切削点近傍の応力解析*

(第1報, 半無限長くさびの応力解析)

小 尾 誠**, 小 林 隆 志**

An Analysis of Cutting Area Using the Theory of Elasticity (1st Report, The Stress Analysis of a Wedge Loaded along the Face)

by Makoto OBI and Takashi KOBAYASHI

In the present paper a semi-infinite wedge loaded along the face has been theoretically reduced by the theory of elasticity to estimate the stress distributions in the cutting area. The analysis is performed using Airy's stress functions combined of the known harmonic and biharmonic functions in which the stress components are transformed into exponential functions. This problem is reduced to obtain a solution which satisfies the boundary conditions with only two driven series functions. The calculation results obtained are as follows: The stress distributions of a 45 degree wedge loaded normal stress along the face are different from are of the semi-infinite plate. The principle shear stress plane causes in the plane inclined by 45 degrees in the work. And chippings occur easily in the tip of the tool.

Key Words: Cutting, Elasticity, Semi-Infinite Wedge, Airy's Stress Function, Tool, Work

1. 緒 言

切削点近傍(図1)では, 切りくずが起こるせん断面において, せん断変形, 工具すくい面において準せん断変形が起こる。今, 塑性変形理論等により, 降伏状態におけるそれら2面の応力分布を知ることができるなら, 他の自由面等の境界条件のもとに弾性学的に解析し, 結果として, 最小仕事をとるなら, 切削抵抗を最小にするせん断角が導かれ, 切削現象を明確に理解することができる。

しかし, 前者の塑性学的課題, すなわち, 2面の正確な応力分布を得ることは必ずしも容易ではない。ただし, すでに多くの研究から, せん断面あるいは工具すくい面の力学に関する定性的, 定量的特性が明らかにされており, 後者の課題である弾性学的解析が可能であるとするなら, その境界条件を推定し, 切削点近傍の変形, 力学をシミュレートすることは困難ではない。一方, 弾性学的に切削モデルをみると, 工具刃先等の部分を, いわゆる(1)半無限長くさびの応力解析, せん断面を中心とした部分の, (2)斜面を有する

半無限板の応力解析, (3)切りくずの応力解析, 等の課題に分けられる。これらの解析結果と従来の研究結果による条件, 拘束等を踏まえ, 切削現象をシミュレートしようとするのが本研究の目的である。このため, 本第1報では最初の課題として(1)半無限長くさびの応力解析を検討した。

ところで, 半無限長くさびの応力解析は案外難しく, Tranter が示したような⁽¹⁾, メリン変換を利用して解く方法は唯一のものとはいえないが有用なものであることが指摘されている⁽²⁾。山口らは Tranter の解を利用し, 斜め地盤の表面の一部に矩形状等分布荷重を受けた場合の応力解析を行っている⁽³⁾。しかしながら, 対象が異なるためか, 工具刃先近傍現象を考察す

図1 切削モデル

* 昭和61年4月3日 第63期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和60年4月30日。

** 正員, 山梨大学工学部 (〒400 甲府市武田4-3-11)。

ると現実の現象と対応しえない場合もある。かつ、Tranterの解法は数値計算を行うための手続きが若干複雑であり、またメルン変換の逆変換も必ずしも簡単とはいえない。

本研究では、以上の観点から、いわゆる調和関数あるいは重調和関数の一次結合である Airy の応力関数を各応力成分が結果的に指数関数に変換し得るよう選択することにより半無限長くさびの応力解析を容易にした。以下若干の成果を示す。

2. 理論的解析

弾性学では、既知の調和関数あるいは重調和関数の組合せである Airy の応力関数を求めて解く問題に帰一させる場合が多い。工具刃先端を原点とし、すくい面を 0 面、逃げ面を ϕ 面とした r - θ 極座標 (図 1) を取るとき、一般的な調和関数、重調和関数は r のべき乗と三角関数との積として与えられることは弾性学のテキストの教えるところである⁽⁴⁾。しかし、満足すべき重要な境界条件の一つに $r \rightarrow 0$ で有限値、 $r \rightarrow \infty$ で零に各応力成分は収束しなければならない条件があり、単純な一次結合では実現が容易ではない。このため、各応力成分が指数関数に変換し得るよう一次結合 (級数) の応力関数を選択する。例えば

$$\tilde{\chi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \frac{r^{s+m+2}}{s+m+1} [\sin \{sm(\phi-\theta)\} - \frac{sm}{s+m+2} \sin \{(sm+2)(\phi-\theta)-2\phi\}] \cdots (1)$$

