がたと摩擦のある二自由度系の強制ねじり振動の研究*

(第1報, 連続すべり運動の場合)

片岡 眞澄**, 大野 進一***, 鈴木 常夫***

Forced Torsional Vibration of a Two-Degrees-of-Freedom System Including Clearance and Friction (1st Report, Case of Continuous Relative Slip Motion)

by Masumi KATAOKA, Shinichi OHNO, and Tsuneo SUZUKI

The engine-clutch-manual transmission system of an automobile is modelled by a forced torsional vibration system of two degrees of freedom including two nonlinear terms, namely clearance and friction. In the derivation of the analytical solution, the friction term is linearized based upon the approximate solution of motion. The conclusions are as follows. 1) It is shown analytically and is confirmed by experiments and computer simulations that the continuous relative slip motion occurs when the friction is small. 2) The sum of torque impulse per cycle of the forced motion becomes large in the system with small friction when the system approaches resonance, but it remains almost unchanged in the system with large friction. 3) The sum of torque impulse is not affected by the size of clearance when the friction is small.

Key Words: Theory of Vibration, Shock, Two-Degress of Freedom System, Forced Vibration, Friction, Backlash, Gear Moise, Experiment, Computer Simulation, Analysis

1. 緒 言

自動車の駆動系異音の一つに、エンジンアイドリング時に手動変速機から生ずる歯打ち音がある。これは、アイドリング時にはエンジンの回転数変動が大きいため、歯面の衝突が生ずることによるものである。歯打ち音の防止のため、クラッチディスクのディスクプレートとハブの間に装着されたばねの剛性と摩擦ワッシャの摩擦力を調整し、変速機への回転数変動の伝達を低減することが、主として実験とシミュレーション計算によって研究されている⁽¹⁾⁽²⁾。

著者らは、この問題を解析的に取扱うことを考え、はじめに実機実験とシミュレーション計算により、この歯打ち音は基本的には変速機の入力歯車と副軸歯車を慣性モーメントとし、バックラッシュをがたとする二自由度系の衝突振動を取扱えばよいことを示した⁽³⁾⁽⁴⁾。つぎにこの結果に基づいて、まずがたのある二自由度系の強制ねじり振動について実験とシミュレーション計算を行い、強制変位一サイクル中に多数回

の衝突が生じていることを明らかにした⁽⁵⁾。また衝突ごとの変数の関係を与える回帰式を用いて解析解を求め、このような多数回衝突問題に対して回帰式による解析の有効なことを示した⁽⁶⁾。

今回は摩擦も取り入れ、より実機に近いがたと摩擦を含む二自由度の強制ねじり振動系を構成し、実験、シミュレーション計算および解析解の誘導を行い、歯面間の衝撃の大きさに及ぼす諸因子の影響を調べた。第1報では、摩擦部に連続すべりが生じている場合を取扱い、第2報では固着すべりが生じている場合を取扱う。

2. 振 動 系

本研究で扱う振動系は、図1に示すものである。この振動系は、自動車のエンジン・クラッチ・歯車変速機系をモデル化したものであるから、記号の意味を実機と対応づけて説明すると次のとおりである。

ω' : エンジンの平均回転角速度

ω : エンジンの角速度変動の角振動数。四サイクル四気筒のエンジンでは $\omega = 2\omega'$ となる。

k_1 : クラッチディスクに装着されている圧縮ばねの等価ねじりばね定数

k_2 : 歯車の歯の曲げ剛性の等価ねじりばね定数

* 昭和61年4月3日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年9月6日。

** 正員、千葉工業大学 (〒275 習志野市津田沼2-17-1)。

*** 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

- J_1 : クラッチハブと入力歯車の慣性モーメント
 J_2 : 副軸歯車の慣性モーメント
 C_1, C_2 : J_1, J_2 に作用する粘性抵抗の係数
 ε : 歯車間のバックラシの 1/2
 X, Y : J_1, J_2 の回転角
 Z : エンジンフライホイールの回転角
 x, y, z : X, Y, Z の変動部分, $z = E \sin \omega t$
 E : z の振幅
 F : クラッチディスクに装着された摩擦ワッシャによる摩擦トルク

3. 実験装置

3.1 装置の構成 実験に用いた装置の概略を図 2 に示す。モータの回転を自在継手を介して伝達することにより、軸①の時刻 t における回転角は近似的に $\omega' t + E \sin 2\omega' t$ となる。軸①と軸②の間には図 1 の k_1 に相当するばね③が備えられている。軸②には入力歯車④が固定され、軸⑥には副軸歯車⑤が固定されている。軸①と軸②の間に摩擦トルクを作用させるため、軸②と一体で回転するアスベスト製の摩擦ワッシャ⑦がコイルばね⑧により軸①に押し付けられている。摩擦トルクの値はナット⑨を移動させ、コイルばねの長さを変えることによって設定する。軸②、歯車④、ワッシャ⑦、ばね⑧およびナット⑨が J_1 に相当し、歯車⑤と軸⑥が J_2 に相当する。歯車④と歯車⑤の軸間距離は可変であり、軸間距離の調節によってバックラシの大きさ 2ε を設定する。

