794890-01	-20-08	8.31266922706056
1.0000005000000000	6.1502093122051	9.999999999999999	6.1502093122051	-5.000	-1.57076326794890-01	-30-08	8.31266922706056
1.0000010000000000	5.3454318931660	9.999999999999999	5.3454318931660	-7.000	-1.57076326794890-01	-40-08	8.31266922706056
1.0000020000000000	4.6989231406758	9.999999999999999	4.6989231406758	-10.000	-1.57076326794890-01	-50-08	8.31266922706056
1.0000050000000000	3.8492321691295	9.999999999999999	3.8492321691295	-15.000	-1.57076326794890-01	-60-07	8.31266922706056
1.0000100000000000	3.0423862977765	9.999999999999999	3.0423862977765	-20.000	-1.57076326794890-01	-70-07	8.31266922706056
1.0000200000000000	2.4611285174086	9.999999999999999	2.4611285174086	-30.000	-1.57076326794890-01	-80-07	8.31266922706056
1.0000500000000000	2.1756878011943	9.999999999999999	2.1756878011943	-50.000	-1.57076326794890-01	-90-06	8.31266922706056
1.0001000000000000	1.8720897012124	9.999999999999999	1.8720897012124	-70.000	-1.57076326794890-01	-10-06	8.31266922706056
1.0002000000000000	1.7186457596564	9.999999999999999	1.7186457596564	-100.000	-1.57076326794890-01	-20-06	8.31266922706056
1.0005000000000000	1.6040862802223	9.999999999999999	1.6040862802223	-150.000	-1.57076326794890-01	-30-06	8.31266922706056
1.0010000000000000	1.581272860967	9.999999999999999	1.581272860967	-200.000	-1.57076326794890-01	-40-06	8.31266922706056
1.0020000000000000	1.5789082518460	9.999999999999999	1.5789082518460	-300.000	-1.57076326794890-01	-50-06	8.31266922706056
1.0050000000000000	1.5759737783904	9.999999999999999	1.5759737783904	-500.000	-1.57076326794890-01	-60-06	8.31266922706056
1.0100000000000000	1.5720859800615	9.999999999999999	1.5720859800615	-700.000	-1.57076326794890-01	-70-06	8.31266922706056
1.0200000000000000	1.5710024448749	9.999999999999999	1.5710024448749	-1000.000	-1.57076326794890-01	-80-06	8.31266922706056
1.0500000000000000	1.5708478487085	9.999999999999999	1.5708478487085	-1500.000	-1.57076326794890-01	-90-06	8.31266922706056
1.1000000000000000	1.5708092067980	9.999999999999999	1.5708092067980	-2000.000	-1.57076326794890-01	-10-06	8.31266922706056
1.2000000000000000	1.5707983875741	9.999999999999999	1.5707983875741	-3000.000	-1.57076326794890-01	-20-06	8.31266922706056
1.5000000000000000	1.5707684988894	9.999999999999999	1.5707684988894	-5000.000	-1.57076326794890-01	-30-06	8.31266922706056
2.0000000000000000	1.5707645559536	9.999999999999999	1.5707645559536	-7000.000	-1.57076326794890-01	-40-06	8.31266922706056
3.0000000000000000	1.5707634742026	9.999999999999999	1.5707634742026	-10000.000	-1.57076326794890-01	-50-06	8.31266922706056
5.0000000000000000	1.5707628208983	9.999999999999999	1.5707628208983	-15000.000	-1.57076326794890-01	-60-06	8.31266922706056
7.0000000000000000	1.5707625328082	9.999999999999999	1.5707625328082	-20000.000	-1.57076326794890-01	-70-06	8.31266922706056
10.000000000000000	1.5707623268464	9.999999999999999	1.5707623268464	-30000.000	-1.57076326794890-01	-80-06	8.31266922706056
20.000000000000000	1.5707620737550-02	9.999999999999999	1.5707620737550-02	-50000.000	-1.57076326794890-01	-90-06	8.31266922706056
50.000000000000000	1.5707618513580-02	9.999999999999999	1.5707618513580-02	-70000.000	-1.57076326794890-01	-10-06	8.31266922706056