の各応力成分は次式の指数関数で示される。

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\theta &= -2[s\lambda r^s F_c \sin \theta + F_0] e^{-\lambda r^s \cos s(\phi-\theta)} \\ \tilde{\tau}_{r\theta} &= 2s\lambda r^s F_s \sin \theta e^{-\lambda r^s \cos s(\phi-\theta)} \end{aligned} \cdots (1 \cdot a)$$

ここで

$$\begin{aligned} F_c &= \cos \{s(\phi-\theta)-\theta-\lambda r^s \sin s(\phi-\theta)\} \\ F_s &= \sin \{s(\phi-\theta)-\theta-\lambda r^s \sin s(\phi-\theta)\} \\ F_0 &= \sin \{\lambda r^s \sin s(\phi-\theta)\} \end{aligned}$$

ここに、 s は任意の整数であるから

$$-\pi/2 \leq s(\phi-\theta) \leq \pi/2 \cdots (1 \cdot b)$$

に s を定めれば $r \rightarrow 0$ で有限値、 $r \rightarrow \infty$ で零に収束させることが容易になる。 $0 \leq \theta \leq \phi$ で $s = \pi/2\phi$ として、式(1)を半無限板の応力関数に應用すると

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{\sigma}_\theta)_{\theta=\pi} &= (\tilde{\tau}_{r\theta})_{\theta=0} = (\tilde{\tau}_{r\theta})_{\theta=\pi} = 0 \\ (\tilde{\sigma}_\theta)_{\theta=0} &= -2 \sin (\lambda r^s) \end{aligned} \right\} \cdots (1 \cdot c)$$

であるから、任意の分布荷重 $P(r)$ に対して次の応力関数が得られる。

$$\chi = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{\chi} \int_0^\infty P(\xi) \sin \lambda \xi d\xi d\lambda \cdots (2)$$

ここで、 $\xi = r^s$, $s = \pi/2\phi$

矩形等分布荷重

$$P(r) = \begin{cases} p_0 & [0 \leq r \leq c] \\ 0 & [c \leq r] \end{cases} \cdots (3)$$

の場合の角度 ϕ について見ると

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta)_{\theta=0} &= \frac{2}{\pi} p_0 \int_0^\infty \frac{1 - \cos(c^s \lambda)}{\lambda} \sin(\lambda r^s) d\lambda \\ (\sigma_\theta)_{\theta=\phi} &= \frac{\sin \phi \cdot \cos \phi}{\phi} p_0 \frac{c^{2s}}{r^{2s} + c^{2s}} \\ (\tau_{r\theta})_{\theta=0} &= 0 \\ (\tau_{r\theta})_{\theta=\phi} &= \frac{\sin^2 \phi}{\phi} p_0 \frac{c^{2s}}{r^{2s} + c^{2s}} \end{aligned} \cdots (3 \cdot a)$$

となる。すなわち、0 面では矩形等分布の垂直応力成分のみ、また ϕ 面ではその比が角度 ϕ のみによって定まる垂直およびせん断応力が存在する。したがって、半無限長くさびの式(3)のような不連続荷重の解析は半無限板との重合せにより式(3・a)のような連続荷重の場合に置き換えることができる。このことは、以下に示す解析法の計算精度向上に極めて効果的である。一般角に対する各応力成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sin \theta / \phi p_0 \{ \cos \theta - r^{2s} G_c \} \\ &\quad + p_0 / \pi \{ (\pi - 2s\theta) - T_\theta \} \\ \tau_{r\theta} &= \sin \theta / \phi p_0 \{ \sin \theta - r^{2s} G_s \} (\sigma_\theta + \sigma_r) / 2 \\ &\quad \times (\sigma_\theta + \sigma_r) / 2 = p_0 / \pi \{ (\pi - 2s\theta) - T_\theta \} \cdots (3 \cdot b) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{r^{2s} \cos \theta - c^{2s} \cos \{ \theta(1-2s) \}}{(r^{2s} + c^{2s})^2 - (2c^s r^s \cos s\theta)^2} \\ G_s &= \frac{r^{2s} \sin \theta - c^{2s} \sin \{ \theta(1-2s) \}}{(r^{2s} + c^{2s})^2 - (2c^s r^s \cos s\theta)^2} \\ T_\theta &= \tan^{-1} \frac{r^s \cos s\theta + c^s}{r^s \sin s\theta} + \tan^{-1} \frac{r^s \cos s\theta - c^s}{r^s \sin s\theta} \end{aligned}$$

