厚さの変化する球かくの固有振動解析*

平井 司**, 黒田 道雄***

An Analysis of Natural Vibrations of a Spherical Shell
with Variable Thicknesses

by Tsukasa HIRAI and Michio KURODA

This paper is concerned with the natural vibrations of a spherical shell with variable thicknesses in the meridional direction. The governing equations of motion have already been given in the authors' previous paper. In this paper, the distribution of thickness is expressed in a quadratic polynomial, and is substituted into the above equations. Four solutions of the equations required in the case of a hemispherical shell with a free edge can be obtained analytically by the method of series solution, and the corresponding frequency equation is derived. Natural frequencies for several circumferential wave numbers are calculated. Lastly, to illustrate the utility of the present method, the numerical results are compared with the experimental data.

Key Words: Vibration, Spherical Shell, Variable Thickness, Classical Theory, Eigenvalue Problem, Analytical Solution

1. 緒 言

厚さ一定のかくの固有値問題については、すでに多くの論文⁽¹⁾が発表されているが、厚さの変化するかくについては、その厳密な解析が困難であるため、有限要素法などの数値解法によるものが大部分を占めているようである。円すいかくについては、入江ら⁽²⁾の伝達マトリックス法を用いた研究がある。また、高橋ら⁽³⁾⁽⁴⁾は修正理論による円筒かくや円すいかくの厳密な解を求め、種々の境界条件に対する振動特性を明らかにしている。

しかし、曲面構造物として円筒かくや円すいかくと同様に實際上よく見受けられる球かくについて、厚さが増減する場合の厳密解を見出した論文はまだ発表されていないようである。

著者らは以前発表した論文⁽⁵⁾において、厚さが球かく中心軸からの角度とともに変化する一般の場合について固有値問題を解くべき微分方程式を求め、さらに変数変換を行って多項式係数の方程式を導いている。

本報は、厚さの変化が多項式で表現される場合の本解析法の有用性を検証することを目的としている。球かくの作りやすさを考慮して厚さがほぼ一様に変化する場合を想定し、厚さの分布を2次の多項式で近似して、前述の微分方程式に代入することにより解析を進める。そして一具体例として、周辺自由で厚さの変化する半球かくについて、必要な4個の解と振動数方程式を求め、数値計算と実験を行って両者の結果を比較検討している。

2. 記 号

 a : 半径 h : 厚さ h_0 : $\varphi=0$ での厚さ $k = h^2/(12a^2)$ $k_0 = h_0^2/(12a^2)$ E : 縦弾性係数 ρ : 密度 ν : ポアソン比 ω : 円振動数 t : 時間 n : 円周方向波数 β : 無次元固有振動数 $= \omega a \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$

* 昭和61年3月14日 東海支部第35期総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年6月10日。

** 正員、(株)グラフィックプロダクツ (〒150 東京都渋谷区恵比寿1-19-15)。

*** 正員、成蹊大学工学部 (〒181 武蔵野市吉祥寺北町3-3-1)。

u, v, w : φ, θ , 半径方向の変位

$U_n(\varphi), V_n(\varphi), W_n(\varphi)$: 各 n に対する変位 u, v, w
の φ 方向のモード関数

3. 基礎方程式

図1に球かくの中央面上に取った球座標と変位 u, v, w の方向を示す。前報⁽⁵⁾で著者らは、厚さが図1に示してある φ の関数である場合の古典理論による球かくの運動方程式を求め、その解を

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=2}^{\infty} U_n(\varphi) \cos n\theta \cos \omega t \\ v &= \sum_{n=2}^{\infty} V_n(\varphi) \sin n\theta \cos \omega t \\ w &= \sum_{n=2}^{\infty} W_n(\varphi) \cos n\theta \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と仮定し、 $U_n(\varphi), V_n(\varphi), W_n(\varphi)$ についての常微分方程式に変形した。そして球かくでは $k \ll 1$ となるので、 k^2 および $k(dk/d\varphi)$ を含む項を省略した形の方程式に対して独立変数と従属変数の両者を

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin^2(\varphi/2), \quad U_n = \tilde{U}_n / \sin \varphi \\ V_n &= \tilde{V}_n / \sin \varphi, \quad W_n = \tilde{W}_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

により変数変換することで多項式係数の微分方程式を導いた。

そこで本報では、この微分方程式中の厚さ h を x についての2次の多項式で表すものとする。

図1 球座標

$$h = \sum_{i=0}^2 h_i x^i \dots\dots\dots (3)$$

これから、 $k, (dh/dx)(dk/dx)/h$ は

$$k = k_0 \sum_{i=0}^4 \xi_i x^i, \quad \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dk}{dx} = 2k_0 \sum_{i=0}^2 \eta_i x^i \dots\dots (4)$$