100.00000000000000	1.5707616799541-02	9.999999999999999	1.5707616799541-02	-100000.000	-1.57076326794890-01	-20-06	8.31266922706056
200.00000000000000	1.57076157079490	9.999999999999999	1.57076157079490	-150000.000	-1.57076326794890-01	-30-06	8.31266922706056
500.00000000000000	1.5707614874794	9.999999999999999	1.5707614874794	-200000.000	-1.57076326794890-01	-40-06	8.31266922706056
1000.0000000000000	1.5707614282268	9.999999999999999	1.5707614282268	-300000.000	-1.57076326794890-01	-50-06	8.31266922706056
2000.0000000000000	1.5707613875741	9.999999999999999	1.5707613875741	-500000.000	-1.57076326794890-01	-60-06	8.31266922706056
5000.0000000000000	1.5707613536753	9.999999999999999	1.5707613536753	-700000.000	-1.57076326794890-01	-70-06	8.31266922706056
10000.000000000000	1.5707613286096	9.999999999999999	1.5707613286096	-1000000.000	-1.57076326794890-01	-80-06	8.31266922706056
20000.000000000000	1.5707613028082	9.999999999999999	1.5707613028082	-1500000.000	-1.57076326794890-01	-90-06	8.31266922706056
50000.000000000000	1.5707612783904	9.999999999999999	1.5707612783904	-2000000.000	-1.57076326794890-01	-10-06	8.31266922706056
100000.000000000000	1.5707612537550-02	9.999999999999999	1.5707612537550-02	-3000000.000	-1.57076326794890-01	-20-06	8.31266922706056
200000.000000000000	1.5707612286096	9.999999999999999	1.5707612286096	-5000000.000	-1.57076326794890-01	-30-06	8.31266922706056
500000.000000000000	1.57076120737550-02	9.999999999999999	1.57076120737550-02	-7000000.000	-1.57076326794890-01	-40-06	8.31266922706056
1000000.000000000000	1.57076118513580-02	9.999999999999999	1.57076118513580-02	-10000000.000	-1.57076326794890-01	-50-06	8.31266922706056
2000000.000000000000	1.57076116799541-02	9.999999999999999	1.57076116799541-02	-15000000.000	-1.57076326794890-01	-60-06	8.31266922706056
5000000.000000000000	1.570761157079490	9.999999999999999	1.570761157079490	-20000000.000	-1.57076326794890-01	-70-06	8.31266922706056
10000000.000000000000	1.57076114282268	9.999999999999999	1.57076114282268	-30000000.000	-1.57076326794890-01	-80-06	8.31266922706056
20000000.000000000000	1.57076113875741	9.999999999999999	1.57076113875741	-50000000.000	-1.57076326794890-01	-90-06	8.31266922706056
50000000.000000000000	1.57076113536753	9.999999999999999	1.57076113536753	-70000000.000	-1.57076326794890-01	-10-06	8.31266922706056
100000000.000000000000	1.57076113286096	9.999999999999999	1.57076113286096	-100000000.000	-1.57076326794890-01	-20-06	8.31266922706056
200000000.000000000000	1.57076113028082	9.999999999999999	1.57076113028082	-150000000.000	-1.57076326794890-01	-30-06	8.31266922706056
500000000.000000000000	1.57076112783904	9.999999999999999	1.57076112783904	-200000000.000	-1.57076326794890-01	-40-06	8.31266922706056
1000000000.000000000000	1.57076112537550-02	9.999999999999999	1.57076112537550-02	-300000000.000	-1.57076326794890-01	-50-06	8.31266922706056
2000000000.000000000000	1.57076112286096	9.999999999999999	1.57076112286096	-500000000.000	-1.57076326794890-01	-60-06	8.31266922706056
5000000000.000000000000	1.570761120737550-02	9.999999999999999	1.570761120737550-02	-700000000.000	-1.57076326794890-01	-70-06	8.31266922706056
10000000000.000000000000	1.570761118513580-02	9.999999999999999	1.570761118513580-02	-1000000000.000	-1.57076326794890-01	-80-06