以上に示したように、結果的に各応力成分が指数関数に変換し得るよう応力関数を選択し、半無限長くさびの応力解析を行おうとするもので、二、三の指数変換公式を式(4)に示す。なお、以後一部を除き、正弦、余弦関数のみ次のように記号化する。

$$S[X] = \sin \{X\}, C[Y] = \cos \{Y\}$$

さらに X, Y が ϕ, θ のみの場合

$$\begin{aligned} S_\theta &= \sin \theta & C_\theta &= \cos \theta \\ S_\phi &= \sin \phi & C_\phi &= \cos \phi \\ S_{\phi\theta} &= \sin(\phi-\theta) & C_{\phi\theta} &= \cos(\phi-\theta) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{a^m}{m!} + \frac{a^m}{m!} m + \frac{a^m}{(m+1)!} \right\} = e^a \left\{ 1 + a + \frac{1}{a} \right\}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \frac{S}{C} [x + m\theta] = e^{aC_\theta} \frac{S}{C} [x + aS_\theta]$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} m \frac{S}{C} [x+m\theta] = a e^{aC_\theta} \frac{S}{C} [(x+\theta)+aS_\theta]$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{(m+1)!} \frac{S}{C} [x+m\theta] = \frac{1}{a} \left\{ -\frac{S}{C} [x-\theta] + e^{aC_\theta} \frac{S}{C} [(x-\theta)+aS_\theta] \right\}$$

..... (4)

2.1 半無限長くさび片側面における σ_θ

$$\chi = Z_1 a_n \{ (m+2)S[m\theta+\varphi] - mS[(m+2)\theta-\varphi] \}$$

$$+ Z_1 b_n \{ (m+2)S[m(\varphi-\theta)+\varphi] - mS[(m+2)(\varphi-\theta)-\varphi] \}$$

..... (5)

ここで

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{(m+1)!} \frac{r^{m+2}}{2(m+1)(m+2)}$$

なる応力関数は明らかに

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=0} = (\tau_{r\theta})_{\theta=\varphi} = 0 \quad \text{..... (5.a)}$$

また, σ_θ は次式で与えられる.

$$\sigma_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nrC_\theta} \{ S_{\theta\theta} C[\theta-nrS_\theta] + C_{\theta\theta} S[nrS_\theta]/nr \}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-nrC_\varphi} \{ S_\theta C[(\varphi-\theta)-nrS_{\theta\varphi}] + C_\theta S[nrS_{\theta\varphi}]/nr \}$$

..... (5.b)

ここで, a_n, b_n は境界条件により決定される.

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S_\theta e^{-nr} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{S[nrS_\theta]}{nr} e^{-nrC_\theta}$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n S_\theta e^{-nr} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{S[nrS_\varphi]}{nr} e^{-nrC_\varphi}$$

..... (5.c)

であるから, $\theta=0$ で $P(r)$, $e=\phi$ で自由面の時

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) \left\{ S_\theta e^{-nr} \pm \frac{S[nrS_\theta]}{nr} e^{-nrC_\theta} \right\} = P(r)$$

..... (5.d)

(符号同順, 以下同様) ゆえに, 近似関数 $\Phi_n^\pm$

$$\Phi_n^\pm = S_\theta e^{-nr} \pm \frac{S[nrS_\theta]}{nr} e^{-nrC_\theta} \quad \text{..... (6)}$$

の一次結合として満足させる時

$$\left. \begin{aligned} I_n^\pm &= \int_0^\infty w P(r) \Phi_n^\pm dr \\ I_{n,m}^\pm &= \int_0^\infty w \Phi_n^\pm \Phi_m^\pm dr \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (6.a)}$$

なる積分値から (w : 重率関数)

$$\{I_{n,m}^\pm\} \{(a_n \pm b_n)\} = \{I_n^\pm\} \quad \text{..... (6.b)}$$

のガウスの正規方程式 (連立方程式) を解くことにより, a_n, b_n が定まる.