ただし、 $\xi_i (i=0 \sim 4), \eta_i (i=0 \sim 2)$ は $\alpha_j = h_j/h_0 (j=0 \sim 2)$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \alpha_0^2, \quad \xi_1 = 2\alpha_0\alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2 \\ \xi_3 &= 2\alpha_1\alpha_2, \quad \xi_4 = \alpha_2^2 \\ \eta_0 &= \alpha_1^2, \quad \eta_1 = 4\alpha_1\alpha_2, \quad \eta_2 = 4\alpha_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

したがって、固有値問題を解くべき基礎方程式が、文献(5)の式(18)に式(4)を代入して次のように書き表せる。以下 $() \equiv d()/dx$ として、 φ 方向、 θ 方向、半径方向の順に

$$P_1 \tilde{U}_n'' + P_2 \tilde{U}_n' + P_3 \tilde{U}_n + P_4 \tilde{V}_n' + P_5 \tilde{V}_n + P_6 \tilde{W}_n' + P_7 \tilde{W}_n = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$Q_1 \tilde{U}_n' + Q_2 \tilde{U}_n + Q_3 \tilde{V}_n'' + Q_4 \tilde{V}_n' + Q_5 \tilde{V}_n + Q_6 \tilde{W}_n = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} R_1 \tilde{U}_n''' + R_2 \tilde{U}_n'' + R_3 \tilde{U}_n' + R_4 \tilde{U}_n + R_5 \tilde{V}_n'' + R_6 \tilde{V}_n' + R_7 \tilde{V}_n + R_8 \tilde{W}_n''' \\ + R_9 \tilde{W}_n'' + R_{10} \tilde{W}_n' + R_{11} \tilde{W}_n + R_{12} \tilde{W}_n = 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここで、式(5)で定義されていない ξ_i, η_i が現れたときには、それを含む項は削除するものとして

$$P_1 = \sum_{i=2}^{10} p_1^{(i)} x^i, \quad P_2 = \sum_{i=1}^9 p_2^{(i)} x^i, \quad P_3 = \sum_{i=0}^8 p_3^{(i)} x^i, \quad P_4 = \sum_{i=1}^9 p_4^{(i)} x^i, \quad P_5 = \sum_{i=0}^8 p_5^{(i)} x^i,$$

$$P_6 = \sum_{i=1}^9 p_6^{(i)} x^i,$$

$$P_7 = \sum_{i=0}^8 p_7^{(i)} x^i$$

$$p_1^{(i)} = 8k_0(\xi_{i-2} - 2\xi_{i-3} + \xi_{i-4}), \quad p_2^{(i)} = 4k_0\{(i-1)\xi_{i-1} - 2(i-2)\xi_{i-2} + (i-3)\xi_{i-3}\}$$

$$p_3^{(i)} = k_0[-(n^2 + 2i)(1-\nu)\xi_i + 2\{(3i+1)(1-\nu) + 4\beta^2\}\xi_{i-1} - 4\{(i-1)(1-\nu) + 2\beta^2\}\xi_{i-2}]$$

$$p_4^{(i)} = 2k_0n(1+\nu)(\xi_{i-1} - \xi_{i-2}), \quad p_5^{(i)} = 2k_0n[-(2-i\nu)\xi_i + \{4-(i-1)\nu\}\xi_{i-1}]$$

$$p_6^{(i)} = 16k_0(1+\nu)(\xi_{i-2} - 2\xi_{i-3} + \xi_{i-4}), \quad p_7^{(i)} = 8k_0(1+\nu)\{(i-1)\xi_{i-1} - 2(i-2)\xi_{i-2} + (i-3)\xi_{i-3}\}$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^9 q_1^{(i)} x^i, \quad Q_2 = \sum_{i=0}^8 q_2^{(i)} x^i, \quad Q_3 = \sum_{i=2}^{10} q_3^{(i)} x^i, \quad Q_4 = \sum_{i=1}^9 q_4^{(i)} x^i, \quad Q_5 = \sum_{i=0}^8 q_5^{(i)} x^i, \quad Q_6 = \sum_{i=0}^8 q_6^{(i)} x^i$$

$$q_1^{(i)} = 2k_0n(1+\nu)(-\xi_{i-1} + \xi_{i-2}), \quad q_2^{(i)} = k_0n(1-\nu)\{-(i+2)\xi_i + (i+3)\xi_{i-1}\}$$

$$q_3^{(i)} = 4k_0(1-\nu)(\xi_{i-2} - 2\xi_{i-3} + \xi_{i-4}),$$

$$q_4^{(i)} = 2k_0(1-\nu)\{(i-1)\xi_{i-1} - 2(i-2)\xi_{i-2} + (i-3)\xi_{i-3}\}$$

$$q_5^{(i)} = 2k_0[-\{n^2 + i(1-\nu)\}\xi_i + \{(3i+1)(1-\nu) + 4\beta^2\}\xi_{i-1} - \{2i(1-\nu) + 4\beta^2\}\xi_{i-2}]$$

