模擬地震入力に対する弾性円筒貯槽の 非定常不規則振動の解析*

(続報, 有限振幅液面揺動に対する側壁変形の直接解析)

内海 雅彦**, 木村 康治***, 坂田 勝***

The Non-stationary Random Vibration of an Elastic Circular Cylindrical Liquid Storage Tank to Simulated Earthquake Excitation (Continued Report, Straightforward Analysis of Tank Wall Deformation due to Finite Amplitude Liquid Surface Oscillation)

by Masahiko UTSUMI, Koji KIMURA, and Masaru SAKATA

In the previous paper the non-stationary response of an elastic circular cylindrical tank partially filled with liquid to lateral earthquake excitation was investigated by modeling the earthquake acceleration as an amplitude modulated non-white random process. In the present paper the differential equation governing the displacement of the tank wall is solved directly and the results obtained are compared with those by Galerkin's method reported previously. A fairly good agreement is found between the previous and the present results.

Key Words: Vibration of Continuous System, Non-Linear Random Vibration, Earthquake Response, Elastic Circular Cylindrical Tank, Liquid Sloshing

1. 緒 言

液体貯槽の耐震安全性評価において、貯槽側壁および内部液体の地震応答解析は重要な問題である。著者らは、地震入力を卓越周期を有する非定常不規則過程によって模擬し、液面揺動(スロッシング)が顕著な長周期地震の場合と、側壁振動(バルジング)が顕著な短周期地震の場合に分類して、確率論的応答解析を行った^{(1)~(4)}。その結果、液面揺動が有限振幅となる長周期地震の場合には、液位⁽¹⁾および側壁変形^{(2)~(4)}に関する安全側の耐震性評価を得るためには、液面揺動の非線形性を考慮することが必要であることを示した。

既報^{(2)~(4)}では、有限振幅液面揺動による側壁変位を空貯槽の直交振動モード関数で展開するガレルキン法を採用した。しかし、この解法においては、高次振動モードまでを考慮すると、液圧の作用領域が壁面液位の有限振幅振動とともに変動することに起因して側壁変形解の収束性が悪くなり、低次の数個のモードを採

用して解を得なければならないことが判明した。長方形貯槽の場合⁽²⁾には低次モードのみによって完全収束解が得られたが、円筒貯槽の場合⁽³⁾⁽⁴⁾には収束性が悪く、考慮するモード次数によって解が若干ばらつく場合があった。本論文では、既報⁽³⁾⁽⁴⁾で得られた側壁変形解の精度を確かめるために、有限振幅液面揺動に対する側壁の運動方程式を直接解く方法によって側壁変形の非定常不規則応答解析を行う。

2. 解析モデルと基礎方程式

前報⁽³⁾とやや重複するが、解析モデルと基礎方程式について略述する。図1に示すように、剛基礎上に固定された弾性円筒貯槽が x 方向に地震加速度 $\ddot{f}(t)$ で励振される系を考える。弾性側壁の端末条件は上端自由-下端固定とする。液体運動は非圧縮完全流体の渦なし流れと仮定し、弾性側壁の変形は小さく薄肉円筒殻の線形理論に従うものとする。 a は貯槽半径、 l は貯槽の高さ、 h は静止時の液体の深さ、 ρ_f は液体の密度、 ρ_s , h_s , E_s , ν_s はそれぞれ側壁の密度、板厚、ヤング率、ポアソン比を表す。 ϕ は貯槽に固定された移動座標系 $O-r\theta z$ から眺めた液体速度を与える速度ポテンシャル、 η は液位を表す。 u , v , w はそれぞれ側壁の軸方向、周方向、半径方向の変位成分を表す。