ここで, w は重率関数であるが, 式(3)のような矩形状等分布荷重の場合 w を, 次式で与えると

$$w = r e^{-\mu r} \quad \text{..... (7)}$$

$$I_n^\pm = p_0 \frac{S_\theta}{(\mu+n)^2} [1 - e^{-(\mu+n)c} \{ c(\mu+n)+1 \}]$$

$$\pm \frac{1}{n(\mu^2+n^2+2\mu n C_\theta)} [n S_\theta - e^{(-\mu+n C_\theta)c} \times \{ \mu S[n C S_\theta] + n S[\varphi + n C S_\theta] \}] \quad \text{..... (7.a)}$$

$$I_{n,m}^\pm = \frac{S_\theta^2}{(\mu+n+m)^2}$$

$$+ \frac{1}{4nm} \ln \frac{\mu^2 + (n+m)^2 + 2\mu(n+m)C_\theta}{\{\mu + (n+m)C_\theta\}^2 + \{(n-m)S_\theta\}^2}$$

$$\pm \frac{S_\theta^2}{(\mu+n+m C_\theta)^2 + (m S_\theta)^2}$$

$$\pm \frac{S_\theta^2}{(\mu+n C_\theta + m)^2 + (n S_\theta)^2} \quad \text{..... (7.b)}$$

として $I_n^\pm, I_{n,m}^\pm$ は与えられる.

2.2 半無限長くさび両面の任意荷重

$$\chi = Z_2 c_n \{ C[m\theta+\varphi] - C[(m+2)\theta-\varphi] \}$$

$$+ Z_2 d_n \{ C[m(\varphi-\theta)+\varphi] - C[(m+2)(\varphi-\theta)-\varphi] \}$$

..... (8)

ここで,

$$Z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{(m+1)!} \frac{r^{m+2}}{2(m+1)}$$

なる応力関数の境界条件は

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = (\sigma_\theta)_{\theta=\varphi} = 0$$

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n S_\theta e^{-nr} + d_n \frac{S[nrS_\theta]}{nr} e^{-nrC_\theta} \right]$$

$$(\tau_{r\theta})_{\theta=\varphi} = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[d_n S_\theta e^{-nr} + c_n \frac{S[nrS_\varphi]}{nr} e^{-nrC_\varphi} \right]$$

..... (8.a)

すなわち, 半無限長くさびにせん断荷重が作用する場合である. この場合も近似関数 $\Phi_n^\pm$ が等しく, 前項の垂直荷重の場合と同様に解かれる. したがって, 一般的に半無限長くさびの任意荷重に対しては式(5)と(8)との重合せにより解析される. 結果を整理して表1に示す. 結局, 近似関数 $\Phi_n^\pm$ により境界条件を満たす問題に帰する. このため, $I_{\theta n}^\pm, I_{\varphi n}^\pm, I_{n,m}^\pm$ 等の積分値を求め, 連立方程式を解き a_n, b_n, c_n, d_n が決定される. この時, 与えられる境界条件の精度は積分精度, 方程式の解の精度および可能な級数の項数による. 有限個 nn の一次結合による二重平均誤差 ϵ_{RMS} は次式で与えられる.

$$\epsilon_{\text{RMS}} = \left[\int_0^\infty \{P(r)\}^2 dr - \sum_{n=0}^{nn} (a_n \pm b_n) \right. \\ \left. \times \left\{ 2I_n^\pm - \sum_{m=0}^{nn} (a_m \pm b_m) I_{n,m}^\pm \right\} \right] / \int_0^\infty w dr$$

..... (9)

解析の最後に, 応用として, 前出式(3)で与えられ

のような不連続点を持つ関数の不連続点近傍を正確に解析しようとする場合を例に具体的に解く。

矩形形状等分布荷重の場合, 解析の始めに示すように, 式(3・a)の負を重合せればよいから, 結局

$$\begin{aligned}(a_n \pm b_n) \Phi_n^\pm &= \mp \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\varphi} p_0 \frac{c^{2s}}{r^{2s} + c^{2s}} \\ (c_n \pm d_n) \Phi_n^\pm &= \pm \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi} p_0 \frac{c^{2s}}{r^{2s} + c^{2s}}\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を解けばよいことになる。ゆえに

$$(a_n \pm b_n) = -(c_n \pm d_n) \tan \varphi \quad \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

