曲げ, せん断およびねじりの組合せ任意動荷重を受ける 任意形状断面棒の応力解析*

長屋 幸助**, 後藤 徹朗***
佐々木 豊紀†, 井開 重男**

Stresses in a Rod of Arbitrary Cross-Section to General Bending, Shearing and Torsional Dynamic Loads

by Kosuke NAGAYA, Tetsuro GOTO,
Toyonori SASAKI, and Sigeo IKAI

This paper is concerned with a method for obtaining stresses in a rod of arbitrary cross-section subjected to combined loads of bendings, shearings and torsions which are the complicated functions of time. In the first step the analysis derives the bending moment, shearing force and torsional moment by use of a combination methods of the Laplace transformation and Fourier series expansion. The transient stresses are obtained based on the two dimensional theory of elasticity, but in which the Fourier expansion collocation procedure is applied to deal with the complex boundary shape of the cross section. To discuss the validity of this analysis, experimental tests are also carried out for an oval rod subjected to the three combined transient loads.

Key Words: Strength of Materials, Vibration, Dynamic Response, Stress, Principal Stress, Arbitrary Cross-Section, Bar, Torsion, Bending

1. 緒 言

棒の応力問題は材料力学, 弾性学, 機械力学の基礎的問題で古くから多くの研究者により取扱われ, 静的問題はほぼ完全に解析されている^{(1)~(7)}. 一方, 動的問題についてははりの衝撃, 丸棒の衝撃ねじりなどの問題はすでに体系化されているが^{(8)~(15)}, 棒断面が異形の場合は断面境界の処理が複雑となるため報告された例は少ないように思われる. これらの問題で棒を無限長とすると, 棒表面の条件のみを満足させるのみで, 両端の境界条件を満足させる必要がなくなるので, 三次元弾性論の適用が可能となり, 波動問題としての解析が異形無限長棒に対していくつか発表されている^{(16)~(23)}. 一方, 有限長棒の場合は上述のようにすべての境界条件を満足させることが困難となり, 解析された例は少なく, 著者らの報告がなされている程度である⁽²⁴⁾. しかし, 実際上は機械, 構造物の要素に丸棒以外の断面が使用され, それが曲げ, ねじり, せん断

の組合せ動荷重を受ける場合もしばしば見受けられるところである. これらの問題で, 棒に作用する荷重は一般には単位ステップ関数, 指数関数, 正弦関数のような単純な場合は少なく, むしろ複雑な時間関数で表される場合が多いと思われる.

本報では以上のことにかんがみ, 任意時間関数で表されるねじり, 曲げおよびせん断の衝撃を受ける任意形状断面棒内の衝撃応力を解析的に求める方法を示したものである. 解析では上述のように三次元理論の適用が困難なため, 合力, 合モーメント, 合ねじりモーメントをまず, 慣性力を考慮した一次元理論により求める. この場合, 衝撃荷重およびトルクが複雑であるので, これをフーリエ展開法とラプラス変換法を適用して入力時間関数を処理し⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾, 両端の境界条件を満足させた解を誘導した. ついで断面内応力の解析では, 二次元弾性論による基礎方程式を適用し, 境界条件は長屋の提案しているフーリエ展開境界値平均法⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾を適用して任意形状断面棒内の主応力を求める式を誘導した. 具体的数値例としては, 衝撃荷重に半波正弦波, 台形波ならびに任意の時間変動入力を仮定し, 長方形, 三角形, 正六角形および卵形の4種の断面を有する棒に本解を適用し, その応力分布, 応力の応答を調べた. また, 本解の妥当性を検討するため,

* 昭和61年4月3日 第63期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和60年5月2日.

** 正員, 群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1).

*** 学生員, 群馬大学大学院.

† 学生員, ブラザー工業(株) (〒467 名古屋市瑞穂区堀田通9-35).