図 3 振幅の周波数応答

で、 $\xi(\theta) = -\xi(\theta + \pi)$ (いわゆる対称波形)、図にて $\xi_{\max} = -\xi_{\min}$, $\xi_{\text{mean}} = 0$ である。

ハードスプリング①、ソフトスプリング②は、近似解⁽¹²⁾から、すでによく知られた振幅特性の形であり、単項ばね系③は ν と無関係に一定の波形でその大きさが ν に比例し、 $\nu \rightarrow \infty$ とともに①は③に漸近する。

④と⑤とは全く同一の系 (飛移ばね系, $\alpha = -1, \beta = 1$) から初期条件の違いにより発生が区別される互いに別の分枝の解である。そのうち④は①～③と同様の奇数次調波解で、①と類似に $\nu \rightarrow \infty$ にて③に漸近する。⑤のほうは、定数項 (ν に比例) を含めてすべての次数の調波が非零定符号で存在する (いわゆる非対称波形) で、その $\xi(\theta)$ は、常に符号が一定であるから、正、負二種の分枝が存在する。④、⑤の $\nu \rightarrow \infty$ における波形は図中に略記 (40, 50) したように、高さ $\sqrt{2}$ のインパルス列⁽⁶⁾である。また②の $\nu \rightarrow 0$ の波形も図中略記 20 のような矩形波である。

8. 結 論

自律性 Duffing 方程式について、いわゆるハードスプリング、ソフトスプリングなど、5 種の場合分けを行い、それらの厳密解のフーリエ展開を示した。解は特性パラメータ J により統一的に表現され、 J さえ得られれば、ただちにフーリエ係数 (調波振幅) が定まるよう簡潔な表示にまとめられており、その J を高精度

で計算するアルゴリズムについて検討した。

(1) J の試行解アルゴリズム; 振動数 ν (だ円積分の母数 m) の範囲に応じて使い分ける 3 種のアルゴリズム ($m \approx 0, \approx 1$, およびこれらの中間) を提案した。

(2) J の近似式; 特別な振動数 ν (だ円積分の母数 m) で漸近的に妥当する近似式 3 種 [$\nu \approx 0, \approx$ (線形系の固有振動数), および $\rightarrow \infty$] を示した。

(3) アルゴリズム/近似式の適用域一覧を図 1 に示した。この使い分けによる公称精度は J に関して相対誤差 10^{-15} 以下 (REAL * 8 計算により実測⁽⁸⁾) である。

(4) 振動数/振幅特性 (図 3); (無次元) 振動数 ν と $\xi(\theta)$ の最大値 $\xi_{\max}$, 最小値 $\xi_{\min}$, 平均値 ξ_{mean} などの関係を、各ばね特性の場合について示した。

(5) 飛移ばね系 bistable spring の解は、奇数次調波解, 非奇数次調波正符号解, および同負符号解の 3 個の分枝が存在する (この系については詳論を別報に予定している)。

(6) 振動数/ J , $\xi_{\max}$, $\xi_{\min}$, ξ_{mean} , 波形ひずみ率 h , 基本波振幅 A_1 特性を図 2 に示した。 h, A_1 の定義は図中に併記している。また曲線の端に添えた数値/数式は漸近値を示している。

(7) 振動数 ν /特性パラメータ J の関数表を表 6 に示した。相対誤差は 10^{-14} 程度である。

終わりに、本研究の数値計算をさせていただいた九州大学大型計算機センターの諸姉兄に謝意を表する。

文 献

- (1) 松田, 機論, 31-222 (昭 40), 210.
- (2) 田島, 振動の工学, (昭 45), 430, 産業図書.
- (3) McLachlan, N. W., *Ordinary Nonlinear Differential Equations*, (1956), 39, Oxford at the Clarendon Press.
- (4) 谷口・ほか編, 振動工学ハンドブック, (昭 51), 390, 養賢堂.
- (5) 高田, 機械計算法, (昭 56), 8, 養賢堂.
- (6) 田村・ほか 2 名, 九大工学集報, 57-2 (昭 59), 117.
- (7) 田村・松田, 九大工学集報, 58-1 (昭 60), 69.
- (8) 田村・ほか 3 名, 九大工学集報, 58-2 (昭 60), 145.
- (9) 機械工学便覧, (昭 50), 2-15, 日本機械学会.
- (10) Hart, J. F., *Computer Approximations*, (1968), 150, John Wiley & Sons.
- (11) Jahnke, E. and Emde, F., *Tables of Functions*, (1933), 145.
- (12) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 59, John Wiley & Sons.
- (13) 森口・ほか 2 名, 数学公式 I, (昭 31), 228, 岩波全書 221.