一方, 重率関数を次のようにすると

$$\begin{aligned}w &= r(c^{2s} + r^{2s})e^{-\mu r} \quad \dots\dots\dots (11) \\ I_{cn}^\pm &= \frac{c^{2s} \sin^3 \varphi}{\varphi} p_0 \left\{ \pm \frac{1}{(\mu + n)^2} \right. \\ &\quad \left. + 1/(\mu^2 + n^2 + 2\mu n \cos \varphi) \right\} \quad \dots\dots\dots (11 \cdot a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{n,m}^\pm &= c^{2s} \int_0^\infty r e^{-\mu r} \Phi_n^\pm \Phi_m^\pm \\ &\quad + \sin^2 \varphi 2s(2s+1) \Gamma(2s) / (\mu + n + m)^{2s+2} \\ &\quad \pm \frac{\sin \varphi}{m} \sin \left\{ (2s+1) \tan^{-1} \frac{m \sin \varphi}{\mu + n + m \cos \varphi} \right\} \\ &\quad \times \frac{2s \Gamma(2s)}{\{(\mu + n + m \cos \varphi)^2 + (m \sin \varphi)^2\}^{(2s+1)/2}} \\ &\quad \pm \frac{\sin \varphi}{n} \sin \left\{ (2s+1) \tan^{-1} \frac{n \sin \varphi}{\mu + n \cos \varphi + m} \right\} \\ &\quad \times \frac{2s \Gamma(2s)}{\{(\mu + n \cos \varphi + m)^2 + (n \sin \varphi)^2\}^{(2s+1)/2}} \\ &\quad + \frac{1}{2nm} \cos \left\{ 2s \tan^{-1} \frac{(n-m) \sin \varphi}{\mu + (n+m) \cos \varphi} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\times \frac{\Gamma(2s)}{\{[\mu + (n+m) \cos \varphi]^2 + \{(n-m) \sin \varphi\}^2\}^s} \\ &- \frac{1}{2nm} \cos \left\{ 2s \tan^{-1} \frac{(n+m) \sin \varphi}{\mu + (n+m) \cos \varphi} \right\} \\ &\times \frac{\Gamma(2s)}{\{[\mu + (n+m) \cos \varphi]^2 + \{(n+m) \sin \varphi\}^2\}^s} \\ &\dots\dots\dots (11 \cdot b)\end{aligned}$$

として, 与えられ, これらの結果から連立方程式を解くことにより c_n, d_n が定まり, 式(10・a)より a_n, b_n が定まる。ただし, 式(11・b)において最初の積分項は式(7・b)で与えられ, また, 式中 Γ はガンマー関数を示す。単に表1のみで求める場合を区別する時, 単純解, これとの重合せによる解を重合せ解と呼ぶ。本論文内では矩形形状等分布荷重を検討しているので, 重合せ解によっている。

3. 計算結果の考察

図2はくさび角度 $\phi = \pi/4, \pi/2$, 区間 $[2/3c, c]$ で矩形形状等分布荷重を受ける場合について解析した結果, σ_0/p_0 と r/c との関係を各 θ ごとに示している。まず, 境界条件 ($\theta=0$) から考察すると, 非常に正確に与えられることがわかる。(誤差は1に対して 10^{-3} 程度以下)重合せ解による。項数は50。単純解によった場合を一点鎖線で示しているが前者に比較すれば若干誤差があり, 特に不連続点近傍では大きく現れる。しかし, 切削点近傍について考えると, 厳密な矩形形状等分布荷重とは予想し難く, 現実的にはいずれの方法を選択しても正確に解析し得ると考えられる。一方, 各角度 θ の