卵形断面を有する棒に曲げ、ねじり、せん断の三つの組合せ荷重が作用する場合の実験を行い、本報の結果との比較照合を行った。

2. 解 析

本解で取扱う解析モデルは図1に示すようなもので任意の時間変動荷重 $P(t)$ およびモーメント $M(t)$ が作用する先端に集中質量ならびに回転質量を有する任意形状断面棒である。以下解析では棒内に作用する合力、合曲げモーメント、合せん断力を一次元の棒のねじり運動方程式およびはりの運動方程式を用いて誘導し、ついで二次元弾性論に基づき、応力解を誘導する。この場合、棒のねじりと曲げは棒の変形が微小の場合は完全に分離して取扱うことができるので、以下これらを分離して取扱うことにする。

2.1 任意動トルクを受ける任意形状断面棒の応力

固定端における棒の断面对称軸上に原点をとり xy 軸を定め、それと垂直な棒軸方向に z 軸を定め、密度を ρ 、横弾性係数を G 、断面二次極モーメントを I_p 、回転質量の慣性モーメントを J_p とすると棒のねじり運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $C = \sqrt{G/\rho}$ 、 ϕ はねじれ角、 t は時間である。一方、棒先端に衝撃トルク $M(t)$ を受けるとすると、長さ l の棒の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (\phi)_{z=0} &= 0 \\ J_p (\partial^2 \phi / \partial t^2)_{z=l} &= -GI_p (\partial \phi / \partial z)_{z=l} + M(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

本問の場合、入力トルク $M(t)$ は複雑な時間関数であり一般の積分変換を用いてただちに解くことは困難で

図1 一般荷重を受ける一端固定他端慣性負荷付任意形状断面棒の座標関係

あるが、この問題に対し、すでに長屋ら⁽²⁴⁾は前報でトルク $M(t)$ をフーリエ展開して表し、それにラプラス変換法を適用して解析解を導いている。しかし、前報ではフーリエ展開を行う時間領域をサンプル時間 T_0 の2倍、すなわち $2T_0$ として解析しているので、数値計算では式のとりに誤解を招くことがあった。そこで本報ではサンプル時間 T_0 の領域でフーリエ展開を行う。すなわち

$$M(t) = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} (\epsilon_m q_m \cos 2m\pi\gamma + q_m^* \sin 2m\pi\gamma) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} q_m &= 2 \int_0^1 \{M(t)/M_0\} \cos 2m\pi\gamma d\gamma \\ q_m^* &= 2 \int_0^1 \{M(t)/M_0\} \sin 2m\pi\gamma d\gamma \\ \gamma &= t/T_0, \epsilon_0 = 0.5, \epsilon_m = 1 \quad (m \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

M_0 は式を無次元化するために導入した代表トルクであり、 γ は無次元時間である。以下解析は前報と全く同様であるので、詳細を省略し、結果のみを示すと、 $t = 0 \sim T_0$ ($\gamma = 0 \sim 1$) で成立する棒内のねじりによるせん断応力成分 τ_{zx}^t, τ_{zy}^t は次式のように与えられる。

$$\tau_{zx}^t = \frac{M_0}{2b^3} \alpha \cdot \beta (R_{t0} + R_{t1} + R_{t2}) \tau_{zx}^{t*}, \quad \tau_{zy}^t = \frac{M_0}{2b^3} \alpha \cdot \beta (R_{t0} + R_{t1} + R_{t2}) \tau_{zy}^{t*} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}^{t*} &= - \sum_{n=1}^N [n\eta^{n-1} A_n \sin(n-1)\theta + \eta \sin \theta] / H \\ \tau_{zy}^{t*} &= - \sum_{n=1}^N [n\eta^{n-1} A_n \cos(n-1)\theta - \eta \cos \theta] / H \\ R_{t0} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(\epsilon_m q_m \cos 2m\pi\gamma + q_m^* \sin 2m\pi\gamma) \cos(2m\pi\sqrt{1/\beta} X)}{2m\pi [\sqrt{\beta} \sin(2m\pi\sqrt{1/\beta}) - (\alpha \cdot \beta / 2m\pi) \cos(2m\pi\sqrt{1/\beta})]} \\ R_{t1} &= 0.5q_0 / (\alpha \cdot \beta) \\ R_{t2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2[\sqrt{\beta} \lambda_k q_m \cos(\gamma\sqrt{\beta} \lambda_k) + 2q_m^* m\pi \sin(\gamma\sqrt{\beta} \lambda_k)] \cos \lambda_k X}{\sqrt{\beta} (\beta \lambda_k^2 - 4m^2 \pi^2) [\lambda_k \cos \lambda_k + (1+\alpha) \sin \lambda_k]} \\ \alpha &= I_p \rho l / J_p, \quad \beta = GT_0^2 / (\rho l^2), \quad X = z/l, \quad \eta = r/b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、 $\lambda_k = (\omega_k l / C)$ は棒のねじりの k 次の振動数 ω_k の無次元量であり、次式の振動数方程式より求められる。

$$\lambda_k \cos \lambda_k + (1+\alpha) \sin \lambda_k = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