* 昭和61年4月1日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年10月28日。

** 正員、石川島播磨重工業(株)技術研究所 (〒135 東京都江東区豊洲3-1-15)。

*** 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

長周期地震動によって有限振幅液面揺動の励起される場合の本系に対する基礎方程式は、下記のとおりである。

$$\nabla^2 \phi = \phi_{,rr} + \phi_{,r}/r + \phi_{,\theta\theta}/r^2 + \phi_{,zz} = 0 \quad (1)$$

$$\phi_{,z}|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

$$\phi_{,r}|_{r=a} = w_{,t} \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a P|_{z=h+\eta} \delta \eta r dr d\theta = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \{-\eta_{,t} + \nabla \phi|_{z=h+\eta} \cdot \nabla (z-\eta)\} \times \delta \phi|_{z=h+\eta} r dr d\theta = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^a \{L_u(u, v, w) + \rho_s h_s u_{,tt}\} \delta u \\ & + \{L_v(u, v, w) + \rho_s h_s (v_{,tt} - \ddot{f}(t) \sin \theta)\} \delta v \\ & + \{L_w(u, v, w) + \rho_s h_s (w_{,tt} + \ddot{f}(t) \cos \theta)\} \delta w \\ & \times dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{h+\eta} P|_{r=a} \delta w dz d\theta \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、コンマに続く下添字は偏微分を表す。式(1)は液体内の連続条件、式(2)、(3)は底および側壁での流速の適合条件、式(4)、(5)は液面における力学および運動学的非線形境界条件、式(6)は側壁の運動方程式である。式(4)～(6)は変分原理に基づき積分形表示されている。式(6)中の L_u, L_v, L_w は円筒殻の剛性項に対応する z, θ に関する線形偏微分演算子⁽⁵⁾である。式(4)、(6)中の P は圧力で、速度ポテンシャル ϕ を用いて下記のように表される。

$$\begin{aligned} P = & -\rho_f \{\phi_{,t} + g(z-h) + r \cos \theta \ddot{f}(t) \\ & + (\nabla \phi)^2/2 + \dot{G}(t)\} \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 $\dot{G}(t)$ は液面の平均圧力を零とする条件：

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a P|_{z=h+\eta} r dr d\theta = 0 \quad (8)$$

によって後で定められる時間関数である⁽⁶⁾。

速度ポテンシャル ϕ と液位 η は、周方向波数 $m=0 \sim 3$ 、半径方向次数 $n=1$ のスロッシングモード（固有振動数 ω_m ）により下記のように表される⁽³⁾。ただし、添字 $n=1$ の表記は省略している。

図 1 弾性円筒貯槽と座標系

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) = & \sum_{m=0}^3 A_m(t) J_m(\lambda_m r) \\ & \times \cos m\theta \cosh(\lambda_m z) / \cosh(\lambda_m h) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^3 C_m(t) J_m(\lambda_m r) \cos m\theta \quad (10)$$

ここで、 J_m は m 位の第 1 種ベッセル関数である。 λ_m は $(m, 1)$ 次モードの固有値で、固有振動数 ω_m と

$$\omega_m^2 = g \lambda_m \tanh(\lambda_m h) \quad (11)$$

の関係がある。既報⁽³⁾ 3 章で調べたように、スロッシングモードの固有振動数 ω_m は、側壁が剛体の場合の値とほとんど同じである。したがって、対応する固有値 λ_m も $\phi_{,r}|_{r=a}=0$ から得られる剛体壁の場合の値、すなわち

$$J_m(\lambda_m a) = 0 \quad (12)$$

の根で近似できる。このことは、スロッシングモードが励起される場合の液体運動は剛体円筒貯槽内の液体運動⁽¹⁾とほとんど同じであることを意味する。このような場合には、式(3)の右辺の側壁たわみ速度が微小となるため、側壁は、運動エネルギーがひずみエネルギーに比して無視できる準静的変形状態にあり、式(6)の側壁慣性力項も無視できる。したがって、まず、式(9)、(10)を許容関数とするガレルキン法によって式(4)、(5)を解いて圧力 P と液位 η を求め、次にこの結果を式(6)右辺に代入して準静的変形解法により側壁変位 u, v, w を求めることができる。