3.2 装置の諸元 慣性モーメントは $J_1 = 2.72 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = 1.12 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ である。歯車④お

図 1 振動系

図 2 実験装置

よび歯車⑤はモジュール 2.75、歯数は 18 および 30 の平歯車で歯面は研削してある。ばね③は $k_1 = 14.7 \sim 39.2 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ の範囲で五とおりのばねを用いた。また $k_2 = 1.76 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ である。 k_1 の値は実測値であり、 k_2 の値は歯の曲げ剛性の計算式から求めた値である。なお、これらの値は実機の値にならって決めた。

3.3 測定項目 歯車④と歯車⑤の角速度変動、軸①と軸②の相対角変位、および軸①の角速度変動を測定した。軸①、歯車④および歯車⑤の角速度変動の検出のために、軸①に歯車⑩を取付けて歯先の近くに電磁センサ⑬を設置し、軸②および軸⑥にはロータリエンコーダ⑪および⑫を取付けた。電磁センサおよびロータリエンコーダの出力は角速度が変動すると波列に疎密を生じ周波数変調波となる。軸①と軸②の間の相対角変位の測定にはブリッジ回路に組み込んだコイルのインダクタンスの変化を利用した。すなわち軸①に取付けた円弧状のコイルの中に、軸②に取付けた黄銅棒を挿入し、黄銅棒の位置変化に伴うコイルのインダクタンス変化をブリッジ回路の出力電圧として検出した。出力電圧はスリップリング⑮を通して取り出している。また運転中の動摩擦トルクの測定はできないので、ここではクーロン摩擦が作用しているものとして最大静止摩擦トルクを測定した。

4. 実験結果

4.1 衝突状態の確認 図 3 は得られた結果の一例で、 $\omega = 1.26 \times 10^2 \text{ rad/s}$, $E = 0.0256 \text{ rad}$, $\varepsilon = 0.0021 \text{ rad}$, $k_1 = 39.2 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, 摩擦トルク $\Delta F = 0.9 \text{ N} \cdot \text{m}$ のものである。図 3 (a), (b) はそれぞれ歯車④、歯車⑤の角速度変動の記録である。図 3 (a), (b) 中の A, B, C などの対応から摩擦トルクが作用している場合でも、著者の先の報告⁽⁵⁾と同様に強制変位一サイクル中に多数回の衝突を行い、そのつど角速度の微小な変動が生じていることが確認される。

4.2 連続すべり運動 図 3 (c) は軸①と軸②との相対角変位である。図 3 (c) から相対角変位波形には固着状態を示す水平な部分が存在せず近似的に正弦波とみなせることが分かる。このことから軸①と軸②の間では連続すべり運動が生じていることが分かる。この正弦波に乗っている小さな波は種々の原因によって生じたノイズであると思われる。

4.3 トルク積の和に及ぼす k_1 および ΔF の影響 歯打ち音の大きさは歯面衝突時の衝撃の大きさに関係する。衝撃の大きさは、直線運動では力積によって評価できる。歯打ち音の場合は回転運動であるから、力

積の代わりにトルク積を考え、衝撃の大きさを強制変位一サイクル中のトルク積の和で評価することにした。図4は k_1 と ΔF を変えた場合のトルク積の和の実験結果で、トルク積の和は、歯車⑤の角速度を微分して角加速度 d^2y/dt^2 を求め、 $(2\pi/\omega)\int_0^T J_2 |d^2y/dt^2| dt / T$ として得ている。図4では $\omega = 1.26 \times 10^2 \text{ rad/s}$, $\varepsilon = 8 \times 10^{-4} \text{ rad}$, $k_1 = 14.7 \sim 39.2 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ の5段階、 $\Delta F = 0.77 \sim 2.29 \text{ N}\cdot\text{m}$ の12段階、時間 $T = 6\pi/\omega$ としている。図1の二自由度系を近似的に、ばね k_1 、慣性モーメントが $J_1 + J_2$ の一自由度系とみなすと、その固有角振動数は $\omega_1 = \sqrt{k_1/(J_1 + J_2)}$ である。この一自由度系が共振を生ずるためには $k_1 = 60.7 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ である。そこで図4において ΔF が小さいときに k_1 が大きくなるとトルク積の和が大きくなっているのは、系が共振に近づいて J_1, J_2 が大きく振動するために衝撃も大きくなっているためと解することができる。 ΔF を大きくすると共振が抑制されるものと考えられる。