また， r, θ は棒断面内の極座標， N はフーリエ級数の打ち切りの項数， b は棒断面内の基準長さ（代表長さ）であり， A_n および H は前報⁽²⁴⁾の式(30)および式(36)より求められる。

2・2 任意時間関数を受ける任意形状断面棒の垂直応力およびせん断応力の解析 2・1節の場合と同様に座標を定めると，曲げを受ける棒の運動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに， W は棒の曲げ変位， E は縦弾性係数， I は断面二次モーメント， A は断面積である。式(8)にラプラス変換 $F = \int_0^\infty f e^{-st} dt$ を施し， $t=0$ で棒は静止しているものとする，式(8)の一般解は

$$\bar{W} = D_1 \cos \lambda' z + D_2 \sin \lambda' z + D_3 \cosh \lambda' z + D_4 \sinh \lambda' z \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに， $(\lambda')^4 = -\rho A s^2 / (EI)$ であり，境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (W)_{z=0} &= 0 \\ (\partial W / \partial z)_{z=0} &= 0 \\ (\partial^2 W / \partial z^2)_{z=l} &= 0 \\ -EI(\partial^3 W / \partial z^3)_{z=l} + m(\partial^2 W / \partial t^2)_{z=l} &= P(t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式中 m は先端質量， $P(t)$ は任意時間関数のせん断荷重であり， P_0 を代表荷重にとると， $P(t)$ のフーリエ展開式は式(3)，(4)と同形である。したがって以下式(3)，(4)の $M(t)$ を $P(t)$ ， M_0 を P_0 とおきかえ，式(4)の q_m, q_m^* を p_m, p_m^* とする。式(9)および $P(t)$ のフーリエ展開式のラプラス変換形

$$\bar{P}(s) = P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m p_m s + p_m^* 2m\pi / T_0}{s^2 + (2m\pi / T_0)^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