ここで、下記のような無次元化を施す。これまでに用いた有次元量に * 印を付し、対応する無次元量を無印の同文字で表す。以下の解析は無次元量を用いて行う。

$$\left. \begin{aligned} r &= r^*/a^*, \quad z = z^*/a^*, \quad t = \omega_1^* t^*, \\ l &= l^*/a^*, \quad h = h^*/a^*, \quad h_s = h_s^*/a^*, \\ \phi &= \phi^*/a^{*2} \omega_1^*, \quad \eta = \eta^*/a^*, \\ (u, v, w) &= (u^*, v^*, w^*)/a^*, \\ \ddot{f}(t) &= \ddot{f}^*(t^*)/a^* \omega_1^{*2}, \\ P &= P^*/\rho_f^*(a^* \omega_1^*)^2, \quad \dot{G}(t) = \dot{G}^*(t^*)/(a^* \omega_1^*)^2, \\ A_m(t) &= A_m^*(t^*)/a^{*2} \omega_1^*, \quad C_m(t) = C_m^*(t^*)/a^*, \\ \lambda_m &= \lambda_m^* a^*, \\ \omega_m &= \omega_m^*/\omega_1^* = (\phi_m/\phi_1)^{1/2} \{\phi_m = \lambda_m \tanh(\lambda_m h)\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3. 液体運動の解析

式(4)、(5)に式(9)、(10)を代入してガレルキン法を適用すると、一般化座標 A_m, C_m に関する常微分方程式系が導かれる⁽¹⁾⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{A}_1 &= -(1/\phi_1)C_1 - S_1 \dot{f}(t) + H^{(1)}A_1^2 C_1 \\
 &\quad + H^{(2)}C_1^3 + \sum_{m=0,2} (H_m^{(11)}A_1 A_m + H_m^{(12)}C_1 C_m) \\
 \dot{C}_1 &= \phi_1 A_1 + H^{(3)}A_1 C_1^2 \\
 &\quad + \sum_{m=0,2} (H_m^{(13)}A_1 C_m + H_m^{(14)}C_1 A_m) \\
 \dot{A}_m &= -(1/\phi_1)C_m + H_m^{(21)}A_1^2 + H_m^{(22)}C_1^2 \\
 &\quad (m=0, 2) \\
 \dot{C}_m &= \phi_m A_m + H_m^{(23)}A_1 C_1 \quad (m=0, 2) \\
 \dot{A}_3 &= -(1/\phi_1)C_3 + H^{(31)}A_1^2 C_1 + H^{(32)}C_1^3 \\
 &\quad + H^{(41)}A_1 A_2 + H^{(42)}C_1 C_2 \\
 \dot{C}_3 &= \phi_3 A_3 + H^{(33)}A_1 C_1^2 + H^{(43)}A_1 C_2 \\
 &\quad + H^{(44)}C_1 A_2 \\
 &\dots\dots\dots (14)
 \end{aligned} \right\}$$

さらに、これから A_m を消去すると、液位の一般化座標 C_m に関する非線形振動方程式系が得られる⁽¹⁾⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{C}_1 + 2\zeta_1 \dot{C}_1 + C_1 + P^{(1)}C_1^3 + P^{(2)}C_1 \dot{C}_1^2 \\
 + \sum_{m=0,2} (P_m^{(11)}C_1 C_m + P_m^{(12)}\dot{C}_1 \dot{C}_m) &= \beta \ddot{f}(t) \\
 \ddot{C}_m + 2\zeta_m \omega_m \dot{C}_m + \omega_m^2 C_m \\
 &= P_m^{(21)}C_1^2 + P_m^{(22)}\dot{C}_1^2 \quad (m=0, 2) \\
 \ddot{C}_3 + 2\zeta_3 \omega_3 \dot{C}_3 + \omega_3^2 C_3 &= P^{(31)}C_1^3 \\
 &\quad + P^{(32)}C_1 \dot{C}_1^2 + P^{(41)}C_1 C_2 + P^{(42)}\dot{C}_1 \dot{C}_2 \\
 &\dots\dots\dots (15)
 \end{aligned} \right\}$$

ここで、モーダル等価減衰比 ζ_m を導入した。式(14)、(15)の導出に際して、 ϕ と η を同程度の微小量 $[O(\varepsilon^{1/3})]$ と仮定して三次微小項までを保存する近似を行った。各一般化座標と入力のオーダは下記のとおりである⁽³⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 A_m, C_m &\sim O(\varepsilon^{m/3}) \quad (m=1\sim 3) \\
 A_0, C_0 &\sim O(\varepsilon^{2/3}), \dot{f}(t) \sim O(\varepsilon)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

式(9)、(10)を式(8)に代入すると、関数 $\dot{G}(t)$ が $\dot{G}(t) = P^{(51)}C_1^2 + P^{(52)}\dot{C}_1^2 \dots\dots\dots (17)$