$$q_6^{(i)} = 8k_0n(1+\nu)(-\xi_{i-1} + \xi_{i-2})$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{i=2}^{11} r_1^{(i)} x^i, \quad R_2 = \sum_{i=2}^{10} r_2^{(i)} x^i, \quad R_3 = \sum_{i=1}^9 r_3^{(i)} x^i, \quad R_4 = \sum_{i=0}^8 r_4^{(i)} x^i, \quad R_5 = \sum_{i=2}^{10} r_5^{(i)} x^i, \quad R_6 = \sum_{i=1}^9 r_6^{(i)} x^i \\
R_7 &= \sum_{i=0}^8 r_7^{(i)} x^i, \quad R_8 = \sum_{i=4}^{12} r_8^{(i)} x^i, \quad R_9 = \sum_{i=3}^{11} r_9^{(i)} x^i, \quad R_{10} = \sum_{i=2}^{10} r_{10}^{(i)} x^i, \quad R_{11} = \sum_{i=1}^9 r_{11}^{(i)} x^i, \quad R_{12} = \sum_{i=0}^8 r_{12}^{(i)} x^i \\
r_1^{(i)} &= 8k_0(-\xi_{i-3} + 3\xi_{i-4} - 3\xi_{i-5} + \xi_{i-6}), \\
r_2^{(i)} &= 8k_0\{-(3i-5)\xi_{i-2} + (9i-23)\xi_{i-3} - (9i-31)\xi_{i-4} + (3i-13)\xi_{i-5}\}, \\
r_3^{(2)} &= \bar{r}_3^{(2)} + 8(1+\nu), \quad r_3^{(3)} = \bar{r}_3^{(3)} - 16(1+\nu), \quad r_3^{(4)} = \bar{r}_3^{(4)} + 8(1+\nu), \quad i=1, 5 \leq i \leq 9 \text{ のとき } r_3^{(i)} = \bar{r}_3^{(i)}, \\
\bar{r}_3^{(i)} &= 2k_0[\{n^2 - 3(i-1)(2i-3+\nu)\}\xi_{i-1} - \{n^2 - 2(3i-5)(3i-8+2\nu)\}\xi_{i-2} \\
&\quad - \{(18i^2 - 111i + 163) + (15i-37)\nu\}\xi_{i-3} + 2\{(3i^2 - 24i + 46) + (3i-10)\nu\}\xi_{i-4} \\
&\quad + 12(-\eta_{i-3} + 3\eta_{i-4} - 3\eta_{i-5} + \eta_{i-6})], \\
r_4^{(i)} &= k_0(1-\nu)[3i\{n^2 + 2(i-1)\}\xi_i - 3(i-1)\{n^2 + 8(i-1)\}\xi_{i-1} + 6(i-2)(5i-7)\xi_{i-2} - 12(i-3)(i-2)\xi_{i-3} \\
&\quad + 12(\eta_{i-2} - 4\eta_{i-3} + 5\eta_{i-4} - 2\eta_{i-5})], \\
r_5^{(i)} &= -4k_0n(\xi_{i-2} - 2\xi_{i-3} + \xi_{i-4}), \\
r_6^{(i)} &= 2k_0n[-\{(3i-5) + 3\nu(i-1)\}\xi_{i-1} + 6\{(i-3) + \nu(i-2)\}\xi_{i-2} - \{(3i-13) + 3\nu(i-3)\}\xi_{i-3}], \\
r_7^{(1)} &= \bar{r}_7^{(1)} + 4n(1+\nu), \quad r_7^{(2)} = \bar{r}_7^{(2)} - 4n(1+\nu), \quad i=0, 3 \leq i \leq 8 \text{ のとき } r_7^{(i)} = \bar{r}_7^{(i)}, \\
\bar{r}_7^{(i)} &= k_0n[\{n^2 + 9i - 4 - 3\nu i(2i-1)\}\xi_i - \{(27i-31) - \nu(12i^2 - 27i + 19)\}\xi_{i-1} \\
&\quad + 2\{(9i-20) - \nu(3i^2 - 12i + 14)\}\xi_{i-2} - 12\nu(\eta_{i-2} - 2\eta_{i-3} + \eta_{i-4})], \\
r_8^{(i)} &= 16k_0(\xi_{i-4} - 4\xi_{i-5} + 6\xi_{i-6} - 4\xi_{i-7} + \xi_{i-8}), \\
r_9^{(i)} &= 16k_0\{(3i-5)\xi_{i-3} - 4(3i-7)\xi_{i-4} + 18(i-3)\xi_{i-5} - 4(3i-11)\xi_{i-6} + (3i-13)\xi_{i-7}\}, \\
r_{10}^{(i)} &= 4k_0[\{(6i^2 - 3i - 10 - 2n^2) + 3\nu(i-2)\}\xi_{i-2} - \{(24i^2 - 33i - 49 - 4n^2) + \nu(15i-41)\}\xi_{i-3} \\
&\quad + \{(36i^2 - 81i - 88 - 2n^2) + 3\nu(9i-32)\}\xi_{i-4} - 3\{(8i^2 - 25i - 23) + \nu(7i-31)\}\xi_{i-5} \\
&\quad + 2\{(3i^2 - 12i - 10) + \nu(3i-16)\}\xi_{i-6} + 12(\eta_{i-4} - 4\eta_{i-5} + 6\eta_{i-6} - 4\eta_{i-7} + \eta_{i-8})], \\
r_{11}^{(i)} &= 4k_0[3(i-1)\{(1+\nu)(i-1) - n^2\}\xi_{i-1} + \{6n^2(i-2) - (1+\nu)(15i^2 - 45i + 34)\}\xi_{i-2} \\
&\quad + \{(1+\nu)(27i^2 - 114i + 115) - 3n^2(i-3)\}\xi_{i-3} - (1+\nu)(21i^2 - 117i + 152)\xi_{i-4} + 2(1+\nu)(3i^2 - 21i \\
&\quad + 34)\xi_{i-5} + 6(1+\nu)(\eta_{i-3} - 5\eta_{i-4} + 9\eta_{i-5} - 7\eta_{i-6} + 2\eta_{i-7})], \\
r_{12}^{(2)} &= \bar{r}_{12}^{(2)} + 16(2+2\nu-\beta^2), \quad r_{12}^{(3)} = \bar{r}_{12}^{(3)} - 32(2+2\nu-\beta^2), \quad r_{12}^{(4)} = \bar{r}_{12}^{(4)} + 16(2+2\nu-\beta^2), \\
i=0, i=1, 5 \leq i \leq 8 \text{ のとき } r_{12}^{(i)} &= \bar{r}_{12}^{(i)}, \quad \bar{r}_{12}^{(i)} = k_0n^2[\{(n^2 + 9i - 4) - 3\nu i(2i-1)\}\xi_i + \{(31-27i) \\
&\quad + \nu(12i^2 - 27i + 19)\}\xi_{i-1} + 2\{(9i-20) - \nu(3i^2 - 12i + 14)\}\xi_{i-2} - 12\nu(\eta_{i-2} - 2\eta_{i-3} + \eta_{i-4})]
\end{aligned}$$