表1 半無限長くさびの応力解析

$\begin{aligned}x &= Z_1 a_n \{ (m+2) \sin \{ m\theta + \varphi \} - m \sin \{ (m+2)\theta - \varphi \} \} \\ &\quad + Z_1 b_n \{ (m+2) \sin \{ m(\varphi - \theta) + \varphi \} - m \sin \{ (m+2)(\varphi - \theta) - \varphi \} \} \\ &\quad + Z_2 c_n \{ \cos \{ m\theta + \varphi \} - \cos \{ (m+2)\theta - \varphi \} \} \\ &\quad + Z_2 d_n \{ \cos \{ m(\varphi - \theta) + \varphi \} - \cos \{ (m+2)(\varphi - \theta) - \varphi \} \}\end{aligned}$	$\begin{aligned}Z_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{(m+1)!} \frac{r^{m+2}}{2(m+1)(m+2)} \\ Z_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n)^m}{(m+1)!} \frac{r^{m+2}}{2(m+1)}\end{aligned}$
$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \sum a_n \exp(-nr \cos \theta) \{ \sin(\varphi - \theta) \cos \{ \theta - nr \sin \theta \} + \cos(\varphi - \theta) \sin \{ nr \sin \theta \} / nr \} \\ &\quad + \sum b_n \exp(-nr \cos(\varphi - \theta)) \{ \sin \theta \cos \{ (\varphi - \theta) - nr \sin(\varphi - \theta) \} + \cos \theta \sin \{ nr \sin(\varphi - \theta) \} / nr \} \\ &\quad - \sum c_n \exp(-nr \cos \theta) \sin(\varphi - \theta) \{ \sin \{ \theta - nr \sin \theta \} + \sin \{ nr \sin \theta \} / nr \} \\ &\quad - \sum d_n \exp(-nr \cos(\varphi - \theta)) \sin \theta \{ \sin \{ (\varphi - \theta) - nr \sin(\varphi - \theta) \} + \sin \{ nr \sin(\varphi - \theta) \} / nr \} \\ \tau_{r\theta} &= \sum a_n \exp(-nr \cos \theta) \sin(\varphi - \theta) \{ \sin \{ \theta - nr \sin \theta \} - \sin \{ nr \sin \theta \} / nr \} \\ &\quad - \sum b_n \exp(-nr \cos(\varphi - \theta)) \sin \theta \{ \sin \{ (\varphi - \theta) - nr \sin(\varphi - \theta) \} - \sin \{ nr \sin(\varphi - \theta) \} / nr \} \\ &\quad + \sum c_n \exp(-nr \cos \theta) \{ \sin(\varphi - \theta) \cos \{ (\theta - nr \sin \theta) - \cos(\varphi - \theta) \sin \{ nr \sin \theta \} / nr \} \\ &\quad - \sum d_n \exp(-nr \cos(\varphi - \theta)) \{ \sin \theta \cos \{ (\varphi - \theta) - nr \sin(\varphi - \theta) \} - \cos \theta \sin \{ nr \sin(\varphi - \theta) \} / nr \} \\ (\sigma_\theta + \sigma_r) / 2 &= \sum a_n / nr \{ \sin(\varphi - \theta) - \exp(-nr \cos \theta) \sin \{ (\varphi - \theta) - nr \sin \theta \} \} \\ &\quad + \sum b_n / nr \{ \sin \theta - \exp \{ -nr \cos(\varphi - \theta) \} \sin \{ \theta - nr \sin(\varphi - \theta) \} \} \\ &\quad + \sum c_n / nr \{ \cos(\varphi - \theta) - \exp(-nr \cos \theta) \cos \{ (\varphi - \theta) - nr \sin \theta \} \} \\ &\quad + \sum d_n / nr \{ \cos \theta - \exp \{ -nr \cos(\varphi - \theta) \} \cos \{ \theta - nr \sin(\varphi - \theta) \} \}\end{aligned}$	
$\Phi_n^\pm = \exp(-nr) \sin \varphi \pm \exp \{ -nr \cos \varphi \} \sin \{ nr \sin \varphi \} / nr$	
$I_{n,m}^\pm = \int_0^\infty w \Phi_n^\pm \Phi_m^\pm dr, I_{cn}^\pm = \int_0^\infty w \Phi_n^\pm \{ (\sigma_\theta)_{\theta=0} \pm (\sigma_\theta)_{\theta=\varphi} \} dr, I_{cn}^\pm = \int_0^\infty w \Phi_n^\pm \{ (\tau_{r\theta})_{\theta=0} \mp (\tau_{r\theta})_{\theta=\varphi} \} dr$	
$\{ I_{n,m}^\pm \} \{ (a_n \pm b_n) \} = \{ I_{cn}^\pm \}, \{ I_{n,m}^\pm \} \{ (c_n \pm d_n) \} = \{ I_{cn}^\pm \}$	

変化による σ_θ は実線の $\phi = \pi/4$ に対し, $\phi = \pi$ (半無限板) を破線で示し比較している. $\theta = \pi/50$ なる荷重直下では両者は等しいが, $\pi/20$ になると若干差が認められ, $\pi/10$ ではその差が大きくなり, $\pi/5$ になると顕著に現れる. このことは山口らが指摘しているような 45 度以上 (同分布荷重) では斜め効果がすくないとは必ずしもいえない. σ_r あるいは平均応力 $(\sigma_\theta + \sigma_r)/2$ を見るとその傾向はさらに顕著に認められる.