を式(10)に代入し，積分定数 $D_1 \sim D_4$ を決定すると像関数表示の曲げ変位が得られる。すなわち

$$\bar{W} = \frac{P_0 \sum_{m=0}^{\infty} (\varepsilon_m p_m s + p_m^* 2m\pi / T_0) [(\sin \lambda' l + \sinh \lambda' l)(\cos \lambda' z - \cosh \lambda' z) - (\cos \lambda' l + \cosh \lambda' l)(\sin \lambda' z - \sinh \lambda' z)]}{-2EI\lambda'^3 [s^2 + (2m\pi / T_0)^2] [1 + \cos \lambda' l \cosh \lambda' l + (m/\rho A l)\lambda' l (\cos \lambda' l \sinh \lambda' l - \sin \lambda' l \cosh \lambda' l)]} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)に留数定理を適用してラプラス逆変換を行うと変位 $W(z, t)$ が求められ，これより曲げモーメント， M_b およびせん断力 V が求められる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} W(z, t) &= (P_0 l^3 / EI) (R_{b1} + R_{b2} + R_{b3}) \\ M_b(z, t) &= -P_0 l (R_{b1}'' + R_{b2}'' + R_{b3}'') \\ V(z, t) &= -P_0 (R_{b1}''' + R_{b2}''' + R_{b3}''') \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} R_{b1} &= \sum_{m=1}^{\infty} (\Delta_1 / \Delta_3) [(\sin \alpha_m + \sinh \alpha_m)(\cos \alpha_m X - \cosh \alpha_m X) \\ &\quad - (\cos \alpha_m + \cosh \alpha_m)(\sin \alpha_m X - \sinh \alpha_m X)] \\ R_{b2} &= 0.5 p_0 \left(\frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{6} X^3 \right) \\ R_{b3} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (2\Delta_2 / \Delta_4) [(\sin \lambda_k^* + \sinh \lambda_k^*)(\cos \lambda_k^* X - \cosh \lambda_k^* X) \\ &\quad - (\cos \lambda_k^* + \cosh \lambda_k^*)(\sin \lambda_k^* X - \sinh \lambda_k^* X)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{b1}'' &= \sum_{m=1}^{\infty} (-\alpha_m^2) (\Delta_1 / \Delta_3) [(\sin \alpha_m + \sinh \alpha_m)(\cos \alpha_m X + \cosh \alpha_m X) \\ &\quad - (\cos \alpha_m + \cosh \alpha_m)(\sin \alpha_m X + \sinh \alpha_m X)] \\ R_{b2}'' &= 0.5 p_0 (1 - X) \\ R_{b3}'' &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-2\lambda_k^{*2}) (\Delta_2 / \Delta_4) [(\sin \lambda_k^* + \sinh \lambda_k^*)(\cos \lambda_k^* X + \cosh \lambda_k^* X) \\ &\quad - (\cos \lambda_k^* + \cosh \lambda_k^*)(\sin \lambda_k^* X + \sinh \lambda_k^* X)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{b1}'' &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^3 (\Delta_1 / \Delta_3) [(\sin \alpha_m + \sinh \alpha_m)(\sin \alpha_m X - \sinh \alpha_m X) \\ &\quad + (\cos \alpha_m + \cosh \alpha_m)(\cos \alpha_m X - \cosh \alpha_m X)] \\ R_{b2}'' &= -0.5 p_0 \\ R_{b3}'' &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \lambda_k^3 (\Delta_2 / \Delta_4) [(\sin \lambda_k^* + \sinh \lambda_k^*)(\sin \lambda_k^* X - \sinh \lambda_k^* X) \\ &\quad + (\cos \lambda_k^* + \cosh \lambda_k^*)(\cos \lambda_k^* X + \cosh \lambda_k^* X)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \varepsilon_m p_m \cos 2m\pi\gamma + p_m^* \sin 2m\pi\gamma, \quad \Delta_2 = \varepsilon_m p_m \cos\left(\frac{\lambda_k^{*2}\gamma}{\sqrt{\delta}}\right) + \left(\frac{2m\pi p_m^* \sqrt{\delta}}{\lambda_k^{*2}}\right) \sin\left(\frac{\lambda_k^{*2}\gamma}{\sqrt{\delta}}\right) \\ \Delta_3 &= -2\alpha_m^3 [1 + \cos \alpha_m \cosh \alpha_m + \alpha_m (m/\rho A l) (\cos \alpha_m \sinh \alpha_m - \sin \alpha_m \cosh \alpha_m)] \\ \Delta_4 &= (\alpha_m^4 - \lambda_k^{*4}) [\cos \lambda_k^* \sinh \lambda_k^* - \sin \lambda_k^* \cosh \lambda_k^* + (m/\rho A l) \\ &\quad \times (\cos \lambda_k^* \sinh \lambda_k^* - \sin \lambda_k^* \cosh \lambda_k^* - 2\lambda_k^* \sin \lambda_k^* \sinh \lambda_k^*)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$X = z/l, \quad \alpha_m^4 = (2m\pi)^2 \delta, \quad \delta = \rho A l^4 / (E I^2) = (G/E)(A l^2 / I)(1/\beta) \dots\dots\dots (18)$$

であり、 $\lambda_k^* = (\rho A \omega_k^2 l^4 / E I)^{1/4}$ は振動数方程式

$$1 + \cos \lambda_k^* \cosh \lambda_k^* + (m/\rho A l) (\cos \lambda_k^* \sinh \lambda_k^* - \sin \lambda_k^* \cosh \lambda_k^*) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

より求められる無次元量で、 ω_k は曲げ振動の k 次の固有振動数を表す。

せん断荷重を受ける棒内の応力を求める基礎方程式は二次元弾性論を適用すると次式で表される。

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 = \nabla^2 \phi_2 = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 ∇^2 は二次元のラプラス演算子であり、 ϕ, ϕ_1, ϕ_2 は応力関数である。一方棒表面の境界条件は ϕ, ϕ_1, ϕ_2 に対してそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \partial \phi / \partial q &= y n_x - x n_y \\ \partial \phi_1 / \partial q &= [(1+\nu)x^2 - \nu y^2] n_x \\ \partial \phi_2 / \partial q &= [(1+\nu)y^2 - \nu x^2] n_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。ここに、 ν はポアソン比、 q は棒の断面境界の法線座標であり、 n_x, n_y は方向余弦である。本問は式(13)で表される V を作用せん断力とし、式(20)、(21)を解く問題に帰着するが静荷重を受ける場合についてはすでに長屋⁽²⁹⁾がフーリエ展開境界値平均法を適用してこの種の問題を解き、任意形状断面ばねの静的応力式を誘導している。本問の場合はせん断力が複雑な時間の関数であるので、応力式の結果はもちろん異なるが、その取扱方法は前報⁽²⁹⁾と同様であるので、ここでは誘導の過程を省略して結果のみを示すこととする。すなわち、非定常せん断力によるせん断応力成分 τ_{zx}^b, τ_{zy}^b は