.....(9)

4. 級数解および振動数方程式

4.1 級数解 方程式(6)~(8)の解を次のような x の級数の形で仮定する.

$$X = \sum_{r=0}^{\infty} C_r x^{\lambda+r} \quad \text{.....(10)}$$

ここで, $[\quad]^T$ は行ベクトル $[\quad]$ を転置した列ベクトルを意味するものとして

$$X = [\tilde{U}_n \quad \tilde{V}_n \quad \tilde{W}_n]^T, \quad C_r = [A_r \quad B_r \quad C_r]^T \quad \text{.....(11)}$$

であり, λ および A_r, B_r, C_r は未知定数である.

式(10)を方程式(6)~(8)に代入して整理すると

$$\sum_{i=0}^8 \sum_{r=0}^{\infty} F(\lambda, r, i) C_r x^{\lambda+r+i} = 0 \quad \text{.....(12)}$$

ただし,

$$F(\lambda, r, i) = \begin{bmatrix} P_A(\lambda, r, i) & P_B(\lambda, r, i) & P_C(\lambda, r, i) \\ Q_A(\lambda, r, i) & Q_B(\lambda, r, i) & Q_C(\lambda, r, i) \\ R_A(\lambda, r, i) & R_B(\lambda, r, i) & R_C(\lambda, r, i) \end{bmatrix} \quad \text{.....(13)}$$

また,

$$\left. \begin{aligned} P_A(\lambda, r, i) &= p_1^{(i+2)}(\lambda+r)(\lambda+r-1) + p_2^{(i+1)}(\lambda+r) + p_3^{(i)}, & P_B(\lambda, r, i) &= p_4^{(i+1)}(\lambda+r) + p_5^{(i)}, \\ P_C(\lambda, r, i) &= p_6^{(i+1)}(\lambda+r) + p_7^{(i)}, & Q_A(\lambda, r, i) &= q_1^{(i+1)}(\lambda+r) + q_2^{(i)}, \\ Q_B(\lambda, r, i) &= q_3^{(i+2)}(\lambda+r)(\lambda+r-1) + q_4^{(i+1)}(\lambda+r) + q_5^{(i)}, & Q_C(\lambda, r, i) &= q_6^{(i)}, \\ R_A(\lambda, r, i) &= r_1^{(i+3)}(\lambda+r)(\lambda+r-1)(\lambda+r-2) + r_2^{(i+2)}(\lambda+r)(\lambda+r-1) + r_3^{(i+1)}(\lambda+r) + r_4^{(i)}, \\ R_B(\lambda, r, i) &= r_5^{(i+2)}(\lambda+r)(\lambda+r-1) + r_6^{(i+1)}(\lambda+r) + r_7^{(i)}, \\ R_C(\lambda, r, i) &= r_8^{(i+4)}(\lambda+r)(\lambda+r-1)(\lambda+r-2)(\lambda+r-3) + r_9^{(i+3)}(\lambda+r)(\lambda+r-1)(\lambda+r-2) \\ &\quad + r_{10}^{(i+2)}(\lambda+r)(\lambda+r-1) + r_{11}^{(i+1)}(\lambda+r) + r_{12}^{(i)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