図 3 は同一条件における平均応力の等価曲線を示すものである. この結果から見ると半無限板の場合と全く異なる. 図は負, すなわち圧縮応力を実線で, 正, 引張応力を破線で示しているが, 大きくは荷重下の圧縮応力とその左側の引張応力および自由面側の圧縮応力という三つの特徴を見ることができる. また, 後者の二つは r が比較的大きくなっても減少する割合は小さく, このことは荷重点から十分離れても引張りおよび圧縮応力は必ずしも小さくならないことを示している.

ところで, 重合せ解は半無限板との重合せである. したがって, 単純解と一致すれば両者は正しい. この点については確認されたが, さらに, 本解法の妥当性を検証するために次のような考察を行った. すなわち, このような矩形等分布荷重に対し, くさびの先端集中荷重を考へてみる. 先端から十分離れても上面の引張応力および下面の圧縮応力が必ずしも小さくないなら, r が十分大きい部分で両者, 矩形等分布荷重と先端集中荷重の場合は一致しなければならない.

くさび先端集中荷重における平均応力は

$$\frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_r}{2} = -\frac{F \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin (\theta - \varphi)}{r (\varphi - \sin \varphi)(\varphi + \sin \varphi)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで

$$F = \int_0^\infty P(r) dr = \frac{1}{3} c p_0 \quad \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

として, 矩形等分布荷重の場合と比較した計算結果

図 2 σ_0/p_0

を図 4 に示す. 図中太い線は矩形等分布荷重, 一点鎖線は先端集中荷重を示す. 当然荷重下近傍においては全く異なるが, 先端から離れるに従い差は小さくなり, やがて完全に一致することがわかる. このことから本解法がくさび状の応力解析を行うための適切な一方法であることが認められる. なお, 図から, このときの応力状態は荷重下を除けば, 全体的には ϕ によって定まる角度線を境に上部は引張応力, 下部は圧縮応力であることがわかる. この角度は次式 θ_0 で求められ, $\phi = \pi/4$ の場合, 約 21.3 度である.

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi} \quad \dots\dots\dots (13)$$

工具刃先に関する詳細な考察および実験的検討は報を改めることにし, 具体的な切削点近傍の応力解析の一例を図 5 に示す. 図 5 は切削直後の工具すくい面上にせん断応力が起こる前の状態における, 工具 (先端各 $\phi = \pi/4$), 工作物 ($\phi = \pi/2$) の主せん断応力等価曲線と主せん断応力面 (一点鎖線) を示す. $\phi = \pi/2$ と $\phi = \pi/4$ とを比較してみると, 主せん断等価曲線, 主せん断応力面いずれも全く異なり, 特に主せん断応力は $\pi/2$ に比較し $\pi/4$ の場合全体的に非常に大きく, かつ表面 (工具すくい面, 逃げ面) に近づくに従い大きくなる. また, 主せん断応力面とを合わせて考察すると, 工具刃先ではチップングが非常に起こりやすい状態にあることがわかる. 一方, 工作物側では主せん断応力等価曲線は若干複雑になるが, 切削点近傍では比較的小さく, $0.3 \sim 0.5 p_0$ 前後を示す. 主せん断応力面とを合わせ, 全体的に考えると, せん断面は 45 度前後に生ずることが予測される.