5. シミュレーション計算

5.1 運動方程式 図1の系において、がたと部の非線形復元トルクを $T(Y-X)$ 、摩擦トルクを $F(Z-\dot{X})$ とすると運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} J_1 \frac{d^2 X}{dt^2} + C_1 \frac{dX}{dt} + k_1(X-Z) \\ = T(Y-X) + F(\dot{Z}-\dot{X}) \\ J_2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + C_2 \frac{dY}{dt} = -T(Y-X) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで $T(Y-X)$, $F(\dot{Z}-\dot{X})$ は図5(a), (b)のとおりである。 $X = \omega' t + x$, $Y = \omega' t + y$, $Z = \omega' t + E \sin \omega t$ であるから式(1)は回転角の変動分 x, y に関する方程式に書き換えられ

$$\left. \begin{aligned} J_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + C_1 \frac{dx}{dt} + k_1 x &= k_1 E \sin \omega t \\ &+ T(y-x) + F(\dot{z}-\dot{x}) - C_1 \omega/2 \\ J_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + C_2 \frac{dy}{dt} &= -T(y-x) - C_2 \omega/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで y の原点は、がたの中央にとるものとする。

5.2 シミュレーション計算の結果 図6は式(2)をルンゲクッタ・ジル法を用いて直接積分したシミュレーション計算の結果の一例で、諸元は図3の実験結果の場合と同一である。図6(c), および図6(d)より J_1 は連続すべり運動を行っていることが分かる。図7はばね定数 k_1 と摩擦トルク ΔF を変化させた場合のトルク積の和を示したもので、諸元は図4の場合と同じである。ただし k_1 は6段階、 ΔF は13段階に変化させた。シミュレーション結果は実験結果と

図3 歯車の角速度と相対角変位

図4 $\Delta F, k_1$ とトルク積の和の関係

図5 復元トルクと摩擦トルク

ほぼ一致していることが分かる。

6. 解析 解

6.1 摩擦トルクのフーリエ級数近似 式(2)の第1式の右辺の二つの非線形項のうち摩擦トルク $F(\dot{z}-\dot{x})$ を近似的に線形の時間の関数として表現することを考える。 $F(\dot{z}-\dot{x})$ の変数 $\dot{z}-\dot{x}$ のうち $\dot{z}$ は既知であるから $\dot{x}$ が定まれば $\dot{z}-\dot{x}$ は定まる。 $\dot{x}$ は前報の解析によっても、本報の図3(a)および図6(a)によっても、強制変位による周期 $2\pi/\omega$ の正弦波の上に衝突による小さい波の重なったものとなってい

図6 シミュレーション解による波形

図7 ΔF , k_1 とトルク積の和の関係

る。そこで $\dot{x}$ の近似解を周期 $2\pi/\omega$ の正弦波とすれば $\dot{z}-\dot{x}$ は周期 $2\pi/\omega$ の正弦波となる。連続すべりの場合、摩擦トルク $F(\dot{z}-\dot{x})$ は $(\dot{z}-\dot{x})$ の正負に応じて $\pm\Delta F$ となるから、 $\dot{x}$ を正弦波で近似すれば摩擦トルク $F(\dot{z}-\dot{x})$ の近似解は時間間隔 π/ω ごとに $\pm\Delta F$ の値を交互にとるく形波となり、フーリエ級数展開ができる。 $\dot{x}$ の近似解は、衝突の影響を無視しているから図1の振動系において、 $\varepsilon=0$ とおき更に簡単のために $k_1 \ll k_2$ なので $k_2=\infty$ とおき、粘性減衰項も無視した一自由度系の解として求められる。すなわち、 $\dot{x}$ の近似解は式(2)の第1式において J_1 を J_1+J_2 とおき $C_1=0$, $T(x-y)=0$ とおいたものの解である。今後の記号の混乱を避けるために x の代わりに ξ を用いると、 $\dot{x}$ の近似解 $\dot{\xi}$ はつぎの式を解くことによって与えられる。

$$(J_1+J_2)d^2\xi/dt^2+k_1\xi=k_1E\sin\omega t+F(\dot{z}-\dot{\xi}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで z , $\dot{z}-\dot{\xi}$ および $F(\dot{z}-\dot{\xi})$ の関係を示すと図8のようになる。摩擦トルク $F(\dot{z}-\dot{\xi})$ の近似解をフーリエ級数で時間の関数として表すためには図8の $F(\dot{z}-\dot{\xi})$ が正である区間の中点 O_1 と、 z が負から正に変わる点 O_2 の位相差 φ が必要である。いま $\theta=\omega t$ とおき θ の原点を O_2 にとり図8のく形波を無次元時間 θ の関数として $F'(\theta)$ と表すと、 $F'(\theta)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$F'(\theta)=(4\Delta F/\pi)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \times \cos\{(2m+1)(\theta+\varphi)\}/(2m+1)\dots\dots\dots (4)$$