いま、式(12)左辺の $x^{\lambda+r}$ の係数を 0 とおいて

$$\begin{aligned} &F(\lambda, r, 0)C_r + F(\lambda, r-1, 1)C_{r-1} + F(\lambda, r-2, 2)C_{r-2} + F(\lambda, r-3, 3)C_{r-3} + F(\lambda, r-4, 4)C_{r-4} \\ &\quad + F(\lambda, r-5, 5)C_{r-5} + F(\lambda, r-6, 6)C_{r-6} + F(\lambda, r-7, 7)C_{r-7} + F(\lambda, r-8, 8)C_{r-8} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

この式より順次 r に応じて C_r を定めることができる。ただし、 $r=0\sim 7$ については、 $C_j (j < 0)$ を含む項は削除して考えるものとする。

まず、 $r=0$ のときは

$$F(\lambda, 0, 0)C_0 = 0 \dots\dots\dots (16)$$

これから $C_0 \neq 0$ であるための条件として、次の決定方程式⁽⁶⁾が得られる。

$$\det F(\lambda, 0, 0) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

方程式(17)の左辺を計算して整理すると

$$\{2\lambda - (2+n)\}^2 \{2\lambda - (2-n)\}^2 (2\lambda + n)^2 (2\lambda - n)^2 = 0 \dots\dots\dots (18)$$

したがって、決定方程式の根は大きいほうから順番に

$$\lambda_1 = \lambda_2 = (2+n)/2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = n/2, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = (2-n)/2, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = -n/2 \dots\dots\dots (19)$$

これら 8 個の根に応じて定まる 8 個の級数解のうち、 $x=0$ で正則な解は最初の 4 根 $\lambda_1 \sim \lambda_4$ から得られる。4 根のそれぞれに対して A_0, B_0, C_0 の満たすべき条件式は式(16)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = (2+n)/2 \text{ の場合} \quad &\delta_1 A_0 + \delta_2 B_0 = 0, \quad C_0 : \text{任意} \\ &\delta_1 = n(1+\nu) + 4, \quad \delta_2 = n(1+\nu) - 2(1-\nu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = n/2 \text{ の場合} \quad A_0 + B_0 = 0, \quad C_0 : \text{任意} \dots\dots\dots (21)$$

一方、式(15)から C_r を求めて各要素別に書き表わせば

$$\left. \begin{aligned} A_r &= \{\mu_{11}(\lambda, r)e(\lambda, r) + \mu_{12}(\lambda, r)f(\lambda, r)\} / \{k_0(1-\nu)H(\lambda, r)\} \\ B_r &= \{\mu_{21}(\lambda, r)e(\lambda, r) + \mu_{22}(\lambda, r)f(\lambda, r)\} / \{2k_0(1-\nu)H(\lambda, r)\} \\ C_r &= \{\mu_{31}(\lambda, r)e(\lambda, r) + \mu_{32}(\lambda, r)f(\lambda, r) + \mu_{33}(\lambda, r)g(\lambda, r)\} / \{2k_0H(\lambda, r)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mu_{11}(\lambda, r) &= n^2 + 2(1-\nu)(\lambda+r) - 2(1-\nu)(\lambda+r)^2, & \mu_{12}(\lambda, r) &= n\{(1+\nu)(\lambda+r) - 2\} \\ \mu_{21}(\lambda, r) &= -2n\{(1+\nu)(\lambda+r) + (1-\nu)\}, & \mu_{22}(\lambda, r) &= n^2(1-\nu) + 8(\lambda+r) - 8(\lambda+r)^2 \\ \mu_{31}(\lambda, r) &= 2\{1 - (\lambda+r)\}, & \mu_{32}(\lambda, r) &= -n, & \mu_{33}(\lambda, r) &= -2 \\ [e(\lambda, r) \quad f(\lambda, r) \quad g(\lambda, r)]^T &= F(\lambda, r-1, 1)C_{r-1} + F(\lambda, r-2, 2)C_{r-2} + F(\lambda, r-3, 3)C_{r-3} \\ &\quad + F(\lambda, r-4, 4)C_{r-4} + F(\lambda, r-5, 5)C_{r-5} + F(\lambda, r-6, 6)C_{r-6} + F(\lambda, r-7, 7)C_{r-7} \\ &\quad + F(\lambda, r-8, 8)C_{r-8} \\ H(\lambda, r) &= \{2(\lambda+r) - (2+n)\}\{2(\lambda+r) - (2-n)\}\{2(\lambda+r) + n\}\{2(\lambda+r) - n\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$\lambda = \lambda_1$ に応ずる解 X_1 については、式(20)で $A_0 = 1, B_0 = -\delta_1/\delta_2, C_0 = 0$ とおき、また $\lambda = \lambda_2$ に応ずる解 X_2 については、式(20)で $A_0 = B_0 = 0, C_0 = 1$ とおき、式(23)から C_r を λ の関数として順次求めてゆき、最後に得られた級数に対し、 $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ において X_1, X_2 が定まる。次に $\lambda = \lambda_3, \lambda = \lambda_4$ に応ずる解 X_3, X_4 を定めるときには、 C_1 を求める場合の $H(\lambda, 1)$ が $(2\lambda - n)$ を因数に持つことになり具合が悪いように見える。しかし本報の場合、式(22)右辺の各式における分子もまた $(2\lambda - n)$ を因数に持っているために分子、分母で約分されることになり別に問題は起