$$\tau_{zx}^b = -(P_0/b^2)(R_{b1}'' + R_{b2}'' + R_{b3}'')\tau_{zx}^{b*}, \quad \tau_{zy}^b = -(P_0/b^2)(R_{b1}'' + R_{b2}'' + R_{b3}'')\tau_{zy}^{b*} \dots\dots\dots (22)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}^{b*} &= -\eta \omega^* \sin \theta + k_x^* / (\delta' I^*) [-(1+\nu)\eta^2 \cos^2 \theta + \nu \eta^2 \sin^2 \theta] + \sum_{n=1}^{\infty} n \eta^{n-1} [\omega^* \bar{B}_{1n} \sin(n-1)\theta \\ &\quad + k_x^* / (\delta' I^*) \bar{B}_{2n} \cos(n-1)\theta + k_y^* / (\delta' I^*) \bar{B}_{3n} \sin(n-1)\theta] \\ \tau_{zy}^{b*} &= \eta \omega^* \cos \theta + k_y^* / (\delta' I^*) [-(1+\nu)\eta^2 \sin^2 \theta + \nu \eta^2 \cos^2 \theta] + \sum_{n=1}^{\infty} n \eta^{n-1} [\omega^* \bar{B}_{1n} \cos(n-1)\theta \\ &\quad - k_x^* / (\delta' I^*) \bar{B}_{2n} \sin(n-1)\theta + k_y^* / (\delta' I^*) \bar{B}_{3n} \cos(n-1)\theta] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

また、 $\delta' = E/G, I^* = I/b^4$ (b は断面の基準長さ) であり、 $\omega^*, k_x^*, \bar{B}_{1n}, \bar{B}_{2n}$ および $\bar{B}_{3n}$ は前報⁽²⁹⁾の式(39)、(37)、(26)、(21)および(17)より求められる。ただし、前報の δ は本報の δ', I_x^* は I^* に対応している。

一方、曲げによる垂直応力は

$$\sigma_b = (P_0/b^2)\sigma_b^* \dots\dots\dots (24)$$

ここに

$$\sigma_b^* = -(l/b)(\eta/I^*)(R_{b1}'' + R_{b2}'' + R_{b3}'') \sin \theta \dots\dots\dots (25)$$

以上によりねじりによるせん断応力成分、曲げによる垂直応力ならびにせん断応力成分が求められたので、棒断面内の任意の点における垂直主応力 σ_p および主せん断応力 τ_p が求められる。すなわち

$$\sigma_p = (P_0/b^2)\sigma_p^*, \quad \tau_p = (P_0/b^2)\tau_p^* \dots\dots\dots (26)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_p^* &= 0.5\sigma_b^* + [(\sigma_b^*)^2/4 + (\tau^*)^2]^{1/2} \\
 \tau_p^* &= [(\sigma_b^*)^2/4 + (\tau^*)^2]^{1/2} \\
 \tau^* &= [(\tau_{zx}^*)^2 + (\tau_{zy}^*)^2]^{1/2} \\
 \tau_{zx}^* &= F(R_{t0} + R_{t1} + R_{t2})\tau_{zx}^{t*} \\
 &\quad - (R_{b1}'' + R_{b2}'' + R_{b3}'')\tau_{zx}^{b*} \\
 \tau_{zy}^* &= F(R_{t0} + R_{t1} + R_{t2})\tau_{zy}^{t*} \\
 &\quad - (R_{b1}'' + R_{b2}'' + R_{b3}'')\tau_{zy}^{b*} \\
 F &= G I_p M_0 T_0^2 / (2 P_0 b J_p l) = \frac{M_0}{2 P_0 b} a \beta
 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

棒先端に半径 R の腕が取付けられ, それにせん断荷

重 $P(t)$ が作用する場合は $M_0 = P_0 R$ の関係より式 (27) の F は

$$F = 0.5(R/b) a \beta \dots (28)$$

となる。

3. 数値計算および実験

本報では図2に示されるような断面を有する4種類の断面棒について本解を適用し数値計算を行うことにする。また, 本報の妥当性を検討するために卵形断面棒について理論, 実験の比較も示す。本報の計算法によれば棒内のトルク, せん断力, 曲げモーメントを求める場合に断面重心の座標を求める必要があるが, これは断面内の任意の一点に極座標 r, θ の原点を定め, 重心の位置は計算機により求めることとした⁽²⁹⁾。図2に数値計算で使用した任意形状断面の座標 r, θ の原点の位置を示した。一方, 入力荷重としては図3(a)に示すような半波正弦状荷重, 図3(b)のような台形状荷重ならびに図3(c)のような複雑な時間変動荷重を考える。数値計算では断面の境界周上までの r 座標ならびにフーリエ係数を求めるための時間変動荷重の曲線の形状を表す式が必要となる。本報では境界なら