位相差 φ はつぎのようにして決める。いま新たに O_1 を原点とする無次元時間を τ とおく。 $-\pi/2 < \tau < \pi/2$ の区間での角変位 ξ を ξ_1 と書くと、この区間では $F(\dot{z}-\dot{\xi})=\Delta F$ であるから、式(3)の解は

図8 強制変位と摩擦トルクの関係

$$\begin{aligned} \xi_1/E &= \frac{C_1}{E} \cos\left(\frac{\omega_1}{\omega} \tau\right) + \frac{C_2}{E} \sin\left(\frac{\omega_1}{\omega} \tau\right) \\ &+ \frac{(\omega_1/\omega)^2}{(\omega_1/\omega)^2 - 1} \sin(\tau - \varphi) + \Delta F/(k_1 E) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし $\omega_1 = \sqrt{k_1/(J_1 + J_2)}$, C_1, C_2 は未定定数である。
 $\tau = \pm \pi/2$ において相対角速度 $\dot{z} - \dot{\xi}_1 = 0$ であるから
 式(5)より

$$\begin{aligned} C_1/E &= \sin \varphi / \left[(\omega_1/\omega) \{ (\omega_1/\omega)^2 - 1 \} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega_1}{\omega}\right) \right] \\ C_2/E &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

次に $\pi/2 < \tau < 3\pi/2$ での角変位 ξ を ξ_1 とおけば, ξ_1 は ξ と対称な角変位である。 $\tau = \pi/2$ で摩擦トルクの作用方向が逆転するから, 角加速度について

$$\ddot{\xi}_1|_{\tau=\pi/2} - 2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \frac{\Delta F}{k_1} = \ddot{\xi}_1|_{\tau=\pi/2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(5)~(7)より

$$\sin \varphi = -\frac{\Delta F}{k_1 E} (\omega_1/\omega) \{ (\omega_1/\omega)^2 - 1 \} \tan\left(\frac{\pi \omega_1}{2\omega}\right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)から位相差 φ を求め式(4)に代入すれば摩擦トルクのフーリエ級数展開が求まる。

6.2 連続すべり運動が起こるための条件 連続すべりが起こるための条件は $\tau = \pi/2$ において J の慣性トルクとばね k_1 によるトルクとの和の絶対値が摩擦トルク ΔF より大きいことから⁽⁷⁾

$$J\omega^2 d^2 \xi_1/d\tau^2|_{\tau=\pi/2} + k_1(\xi_1 - z)|_{\tau=\pi/2} < -\Delta F \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(5), (8)を用いれば式(9)より

$$\begin{aligned} &\pm 1 / \left[(\omega_1/\omega) \{ (\omega_1/\omega)^2 - 1 \} \right. \\ &\quad \times \left. \sqrt{(\omega_1/\omega)^2 + \tan^2\left(\frac{\pi \omega_1}{2\omega}\right)} \right] > \Delta F/(k_1 E) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし複号は $\omega_1/\omega \geq 1$ で +, $\omega_1/\omega < 1$ で - をとる。
 よって連続すべり運動の発生する ΔF の範囲は, 式

図9 系の分解

(10)を解くことから近似的に定まる。

6.3 任意の励振トルクと周期的な摩擦トルクが作用する時の振動系の運動 さて式(2)にもどって考える。非線形項の一つ $F(z-x)$ は線形化できた。残る非線形項 $T(y-x)$ は歯面の衝突時にのみ両歯車に作用する励振トルクで, 両歯車の接触時だけに大きい値を有し, それ以外の時は値が零となる衝撃的な関数である。ところで J_1 の角速度変動一周中に発生する衝突の回数と周期性は不明である。そこで著者の先の報告⁽⁶⁾と同様にして衝突がある場合の解を求めることにする。励振トルクの作用時刻を表すのに記号 t' を用いることにし, J_1, J_2 に作用する励振トルクを $G(t')$ とすると形式的には図1を図9(a), (b)に示す二つの一自由度系に分けて表せる。無次元時間 $\theta' = \omega t'$ で表した励振トルクを $g(\theta') = G(\theta'/\omega)/J_1$ とおく。この励振トルクにより単位慣性モーメントは

$$d\dot{x} = g(\theta') d\theta' / \omega^2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

に等しい瞬間的な角速度変動を生ずることになる。ところで図9の一自由度系において, 励振トルク $G(t')$ が作用していない場合の J_1, J_2 の運動方程式の解 x_1, y_1 は初期変位および初速度をそれぞれ $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ とすれば