こらない。 $\lambda=\lambda_3$ に応ずる解 X_3 は式(21)を用いて $A_0=1, B_0=-1, C_0=0$ において、また $\lambda=\lambda_4$ に応ずる解 X_4 は $A_0=B_0=0, C_0=1$ において、それぞれの級数を定めることができる。

結局、方程式(6)～(8)の一群の解が $\gamma_i (i=1\sim 4)$ を定数として次のように書き表される。

$$X=\gamma_1 X_1+\gamma_2 X_2+\gamma_3 X_3+\gamma_4 X_4 \cdots \cdots \cdots (24)$$

4・2 境界条件 式(24)で表される解は、球かくの任意の φ における境界条件が固定または単純支持の場合でも適用可能であるが、ここではその条件が自由の場合を考える。自由端 $\varphi=\varphi$ の境界上での4個の力学的境界条件式は文献(5)の式(34)を参照して、以下に変数変換された結果だけを示す。

$$\left. \begin{aligned} & -2x(1-x)\tilde{U}_n'+(1-\nu)(1-2x)\tilde{U}_n-n\nu\tilde{V}_n+4x^2(1-x)^2\tilde{W}_n'' \\ & +2(1+\nu)x(1-x)(1-2x)\tilde{W}_n'-n^2\nu\tilde{W}_n|_{x=0}=0 \\ & 2x(1-x)\tilde{U}_n'-(1-\nu)(1-2x)\tilde{U}_n+n\nu\tilde{V}_n+4(1+\nu)x(1-x)\tilde{W}_n|_{x=x}=0 \\ & -4x^2(1-x)^2\tilde{U}_n''+2x(1-x)(1-2x)\tilde{U}_n'+(n^2-1)(1-\nu)\tilde{U}_n-2nx(1-x)\tilde{V}_n'+3n(1-2x)\tilde{V}_n \\ & +8x^3(1-x)^3\tilde{W}_n''' +12x^2(1-x)^2(1-2x)\tilde{W}_n''-2\{n^2(2-\nu)+(1+\nu)\}x(1-x)\tilde{W}_n' \\ & +3n^2(1-2x)\tilde{W}_n|_{x=x}=0 \\ & -(1+k)n\tilde{U}_n+2(1+k)x(1-x)\tilde{V}_n'-2(1+k)(1-2x)\tilde{V}_n+4knx(1-x)\tilde{W}_n'-2kn(1-2x)\tilde{W}_n|_{x=x}=0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (25)$$

ここで、式(25)の第4式における k は式(4)の第1式を代入して用いるものとする。

4・3 振動数方程式 式(24)を式(25)に代入して $\gamma_1\sim\gamma_4$ に関する同次形の4元連立一次方程式が得られ、その係数で作った4行4列の行列式を零とおいたものが振動数方程式である。

分法を用いて求めた。級数の計算は第 m 項を a_m とし、その第 m 部分和を S_m とした場合に、与えられた正数 σ に対して $|a_m/S_m|<\sigma$ となるところまで項を加えることとして、各 $X_i (i=1\sim 4)$ およびその導関数のすべてがこの条件を満たすときに加算を打ち切るようにした。数値計算はすべて倍精度計算で行い、 $\sigma=10^{-15}$ とした。

5. 数 値 計 算

式(3)の $h_i (i=0\sim 2)$ は厚さの測定値から最小二乗法により決定し、他の入力データとして ν, a, x を与え、 $n=2\sim 10$ の範囲で各 n に対する最低次の β を2

6. 実 験

実験は周辺自由の半球かくについて行った。周辺自由の条件をできるだけ満足させるために、半球かくは

図2 試験片A群の厚さの分布

図4 試験片C群の厚さの分布

図3 試験片B群の厚さの分布

図5 試験片D群の厚さの分布

表 1 試験片 A 群の固有振動数(Hz)の実験結果 (上段) と計算結果 (下段)
 (* 印は平均厚さで計算した場合)