の形に定められる。式(14)、(15)、(17)中の諸係数 S_1 、 $H^{(1)}$ 、 β 、 $P^{(1)}$ の内容の表記は紙面の都合で省略する。

式(15)の解によって液位 η [式(10)] が定まる。さらに式(14)を利用すれば、速度ポテンシャル ϕ に関する変数 A_m 、 $\dot{A}_m$ を液位変数 C_m 、 $\dot{C}_m$ で表すことができるので、圧力 P [式(7)] も式(15)の解によって定められる。このようにして、側壁の運動方程式(6)の右辺圧力項が決定される。

4. 側壁変形解析

4.1 ガレルキン法による側壁変形解析の問題点

既報⁽³⁾では、式(6)の圧力項の非線形部分による側壁変位を空貯槽の直交振動モード関数 $U_{mp}(z)$ 、 $V_{mp}(z)$ 、 $W_{mp}(z)$ で下記のように展開表示し〔既報⁽³⁾

式(32)参照〕、

$$\begin{aligned}
 &\{u(z, \theta, t), v(z, \theta, t), w(z, \theta, t)\}^T \\
 &= \sum_{m=0}^3 \sum_{p=1}^{\bar{p}} \Psi_{mp}(t) \begin{Bmatrix} U_{mp}(z) \cos m\theta \\ V_{mp}(z) \sin m\theta \\ W_{mp}(z) \cos m\theta \end{Bmatrix} \dots (18)
 \end{aligned}$$

$0 \leq z \leq h + \eta|_{r=1}$ でなされる圧力の仮想仕事を壁面液位 $\eta|_{r=1}$ に関するテイラー級数で次式により近似した。

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^{h+\eta|_{r=1}} P|_{r=1} \delta w dz d\theta = \sum_{m=0}^3 \sum_{p=1}^{\bar{p}} \delta \Psi_{mp} \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^h P|_{r=1} W_{mp} dz + (P|_{r=1} W_{mp})|_{z=h} \right. \\
 &\quad \times \eta|_{r=1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (P|_{r=1} W_{mp})|_{z=h} \eta^2|_{r=1} \\
 &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (P|_{r=1} W_{mp})|_{z=h} \eta^3|_{r=1} + O(\varepsilon^{4/3}) \Big\} \\
 &\quad \times \cos m\theta d\theta \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

上式は、式(16)に基づき三次微小項までで打ち切られるので、 z に関する被積分関数 $P|_{r=1} W_{mp}(z)$ が $z=h$ と $z=h+\eta|_{r=1}$ の間で変動の小さいような軸方向モード次数 p の範囲でのみ有効である。したがって、式(18)で $\bar{p}$ を増加させても収束解は得られず、たかだか $\bar{p}=3$ 程度で収束解を得なければならない。

4.2 直接法による側壁変形解析 そこで、式(6)の変分 δu 、 δv 、 δw に関する停留条件を与える方程式系を直接解くことにする。側壁の慣性力を省略し、式(13)を用いて無次元表示すると、これらの方程式系は下記ようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 &u_{,zz} + \{(1-\nu_s)/2\} u_{,\theta\theta} \\
 &\quad + \{(1+\nu_s)/2\} v_{,z\theta} + \nu_s w_{,z} = 0 \\
 &- \{(1+\nu_s)/2\} u_{,z\theta} - \{(1-\nu_s)/2\} \\
 &\quad \times (1+4\delta_s) v_{,zz} - (1+\delta_s) v_{,\theta\theta} + \delta_s \\
 &\quad \times (2-\nu_s) w_{,zz\theta} + \delta_s w_{,\theta\theta\theta} - w_{,\theta} = 0 \\
 &\nu_s u_{,z} - \delta_s (2-\nu_s) v_{,z\theta} - \delta_s v_{,\theta\theta\theta} + v_{,\theta} \\
 &\quad + \delta_s (w_{,zzz} + 2w_{,zz\theta} + w_{,\theta\theta\theta}) + w \\
 &= \begin{cases} \bar{\rho}_f P|_{r=1} : 0 \leq z \leq h + \eta|_{r=1} \\ 0 : h + \eta|_{r=1} \leq z \leq l \end{cases} \dots (20)
 \end{aligned} \right\}$$