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\gamma \kappa \theta} \left\{ \frac{\gamma(x_0 - B \sin \delta + \gamma \lambda) + \lambda(\dot{x}_0 - B \cos \delta)}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \right. \\ &\quad + A_1 \sin q\theta + e^{-\gamma \kappa \theta} \cdot D \cos q\theta \\ &\quad + B \sin(\theta + \delta) - \gamma \lambda \\ &\quad \left. + \frac{4\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos\{(2m+1)(\theta + \varphi) - p_m\}}{\phi_m(2m+1)} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$y_1 = (1 - e^{-c\theta}) \left(\frac{\dot{y}_0 + 1/2}{c} \right) + y_0 - \theta/2 \quad \dots\dots (13)$$

ここで

$$\gamma = C_1/2\sqrt{J_1 k_1}, \quad \omega_0 = \sqrt{k_1/J_1}, \quad \lambda = \omega/\omega_0 = 1/\kappa$$

$$q = \kappa \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad c = C_2/(J_2 \omega),$$

$$\delta = \tan^{-1}\{-2\gamma\lambda/(1 - \lambda^2)\}$$

$$B = E/\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\gamma\lambda)^2},$$

$$\tan p_m = 2\gamma\lambda(2m+1)/\{1 - \lambda^2(2m+1)^2\}$$

$$\phi_m = \sqrt{\{1 - \lambda^2(2m+1)^2\}^2 + \{(2m+1)2\gamma\lambda\}^2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{4\Delta F}{\pi k_1 q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\phi_m} \left[\sin\{(2m+1)\varphi - p_m\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma \kappa}{(2m+1)} \cos\{(2m+1)\varphi - p_m\} \right] \end{aligned}$$

$$D = x_0 - B \sin \delta + \gamma \lambda$$

$$- \frac{4\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos\{(2m+1)\varphi - p_m\}}{\phi_m}$$

$$\{\psi_m(2m+1)\}$$

そこで、励振トルク $g(\theta')$ が作用するとき θ' 以後の任意の時刻 θ における J_1, J_2 の変位増分は式(11)の速度増分を時刻 θ' における初速度とみなすことから式(12), (13)を用いて次のようになる。

$$dx = \frac{\lambda g(\theta') e^{-\gamma \kappa(\theta - \theta')}}{\omega^2 \sqrt{1 - \gamma^2}} \sin q(\theta - \theta') \cdot d\theta' \quad \dots (14)$$

$$dy = -\frac{g(\theta')}{\omega^2 c} \{1 - e^{-c(\theta - \theta')}\} d\theta' \quad \dots (15)$$

よって時刻 $\theta' = 0$ から $\theta' = \theta$ の間に作用する励振トルク $g(\theta')$ による角変位増分は式(14), (15)を $\theta' = 0$ から $\theta' = \theta$ まで積分したものとなる。

6.4 s 回めの衝突以後の J_1, J_2 の運動 衝突時に系に作用する励振トルクを三角波形で表すものとし、時刻 $\bar{\theta}_1$ を中心とする次の無次元の三角波形 $f(\theta')$ を導入する。すなわち

$$f(\theta') = \begin{cases} 0 & : \theta' \leq \bar{\theta}_1 - 1/n \\ n + n^2(\theta' - \bar{\theta}_1) & : \bar{\theta}_1 - 1/n \leq \theta' \leq \bar{\theta}_1 \\ n - n^2(\theta' - \bar{\theta}_1) & : \bar{\theta}_1 \leq \theta' \leq \bar{\theta}_1 + 1/n \\ 0 & : \bar{\theta}_1 + 1/n \leq \theta' \end{cases} \quad \dots (16)$$

1 回めの衝突が時刻 $\bar{\theta}_1$ で生じたとすれば、 J_1, J_2 間

に作用する励振トルク $g(\theta')$ は式(16)により

$$g(\theta') = I_1 \omega f(\theta') / J_1 \quad \dots (17)$$

と書ける。ここで $I_1, \bar{\theta}_1$ は現在未定であるが後に決定される。 I_1 は本論文でトルク積と呼ぶものである。衝突による J_1 の変位増分は式(17)の $g(\theta')$ に式(16)を代入し、 $\theta' = 0$ から $\theta' = \theta$ まで積分することから

$$x_2 = \frac{\lambda I_1}{J_1 \omega \sqrt{1 - \gamma^2}} \left[\int_{\bar{\theta}_1 - 1/n}^{\bar{\theta}_1} e^{-\gamma \kappa(\theta - \theta')} \times \{n + n^2(\theta' - \bar{\theta}_1)\} \sin q(\theta - \theta') \cdot d\theta' + \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1 + 1/n} e^{-\gamma \kappa(\theta - \theta')} \{n - n^2(\theta' - \bar{\theta}_1)\} \times \sin q(\theta - \theta') \cdot d\theta' \right] \quad \dots (18)$$