No.	η								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	116.2	313.8	582.5	911.8	1294	1724	2198	2713	3268
	111.8	308.4	579.5	914.0	1304	1744	2229	2757	3328
	115.8*	326.3*	616.1*	973.0*	1388*	1856*	2372*	2934*	3541*
2	109.1	288.0	536.5	848.2	1215	1633	2096	2603	3149
	105.8	291.0	548.4	867.4	1240	1661	2127	2634	3181
3	115.1	304.5	561.9	877.4	1247	1663	2121	2621	3159
	112.5	306.3	571.8	898.5	1279	1708	2180	2696	3251
4	114.4	300.1	556.3	868.7	1234	1645	2098	2593	3126
	111.6	303.2	565.8	889.2	1266	1691	2159	2669	3219
5	111.8	297.0	551.8	866.2	1233	1646	2102	2597	3130
	106.6	293.8	553.1	874.2	1249	1672	2140	2649	3199

表 2 試験片 B 群の固有振動数(Hz)の実験結果 (上段) と計算結果 (下段)
 (* 印は平均厚さで計算した場合)

No.	η								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	103.0	262.0	471.7	733.9	1038	1382	1762	2178	2627
	101.7	264.0	484.5	755.8	1072	1429	1823	2252	2715
	108.2*	305.4*	577.5*	913.3*	1305*	1746*	2233*	2763*	3336*
2	100.7	259.4	472.2	733.8	1039	1384	1767	2186	2638
	100.0	261.7	483.4	757.1	1077	1438	1838	2273	2742
3	104.9	266.7	480.5	747.1	1053	1399	1778	2191	2635
	101.8	265.3	488.0	762.1	1082	1442	1841	2275	2743
4	106.2	274.1	502.7	784.5	1112	1486	1898	2348	2833
	103.3	274.2	508.7	798.1	1136	1517	1939	2397	2892
5	102.2	259.7	466.1	722.8	1021	1360	1735	2146	2591
	101.3	262.3	481.1	750.3	1064	1418	1809	2236	2695

表 3 試験片 C 群の固有振動数(Hz)の実験結果 (上段) と計算結果 (下段)
 (* 印は平均厚さで計算した場合)

No.	η								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	88.97	220.8	391.9	612.9	865.4	1148	1467	1815	2191
	87.08	217.9	399.4	625.9	892.4	1195	1531	1898	2293
	97.93*	277.1*	525.0*	831.9*	1190*	1595*	2043*	2530*	3055*
2	84.53	207.0	372.2	580.6	826.9	1107	1419	1761	2129
	82.80	205.7	379.0	596.8	854.4	1148	1474	1830	2214
3	91.47	222.5	401.8	624.0	879.8	1172	1491	1843	2224
	90.90	228.8	417.9	652.3	927.1	1239	1583	1960	2365
4	91.77	225.7	403.5	623.4	879.8	1171	1492	1848	2230
	89.14	223.8	410.1	642.0	914.5	1224	1567	1941	2344
5	93.60	236.6	428.1	672.8	958.8	1282	1643	2034	2456
	88.81	229.5	427.0	674.3	965.5	1296	1663	2063	2495

表 4 試験片 D 群の固有振動数(Hz)の実験結果(上段)と計算結果(下段)
[*印は平均厚さで計算した場合]

No.	n									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	82.74	190.9	323.2	495.0	687.7	904.2	1142	1402	1676	
	80.70	182.5	321.2	493.9	697.8	930.2	1189	1472	1778	
	91.37*	258.9*	491.3*	779.5*	1117*	1498*	1920*	2379*	2874*	
2	84.16	199.4	342.6	528.0	731.3	963.3	1212	1479	1777	
	82.29	192.2	343.0	531.1	753.0	1006	1287	1594	1925	
3	90.58	202.5	351.8	519.2	708.1	922.8	1155	1425	1706	
	88.00	200.9	348.1	526.9	735.0	970.1	1230	1514	1820	
4	80.92	187.9	319.4	486.7	688.9	905.0	1156	1422	1714	
	79.21	184.2	330.7	514.8	732.9	981.9	1259	1563	1891	
5	92.78	211.0	348.8	524.4	721.8	941.2	1186	1450	1742	
	91.89	208.8	357.9	536.6	742.6	974.1	1230	1507	1806	

スポンジの上に半球かくの極点($\varphi=0$)部分が触れる形で設置し、点接触形加振器による力強制振動実験を行って固有振動数を測定した。

半球かくは工業用普通アルミニウム A 1100 P を用いて深絞りにより製作し、その後残留応力を除去するために熱処理を行っている。

本実験では、半径および極点での公称厚さはそれぞれ 151.0 mm, 3.0 mm として、厚さが φ の増加とともにほぼ一様に減少していく割合が異なる 4 種類の半球かくを 5 個ずつ用意した。 $\varphi=\pi/2$ での公称厚さが 2.5, 2.0, 1.5, 1.0 mm のものをそれぞれ試験片 A 群, B 群, C 群, D 群と名付け、1~5 の番号を付した。厚さは 1 個の半球かくについて 161 点を超音波厚さ計を用いて測定した。 φ とともに厚さが変化する様子を図 2~5 に例示する。