図2 数値計算例で取り上げた棒の断面形状
(a は代表長さ, O は数値計算上の座標原点)

図3 数値例で取り上げた入力荷重の時間変動波形

図5 半波正弦状荷重〔図3(a)〕を受ける長方形断面棒の細長比の変化による棒表面の応力波形
($\alpha=0.5, \beta=10^5, X=0.5, \theta=\pi/2$)

図4 半波正弦状荷重〔図3(a)〕を受ける長方形断面棒の細長比の変化による棒表面の応力波形
($\alpha=0.5, \beta=10^5, X=0.5, \theta=\pi/2$)

図6 半波正弦状荷重〔図3(a)〕を受ける長方形断面棒の棒表面に沿う主せん断応力分布
($\alpha=0.5, \beta=10^5, X=0.5, l/b=16.7, R/b=20$)

びに入力荷重の曲線は多数の点に分割し、その座標値をデータとして導入し二点間を結ぶ方程式は直線で近似する⁽²⁹⁾。本数値計算例で取り上げる計算モデルは、棒の一端が固定され、他端に慣性質量と長さ R の腕を有し、その腕に上述のような衝撃荷重を受ける場合を取り上げる。この場合、棒先端はせん断力 $P(t)$ とねじりモーメント $P(t)R$ を同時に受けることになり、 P_0 を荷重の最大振幅にとると $M_0 = P_0 R$ より、 $M(t)/M_0$ の曲線は $P(t)/P_0$ の曲線と全く同一となり、フーリエ係数は $q_m = p_m$, $q_m^* = p_m^*$ となる。一方、式(27)中の F は式(28)となり、計算では、 $\alpha, \beta, R/b, \delta, X, l/b$ などの量ならびに断面境界の座標値を代入すると前報⁽²⁹⁾の方法により重心の位置、断面二次モーメント $I^* = I/b^4$ が計算され、それを用いて棒内の無次元主応力 σ_p^* , τ_p^* が式(25), (27)より求められ、それに (P_0/b^2) を乗ずることで、実際の主応力が与えられることになる。この場合、留数の項数ならびにフーリエ係数の打ち切りの項数は解の収束に応じて決定される。本数値計算例では収束の度合を検討して留数は5項、フーリエの項数 N は8項までとした。また、入力波形を近似

するフーリエ級数 m の項数は15項までとした。図3に m を15項までとったときのフーリエ級数近似による波形(実線)と入力データの値(丸印)との比較を示したが、両者はほとんど一致している。図4~6は長方形および正六角形断面棒の慣性負荷部に図3(a)で示されるような時間変動荷重が作用する場合の応力の棒の細長さ (R/b) による変動、応力の時間変動ならびに断面外周上の応力分布を示したものである。応力分布を示す図6で値の得られていない不連続部分は多角形断面の角の部分に相当し、この部分は本解では特異点となり応力は算出できない。図4から主垂直応力は常に主せん断応力よりも大きく、しかも棒が長くなるほど両者とも値が大きくなる。また、主垂直応力は l/b が約16を越えるあたりで急激に増加し、除荷後 ($\gamma \geq 0.5$) で棒の自由振動による影響がでていることも認められる(図5参照)。また、図6からわかるように応力値は多角形断面の重心からの距離が最小の位置で最大となり、重心からの距離が長くなるにつれて急激に減少することがわかる。図7~図9は棒先端に加わる入力荷重が時間とともに図3(b)のような台形状に変化する場合の応力分布を二等辺三角形、正六角形ならびに卵形断面棒について示したものである。軸方向 ($X = z/l$) の応力変化は固定端から距離が長くなる

図7 台形状荷重〔図3(b)〕を受ける卵形断面棒の棒表面に沿う主せん断応力分布
($\alpha=0.5, \beta=10^5, X=0.5, l/b=16.7, R/b=20$)

図9 台形状荷重〔図3(b)〕を受ける正六角形断面棒の棒表面に沿う主応力分布
($\alpha=0.5, X=0.5, \gamma=0.25, R/b=20, l/b=16.7$)