便宜上、1 回めの衝突が J_1 のがた部の後面で発生するものとすれば、1 回めの衝突以後の J_1 の角変位は式(12)に式(18)を加えることから得られる。また J_2 の角変位も同様に求めて求められる。 J_1 と J_2 の s 回の衝突後の運動は、 s 回の衝突による角変位増分を加算したものとなる。そこで $\rho_i (i = 1, 2, 3, \dots, s)$ をがたの後面での衝突の場合 $\rho_i = 1$ 、前面での衝突の場合は $\rho_i = -1$ をとる定数と定義すれば、 s 回の衝突後の J_1, J_2 の運動は次のようになる。

$$x = e^{-\gamma \kappa \theta} \{A \sin q\theta + D \cos q\theta\} + B \sin(\theta + \delta) - \gamma \lambda + \frac{4\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos\{(2m+1)(\theta + \varphi) - p_m\} / \{\psi_m(2m+1)\} + \frac{H n^2}{\{(\gamma \kappa)^2 + q^2\}^2} \sum_{i=1}^s \rho_i I_i e^{-\gamma \kappa(\theta - \bar{\theta}_i)} \times [F_1\{[(\gamma \kappa)^2 - q^2] \sin q(\theta - \bar{\theta}_i) + 2\gamma \kappa q \cos q(\theta - \bar{\theta}_i)\} + F_2\{[(\gamma \kappa)^2 - q^2] \cos q(\theta - \bar{\theta}_i) - 2\gamma \kappa q \sin q(\theta - \bar{\theta}_i)\}] \quad \dots (19)$$

$$y = (1 - e^{-c\theta}) \left\{ \dot{y}_0 + \frac{1}{2} \right\} / c + y_0 - \theta / 2 - \frac{1}{c\omega J_2} \sum_{i=1}^s \rho_i I_i \left\{ 1 - \frac{n^2}{c^2} e^{-c(\theta - \bar{\theta}_i)} \cdot (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \right\} \quad \dots (20)$$

ただし

$$H = \lambda / J_1 \omega \sqrt{1 - \gamma^2}, F_1 = (e^{-\gamma \kappa/n} + e^{\gamma \kappa/n}) \cos q/n - 2, F_2 = (e^{-\gamma \kappa/n} - e^{\gamma \kappa/n}) \sin q/n$$

$$A = \{\gamma(x_0 - B \sin \delta + \gamma \lambda) + \lambda(\dot{x}_0 - B \cos \delta)\} / \sqrt{1 - \gamma^2} + A_1$$

6.5 $\bar{\theta}_s, I_s$ の決定 s 回めの衝突直前の J_1, J_2 の角変位間の関係から

$$y(\bar{\theta}_{s-0}) = \varepsilon \rho_s + x(\bar{\theta}_{s-0}) \quad \dots (21)$$

式(19), (20)より衝突直前の角変位を求め、式(21)に代入することから

$$(1 - e^{-c\bar{\theta}_s}) \left\{ \dot{y}_0 + \frac{1}{2} \right\} / c + y_0 - \bar{\theta}_s / 2 - \frac{1}{c\omega J_2} \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i \left\{ 1 - \frac{n^2}{c^2} e^{-c(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \times (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \right\} = \varepsilon \rho_s + e^{-\gamma \kappa \bar{\theta}_s} \{A \sin q\bar{\theta}_s + D \cos q\bar{\theta}_s\} + B \sin(\bar{\theta}_s + \delta) - \gamma \lambda + \frac{4\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos\{(2m+1)(\bar{\theta}_s + \varphi) - p_m\} / \{\psi_m(2m+1)\} + \frac{H n^2}{\{(\gamma \kappa)^2 + q^2\}^2} \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i e^{-\gamma \kappa(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \times [F_1\{[(\gamma \kappa)^2 - q^2] \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) + 2\gamma \kappa q \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)\} + F_2\{[(\gamma \kappa)^2 - q^2] \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) - 2\gamma \kappa q \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)\}] \quad \dots (22)$$

式(22)から s 回めの衝突発生時刻 $\bar{\theta}_s$ が決定する。次に反発係数を e_0 とおけば

$$-e_0 = \{\dot{y}_{\bar{\theta}_{s-0}} - \dot{x}_{\bar{\theta}_{s-0}}\} / \{\dot{y}_{\bar{\theta}_{s-0}} - \dot{x}_{\bar{\theta}_{s-0}}\} \quad \dots (23)$$