4. 結 言

切削点近傍を弾性学的に解析, シミュレートするための最初の課題である工具刃先等をいわゆる半無限長

図 3 $(\sigma_0 + \sigma_r)/2/p_0$

図4 $((\sigma_0 + \sigma_r)/2)/p_0$

くさびの応力解析として、その解法を検討した。以下要約すると次のようになる。

(1) 結果的に応力成分が指数関数に変換し得るような調和関数、重調和関数の級数である Airy の応力関数を選択することにより、その応力解析が容易になる。

(2) 結局、近似関数 ϕ により境界条件を満たす問題に帰する。計算結果によれば境界条件は非常に正確に与えられる。また、本解法の妥当性をくさび先端集中荷重の場合と比較することにより検証した。すなわち、荷重点から十分離れた位置では両者は一致する。

(3) くさび角 45 度、区間 $[2/3c, c]$ における矩形上等分布荷重の計算結果を見ると、半無限板の場合とは全く異なり、斜め効果は無視されない。すなわち、

図5 (主せん断応力)/ p_0 および主せん断応力面

荷重面側における引張応力および自由面側における圧縮応力は必ずしも小さくない。

(4) 切削点近傍の具体的応力解析の一例として、切削直後の工具、工作物の主せん断応力、主せん断応力面の計算結果を示した。工作物のせん断面はほぼ 45 度の方向に生じると予測され、また、工具側ではチップングが起こりやすい状態にあることがわかる。

最後に本研究を進めるにあたり、本学助教授、沢氏より適切な助言を得た。ここに謝意を表す。

文 献

- (1) Tranter, C. J., *Q. T. Mech. Appl. Math.*, Oxford, vol. 1 (1948), 125.
- (2) 最上, 土質力学, (昭 48), 308, 技報堂.
- (3) 山口・木村, 東京工大研究報告, (昭 41), 10.
- (4) 中原, 応用弾性学, (昭 53), 217, 実教.

討 論

〔質問〕 白井英治〔東京工業大学工学部〕

(1) 著者の扱われた問題は古くは Archibald (付1)により、また近年にはメリン変換を用いる方法で田中ら(付2)によって詳細な検討がなされている。また有限要素法による数値解析も三次元刃形の場合を含めて多く行われている。今後のご研究の参考にしていただきたい。

(2) 図1の場合も図5の場合も同様であるが、境界面の応力分布が諸条件のもとでどうなるかを知ることこそが切削の力学的な研究の本質であり、これは弾塑性の大変形問題のシミュレーション解析によって得

られるものである。これが得られたとして弾性解析するのでは著者の言うように「切削現象をシミュレートすることにはならないと思うがいかか。なお図1のせん断面は実際にはかなりの広がりのある塑性域であるし、工具すくい面に接する切りくず内部にも塑性域が存在することもよく知られた事実である。

〔回答〕 (2)から回答する。境界面の応力分布が諸条件のもとでどのようなかを知ることこそが切削の研究の本質であるとのご指摘であるが、全くそのとおりだと考えている。本文中、説明不足だったかとも思われるが、本研究の最終的目的もそこにおいている。すなわち、工具側などの三つの弾塑性学的アルゴリズム(塑性域の存在する部分は可能なかぎり塑性学的アプローチも必要である)よりなるサブプログラム

(付1) Archibald, F. R., *Trans. ASME*, 78-6 (1956), 1149.

(付2) 田中・ほか2名, 精密機械, 39-10 (昭 48), 1055.

を確立し、まず従来の研究成果を踏まえたもつともらしい初期条件から、切削プロセスの力学的関係を満たすべく、解析結果をフィードバックしながら真の境界面応力分布を試行錯誤的に推定する方法を試みようとするものである。このため、各サブプログラム間の引数で外部副関数プログラムとなる応力分布関数は、ある程度の拘束は認められるものの、基本的には任意の関数として処理されていなければならない。

これを実現するための方法を(1)に関連して説明する。現在このような課題に対しては、有限要素法を除けば、Tranterの示した Mellin 変換による方法が唯一である。前者においては、試行回数が必ずしも少ないことから、計算時間・費用に問題がある。一方、Mellin 変換法は、具体的応力関数が与えられてはじ

めてそれを Mellin 変換し、連立方程式を解き、応力関数の Mellin 逆変換を行うといった手順を踏む。したがって、任意の関数が与えられたとき、これらを計算機内で自動的に処理することは極めて困難である。

このような現状を踏まえて、本研究では半無限長さびの比較的容易な新しい解析法を導いたものである。本文中において、計算例としては、計算誤差が最も大きくなると予想されることから、く形状応力分布の場合を示しているが、導かれた解析式は応力分布関数にかかわらず、同一手法で、かつ解は初等代数関数の形で表されることは本文中表に整理したとおりである。このことは有限要素法にせよ、Mellin 変換法にせよ解を得るアルゴリズムである点と比較すれば非常に大きな特徴の一つである。