図8 台形状荷重〔図3(b)〕を受ける二等辺三角形断面棒の棒表面に沿う主応力分布
($\alpha=0.5, \beta=10^5, \gamma=0.25, l/b=16.7, R/b=20$)

図10 衝撃荷重〔図3(c)〕を受ける卵形断面棒の棒表面の主応力の時間変動
($\alpha=0.5, \beta=10^5, X=0.5, R/b=20, l/b=16.7$)

ほど断面の角付近での応力が小さくなり、また、 $\theta = n\pi$ では応力値は X に関係なく等しくなる (図 8 参照)。一般に $\beta [= T_0^2 G / (\rho l^2)]$ が大、すなわち入力荷重の持続時間 T_0 が大の場合、時間変動における応力波形は入力荷重の波形とほぼ同様となるが、 T_0 が小の場合は慣性力の影響により応力波形が入力荷重の波形と全く異なったものになる。しかし、断面外周上の応力分布は最大値は異なるものの β に関係なく同様なものになることがわかる (図 9 参照)。図 10 は図 3 (c) のような複雑な時間変動荷重を受ける卵形断面棒の応力の時間変動を示したものである。図 10 と図 7 より、卵形のような異形断面の場合は応力分布、時間変動が一般に複雑になることが認められる。

本解の妥当性を検定するため、卵形断面棒については実験を行ってみた。本実験の実験装置は図 13 に示すようなもので、長さ $l = 51.4$ cm の卵形断面棒の先端に長さ $R = 35.7$ cm の腕を取付け、腕上の荷重入力点から任意の荷重をばねを介してハンマ等で与え、そのときの入力荷重の時間変動を腕に取付けられたひずみ

図 11 図 14 (a) の入力荷重を受ける卵形断面棒の $\theta = 0$ における応力の理論値と実験値の比較
($\alpha = 2.85 \times 10^{-3}$, $\beta = 3.44 \times 10^6$, $X = 0.76$, $R/b = 35.7$, $l/b = 51.4$)

図 12 図 14 (b) の入力荷重を受ける卵形断面棒の $\theta = 0$ における応力の理論値と実験値の比較
($\alpha = 2.85 \times 10^{-3}$, $\beta = 2.25 \times 10^6$, $X = 0.76$, $R/b = 35.7$, $l/b = 51.4$)

測定用丸棒 (直径 2 cm) のひずみ (ゲージ 2) より取り出し電磁オシロに記録した。一方、供試棒 (卵形棒) のひずみ測定点は固定端より 39 cm ($X = 0.76$) の位置であり、そこに 3 方向測定用のロゼットゲージを取付け (ゲージ 1)、そのひずみ波形を電磁オシロに記録させた。一方、本実験に用いた卵形断面棒の材質は S 55 C、断面寸法は $a = 1$ cm, $b = 0.6$ cm, $c = 1$ cm (図 2 (d) 参照) であり、棒先端に取付けた慣性質量荷の総質量は $m = 2.053$ kg、慣性モーメントは $J = 154.2$ kg $\cdot$ cm 2 である。本実験より得られたひずみ波形の一例を図 14 に示す。図中、 ϵ_b は棒軸方向のひずみであり、 ϵ_a , ϵ_c はそれぞれそれぞれと $\pi/3$, $-\pi/3$ の角度をなす方向のひずみを表し、入力荷重の大きさはゲージ 2 より取り出されたひずみ量にヤング率、測定用丸棒の断面積を乗じ、荷重に直したスケールとしている。図中、入力荷重の波形に細かい振動が乗じているが、これはひずみゲージの取付けられた入力荷重測定用丸棒の自由振動の影響である。この振動の影響が大きいとももちろん入力荷重の整理に支障をきたすが、本実験の場合その影響は無視できる程度である。したがって、この振動の影響を無視した入力波形を時間軸方向に 41 点

図 13 実験装置の概略図

図 14 実験より得られたひずみ波形

に分割し、サンプル時間は図 14(a)は $T_0=0.30$ s, 図 14(b)は $T_0=0.24$ s として数値計算用入力データを作り理論計算を行い、主垂直応力および主せん断応力を求めると、図 11 および図 12 の実線が得られた。この場合、せん断力の方向は y 軸方向のみであり、曲げも x 軸回りのみとなっているので、 $\sigma_p=\tau_p$ となっている。一方、図 14 の実験より得られた $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ より主応力を計算し、結果をプロットしたものが図 11, 12 の白丸印である。図 11 では本理論値と実験値はほぼ一致しているといえるが、図 12 の場合は理論値に高次の振動が乗じているのに対し、実験値にはその傾向が負荷時に明りょうに現れていない。この原因は主として負荷を人間の手（ハンマ）による打撃に頼ったため、微小振動を抑制する効果を与えたものと考えられる。いずれにしても本解の結果と実験値は比較的複雑な入力波形にもかかわらず、比較的よく一致しており、実用上本解析解がこの種の問題に適用できるといえる。