式(23)に式(19), (20)を θ で 1 回微分したものを代入して

$$I_s = \frac{(1+e_0)}{\rho_s} \times \left[\left(\dot{y}_0 + \frac{1}{2} \right) e^{-c\bar{\theta}_s} - \frac{1}{2} - \frac{n^2}{\omega J_2 C^2} (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i e^{-c(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} + \frac{4\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sin\{(2m+1)(\bar{\theta}_s + \varphi) - p_m\} / \psi_m - e^{-\gamma\kappa\bar{\theta}_s} \{ (qA - \gamma\kappa D) \cos q\bar{\theta}_s - (\gamma\kappa A + qD) \sin q\bar{\theta}_s \} - B \cos(\bar{\theta}_s + \delta) \right. \\ \left. + \frac{Hn^2}{(\gamma\kappa)^2 + q^2} \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i e^{-\gamma\kappa(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} [(F_1 q + F_2 \gamma\kappa) \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) + (F_1 \gamma\kappa - F_2 q) \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)] \right] \\ \times \frac{n^2}{\omega J_2 C^2} (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) - \frac{Hn^2}{(\gamma\kappa)^2 q^2} \{ F_1 q + F_2 \gamma\kappa \} \quad \dots\dots\dots (24)$$

6.6 $s+1$ 回めの衝突発生位置の決定 $s+1$ 回めの ρ_{s+1} のとる値は s 回の衝突後, ある時間経過後の J_1, J_2 の角変位の位置関係を比較することから得られる. この手順は, 先の著者の報告⁽⁶⁾と同一であるため簡単に述べる. すなわち比較のための時刻を s 回の衝突後最初に J_1 の角加速度が零となる時刻とし, $\bar{\theta}_s^*$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} y(\bar{\theta}_s^*) &\geq \varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) && \text{ならば, がたの後面} \\ y(\bar{\theta}_s^*) &\leq -\varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) && \text{ならば, がたの前面} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

と衝突することになる. 一方

$$-\varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) < y(\bar{\theta}_s^*) < \varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) \quad \dots\dots\dots (26)$$

の場合は, J_2 はがたの途中にあるから, 今度は $y(\bar{\theta}_s^*)$ の点から $\varepsilon\rho_s + x(\theta)$ の曲線に接線を引き, その接点の時刻を新たに $\bar{\theta}_s^*$ とし式(25)にもどり一連の手順を繰返す. この過程で接線の傾きが反転すれば $s+1$ 回めの衝突は s 回めと反対の面で発生することになり $\rho_{s+1} = -\rho_s$ となる.

6.7 計算手順 J_1, J_2 の運動は回帰式(19), (20), (22), (24)~(26)によって定まる. その計算手順はまず式(8)より φ を求める. 次に便宜上, 1 回めの衝突ががたの後面で発生するように初期条件 $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ を設定することから $\rho_1 = 1$ となる. もちろん

図 10 解析解による波形

図 11 摩擦トルクとトルク積の和の関係

図 12 摩擦トルクとトルク積の和の関係

図 13 がたの大きさとトルク積の和の関係

前面で発生するような設定でも支障はない。これにより式(22), (24)から $\bar{\theta}_1, I_1$ が定まる。次に 2 回目の衝突位置の判定を式(25), (26)で行い、それ以後はこの手順を初めから繰返し行う。

7. 解析結果および結果の比較

7.1 振動波形 図 10 は解析解による波形の一例で計算に用いた諸元は図 3 および図 6 の場合と同一である。なお反発係数は実測値で $e_0=0.91$, $n=70$, フーリエ級数の項数 $m=20$ とした。 n の値は実験およびシミュレーションから得られた平均的接触時間を無次元化し、これを $2/n$ に等置したことから得た。なお図 10 の縦軸において、便宜上 $(-\rho_i)I_i$ を I とおいた。

7.2 摩擦トルクとトルク積の和の関係 図 11, 12 は摩擦トルクとトルク積の和の関係の一例である。ここでトルク積の和は解析解では $\sum I_i$ であり、実験およびシミュレーションでは前述の $(2\pi/\omega) \times \int_0^T \{J_2 |d^2 y/dt^2| dt/T\}$ である。データの整理上、摩擦トルクの大きい固着すべりの生ずる範囲も図中に含まれているが、式(10)による連続すべりの発生領域は破線の左側である。図 11 の実験およびシミュレーションの曲線は図 4 および図 7 の曲面の $k_1=29.4 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ における切断面に相当する。図 12 は $k_1=39.2 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$ の切断面に相当する。両図とも実験値が他の値に比べて大きめの値となったが、これは実験値が計測装置の性能などに起因する衝突とは無関係な成分も積分しているためと考えられる。

7.3 がたの大きさとトルク積の和の関係 図 13 は $\Delta F=0.9 \text{ N}\cdot\text{m}$ の場合のがたの大きさとトルク積の和の関係を示したものである。この摩擦トルクの値

は連続すべり運動が生ずる範囲のものである。トルク積の和はがたの大きさにはあまり影響を受けないことが分かる。しかし、がたの大きさを増すと衝突の回数は減少していくことから衝突 1 回当たりのトルク積は増加することになる。

8. 結 論

がたと摩擦のある二自由度系の強制ねじり振動について、摩擦部に連続すべりが生ずる場合を取り上げ、実験、シミュレーション計算および解析解の誘導を行った。得られた結果をまとめれば次のとおりである。