なお固有振動数算出に必要な材料物性値は次のとおりである。 $\nu=0.3$, $E=7.1 \times 10^4$ MPa (0.72×10^4 kg/mm²), $\rho=0.27 \times 10^4$ kg/m³ (2.8×10^{-10} kgs²/mm⁴)。

7. 実験結果と計算結果の比較

表 1~4 に固有振動数の実験結果と計算結果を示す。全体的にみて両者はよく一致しているといえよう。なお、各群の 1 番の試験片において * 印を付した振動数は 161 点の厚さの算術平均値を使って、厚さ一定の半球かくとして計算した値である。厚さの分布が図 2~5 に示す程度変化している場合には厚さ一定としての取

扱いでは不十分であることがわかる。

8. 結 言

今回得られた結果と今後の課題を列挙すると

(1) 球かくの厚さが変化する場合には級数解法を適用し、決定方程式の 8 個の根が解析的に見出され、これらに依ずる 8 個の級数解を求め得ることが示された。

(2) 周辺自由の半球かくの場合について必要な 4 個の解を実際に求めて、振動数方程式を導いた。

(3) 固有振動数の実験結果と計算結果を比較すると両者はよく一致しており、本解析法の実用性を示すことができた。

(4) $n=0$, $n=1$ の場合の固有値問題、円孔がある場合の固有値問題の解析については今後の課題とした。

なお、本報における数値計算は成蹊大学情報処理センターの MELCOM-COSMO 700 III/MP によった。

文 献

- (1) Leissa, A. W., NASA, Spec. Publ., 288 (1973), 403.
- (2) Irie・ほか 2 名, J. Sound Vib., 82-1 (1982), 83.
- (3) 高橋・ほか 3 名, 機論, 47-414, C (昭 56), 118.
- (4) 高橋・ほか 3 名, 機論, 48-425, C (昭 57), 31.
- (5) 平井・黒田, 機論, 52-475, C (昭 61), 833.
- (6) Coddington, E. A. and Levinson, N. (吉田訳), 常微分方程式論上, (昭 43), 206, 吉岡書店.

討 論

〔質問〕 高 橋 伸〔山形大学工学部〕

深い球殻の問題を精力的に研究されておられることに敬意を表す。特に実験もなされ、古典理論は深い球殻でも、 $1/k_0 \approx 30\,000$ 程度なら充分正しい結果を与えることを示されたのは参考になる。

(1) 計算は半球殻について行っているが、貴理論では φ の値は何ぐらいまで可能なか。また、 φ の値が小さいほど解の収束はよいのか。

(2) 決定方程式より求まる λ_7, λ_8 の値のため、 n が大きいときは計算ができなくなることがあるか。

(3) n の値は 10 まで計算されているが、 φ 方向の波数については一次だけ考えておられるようである。二次、三次についてはどうか。

〔回答〕 (1) 本解析法の場合、理論的には $0 < \varphi < \pi$ の範囲で計算可能である。今回は実験との対応を考えて数値計算は $\varphi = \pi/2$ の場合しか計算していないので、はっきりしたことは言えないが、 φ の値が小さくなるにつれて解の収束が悪くなるとは考えていない。

(2) 今回も前報⁽⁵⁾と同様に円孔のない場合を取扱っているので、 $\lambda_1 \sim \lambda_8$ に応ずる 8 個の級数解のうち $\lambda_1 \sim \lambda_4$ に応ずる 4 個の級数解だけを求めている。残りの $\lambda_5 \sim \lambda_8$ に応ずる級数解については具体的に求めているため、確言はできないが数値計算上特別の困難が生ずるとは予想していない。

(3) ご指摘のように $n=10$ までの各 n に対して φ 方向の波数については一次だけの β を計算している。数値計算の際、ひとつの n に対して複数個の β 、すなわち二次、三次に応ずる β を求めることを試みたが、二次以上は一次に比べてかなり大きな数値になり、本実験の範囲内ではそれらに対応する固有振動を見い出せなかった。また、振動数方程式左辺の行列式の値が固有振動数を含む β の広い領域において非常に零に近くなり、安定した β の値を見い出せなかった。

〔質問〕 谷 順二〔東北大学高速力学研究所〕

$\pi/4$ 付近で厚さにばらつきのある試験片 D 群ではどの値を用いたか。

〔回答〕 数値計算は個々の試験片別に行っており、厚さについてもそれぞれの試験片のデータを用いている。

厚さは 1 個の試験片について 161 点を測定している。具体的には、 $\varphi=0$ の点、そして $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ を 20 等分する各 φ について θ 方向に 8 箇所を測定している。 θ 方向ではそれほど大きなばらつきがないので 8 個の測定値の算術平均値を用いて、その φ における厚さのデータとしている。

図 2～5 には各 φ に対して 2 個の点がプロットしてあるが、これは各群に属する 5 個の試験片のなかで最大の厚さと最小の厚さを示している。