4. 結 言

本報は任意形状断面棒に曲げ、せん断、ねじりの組合せ衝撃荷重が作用する場合の棒内に生ずる動的応力の解析法を示したものである。その内容を要約すると

(1) 棒のねじり、曲げの基礎方程式から出発して、非定常トルク、非定常せん断力をフーリエ展開し、これにラプラス変換法を適用して任意時間関数で与えられる一般動荷重を受ける任意形状断面棒のねじりモーメント、曲げモーメントならびにせん断力を与える一般式を誘導した。

(2) 棒断面内の応力解析には、二次元弾性論を適用し、棒表面の応力自由の境界条件式はフーリエ展開境界値平均法を適用して満足させ、任意形状断面を有する棒の組合せ応力を与える一般式を誘導した。

(3) 本解の理論結果の適用例として、一端が固定され、他端に回転慣性負荷を有する棒の慣性負荷部に複雑な非定常衝撃力を受ける多角形断面棒ならびに卵形断面棒を取り上げ数値計算を行い、これらの動特性を明らかにした。また、卵形断面棒に対しては実験も行い、実験値と理論値を比較したところ両者は比較的よく一致した。

(4) 本解では、理論解析の過程で入力荷重の関数

および断面の形状をなんら用いていないので得られた理論結果はあらゆる問題に適用できる一般式である。したがって、数値計算の過程で入力荷重の時間と大きさの座標値ならびに断面形状を与える幾何学的座標値をデータとして与えるのみであらゆる入力を受けるあらゆる断面形状を有する棒の組合せ衝撃問題の結果を得ることができる。得られた結果は精度もよく、数値計算の取扱いも簡単であり、他の近似解法にない特徴を有しているので、棒の組合せ衝撃問題の計算式として使用できるものと思われる。

文 献

- (1) 中沢, 機論, 20-95 (昭 29), 444.
- (2) 大橋, 機論, 20-95 (昭 29), 449.
- (3) 文献(2)の 455 ページ.
- (4) 生井, 機論, 20-95 (昭 29), 462.
- (5) 中山, 機論, 29-197 (昭 38), 125.
- (6) 半沢・石川, 機論, 34-258 (昭 43), 270.
- (7) 半沢・石川, 機論, 35-276 (昭 44), 1625.
- (8) Lin, Y. K., *Int. J. Mech. Sci.*, 4 (1962), 409.
- (9) Lin, Y. K. and McDaniel, T. J., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 91-4 (1969).
- (10) Sen Gupta, G., *J. Sound & Vib.*, 13-1 (1970), 89.
- (11) Mead, D. J., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, 93-3 (1971), 783.
- (12) Lin, Y. K. and Yang, J. N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 41-2 (1974), 383.
- (13) 鈴木, 機論, 33-249 (昭 42), 686.
- (14) 鈴木, 機論, 38-318 (昭 47), 2201.
- (15) 長屋・平野, 機論, 41-349 (昭 50), 2574.
- (16) Morse, R. W., *J. Acoust. Soc. America*, 20 (1948), 833.
- (17) Medick, M. A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 714.
- (18) Sato, K., *Bull. JSME*, 21 (1978), 203.
- (19) 田中・石橋, 機論, 42 (昭 51), 3771.
- (20) Nagaya, K., *J. Acoust. Soc. America*, 70 (1981), 763.
- (21) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 49 (1982), 157.
- (22) Nagaya, K. and Watanabe, T., *J. Acoust. Soc. America*, 75 (1984), 834.
- (23) Nagaya, K. and Watanabe, T., *J. Acoust. Soc. America*, 77 (1985), 1824.
- (24) 長屋・ほか 2 名, 機論, 51-469, C (1985), 2224.
- (25) Nagaya, K., *ASCE, J. Waterway Port Coastal and Ocean Eng.*, 111-2 (1985), 337.
- (26) Nagaya, K., *J. Sound & Vib.*, 99 (1985), 361.
- (27) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47 (1980), 620.
- (28) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50 (1983), 757.
- (29) 長屋, 機論, 51-470, A (1985), 2293.