(1) 連続すべりが発生する条件について解析的に近似式を導き、摩擦トルクの小さい範囲で連続すべりが発生していることを示した。実験およびシミュレーション計算においても摩擦トルクが小さいときに連続すべりの発生が認められた。

(2) 歯面の衝撃の大きさをトルク積の和を用いて評価した。実験、シミュレーション計算ともに、摩擦トルクが小さい時は、強制変位の角振動数が近似的な一自由度系の固有角振動数に接近するにつれて、トルク積の和は著しく大きくなった。摩擦トルクの大きい時は両角振動数が接近してもトルク積の和は、ほとんど変化しなかった。

(3) がたの大きさのみを変えた場合、トルク積の和の大きさはあまり変化しなかった。

(4) 強制変位に比較して小さいがたを有し、強制変位一サイクル中に多数回の衝突の生ずる場合について、回帰式を求める解法は有効な方法であることが分かった。

文 献

- (1) 例えば, Sakai, T., ほか 4 名, *SAE Paper*, 810773 (1981).
- (2) 例えば, 大沼・ほか 3 名, 手動変速機のアイドル騒音に及ぼすクラッチねじり特性の影響, 自技会, 832 A 44 (昭 58), 275.
- (3) 片岡, 大野, 鈴木, 機械学会・精機学会共催山梨地方講演論文集, (昭 58-10), 90.
- (4) 片岡・大野・鈴木, 文献(3)の 93 ページ.
- (5) 片岡・大野・鈴木, 機論, 52-474, C(昭 61), 431.
- (6) 片岡・大野・鈴木, 機論, 52-475, C(昭 61), 844.
- (7) 中西・亘理・佐藤, 摩擦吸振器について, 東京大学航空研究所報告, 22(昭 19), 335.
- (8) 津田, 機論, 18-75(昭 26), 105.
- (9) Den Hartog, J. P., *Trans. ASME*, APM-53, (1931), 107.
- (10) Dubowsky, S. and Freudenstein, F., *Trans. ASME*, Ser. B, 91-1 (1971), 305.

討 論

〔質問〕 小 島 昌 一〔東北大学工学部〕

(1) 歯車対のモデルが5章(=歯対の定ばね剛性)と6章(=反発係数)と異なるが、そうされた理由があればご教示いただきたい。

(2) 図10に定常性がないが計算手順で繰返しの打ち切りはどのように判定されるのかお教え願いたい。

(3) 図3の計測と図6の計算結果の対応を良くするには、復元トルクや摩擦トルクのモデル化においてどのような方策が今後有効と考えておられるかお示しいただきたい。

(4) 図11~13と関連して、式(17)に示されるトルク積は歯車4, 5間の相対運動に関連し図4のトルク積の定義と同一でないように思われるがその差の影響はないものか。

(5) $Y(y)$ および J_2 は J_1 側速度に換算されているものと考えてよろしいか。

(6) ロータリエンコーダ、磁気センス歯車の分割数を御教示願いたい。

〔回答〕 (1) 歯車対のモデルは5章のように、ばね剛性 k_2 で表すのが著者らの基本的な考え方である。ところで6章で式(2)の解析解を求めるには断片線形法を用いれば k_2 のままで取扱えるが、衝突回数が多いため解を接続していくことは不可能である。そこで衝突問題を解くための一つの方法である反発係数を用いる解法を採用し、トルク積に関する式(24)のよ

うな回帰式を得た。

(2) 一サイクル当たりのトルク積の和の値が収束したところで計算を打ち切っている。

(3) 復元トルクは歯のかみあい数によって変わるものであるが、 k_2 に1枚かみあい時の値と、2枚かみあい時の値を入れて計算してみても、図6の波形やトルク積は変化しない。これは $k_2 \gg k_1$ のためと思う。したがって復元トルクを操作しても対応を良くするための効果はないと思う。摩擦は、実際は単純なクーロン摩擦でないと思うが、これについての検討はしていない。

(4) 式(17)の I_1 は第1回めの衝突のトルク積を示しており、図4の縦軸は一サイクル当たりのトルク積の和を示している。図4の縦軸の定義式は文中に書いてあるように $(2\pi/\omega) \int_0^T J_2 |d^2y/dt^2| dt/T$ であるが、両歯車は速度変動一サイクル中の大部分は接触しておらず、そのため d^2y/dt^2 の値は積分区間 $[0, T]$ の大部分で零であり、衝突時にのみ零でない、ほぼ三角波形の値をとる。各衝突時ごとの積分値が各衝突ごとのトルク積を与えており、式(17)と図4の間に定義の違いはない。

(5) $y(t)$, J_2 などは J_1 の回転軸に換算している。

(6) ロータリエンコーダ⑪, ⑫のパルス数は一回転当たり500パルスおよび1000パルスである。歯車⑩の歯数は100枚である。