ここで、 δ_s 、 $\bar{\rho}_f$ は次式で定義される無次元数である。

$$\begin{aligned}
 \delta_s &= h_s^2/12, \quad \bar{\rho}_f = \rho_f^* (1-\nu_s^2) a^{*3} \omega_1^{*2} / E_s^* h_s^* \\
 &\dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

式(9)を式(7)に代入し、各周方向波数成分に分離することにより、式(20)右辺の圧力項は次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f P|_{r=1} = & \bar{\rho}_f \left[\cos \theta \{ \dot{A}_1 \mu_1 F_1(z) + \dot{f}(t) \right. \\ & + A_1 A_0 \mu_1 \mu_0 F_1'(z) F_0'(z) + A_1 A_2 \mu_1 \mu_2 \\ & \times (F_1(z) F_2(z) + F_1'(z) F_2'(z) / 2) \} \\ & + \dot{A}_0 \mu_0 F_0'(z) + (z-h) / \psi_1 \\ & + A_1^2 (1/4) \mu_1^2 \{ F_1'^2(z) + F_1''^2(z) \} + \dot{G}(t) \\ & + \cos 2\theta [\dot{A}_2 \mu_2 F_2(z) \\ & + A_1^2 (1/4) \mu_1^2 \{ F_1'^2(z) - F_1''^2(z) \}] \\ & + \cos 3\theta [\dot{A}_3 \mu_3 F_3(z) + A_1 A_2 \mu_1 \mu_2 \\ & \times \{ F_1'(z) F_2'(z) / 2 - F_1(z) F_2(z) \}] \left. \right] \dots \dots (22) \end{aligned}$$

ここで、下記のような簡略表示を行った、

$$\mu_m = J_m(\lambda_m), \quad F_m(z) = \cosh(\lambda_m z) / \cosh(\lambda_m h) \quad (m=0 \sim 3) \dots \dots (23)$$

また、式(12)の関係 $J_m'(\lambda_m) = 0$ を用いた。式(20)右辺の圧力項と液位を式(14), (15)によって定め、側壁変位 u, v, w について式(20)を解く。このとき準静的解法を適用するので、液体運動に関する一般化座標 $A_m(t), C_m(t)$ およびそれらの時間微分 $\dot{A}_m(t), \dot{C}_m(t)$ は定数と同様に扱える。したがって側壁変位 u, v, w は、これらの時間関数によって陽に表すことができる。

ここで、端末条件等に関する後の記述の便宜のために、下記の表記を導入する。

$$\{ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4; Z_5, Z_6, Z_7, Z_8 \} \\ = \{ u, v, w, w_z; T_z, S_z, Q_z, M_z \} \dots \dots (24)$$

ここで、 T_z, S_z, Q_z, M_z はそれぞれ、軸方向垂直力、面内せん断力、面外せん断力、曲げモーメントで、無次元変位成分 u, v, w を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} T_z &= \{ E_s^* h_s^* / (1 - \nu_s^2) \} \{ u_{,z} + \nu_s (v_{,z} + w) \} \\ S_z &= \{ E_s^* h_s^* / 2(1 + \nu_s) \} \\ &\quad \times \{ u_{,z} + (1 + 4\delta_s) v_{,z} - 4\delta_s w_{,z} \} \\ Q_z &= (D_s^* / a^{*2}) \{ w_{,zzz} + (2 - \nu_s) (w_{,z\theta\theta} - v_{,z\theta}) \} \\ M_z &= (D_s^* / a^*) \{ w_{,zz} + \nu_s (w_{,\theta\theta} - v_{,\theta}) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots (25)$$

式(20), (22)より $Z_i (i=1 \sim 8)$ の一般解を、液体との接触領域(I)と非接触領域(II)に分けて求め、両領域に対する解を上添字 $j=I, II$ によって区別して表すと下記ようになる。

$$Z_i^{(j)}(z, \theta, t) = \sum_{m=0}^3 \bar{Z}_{im}^{(j)}(z, t) \Theta_{im}(\theta) \quad (i=1 \sim 8; j=I, II) \dots \dots (26)$$

ここで

$$\Theta_{im}(\theta) = \begin{cases} \cos m\theta & (i=1, 3, 4; 5, 7, 8) \\ \sin m\theta & (i=2, 6) \end{cases} \dots (27)$$

であり、また

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{11}^{(I)}(z, t) &= \sum_{k=1}^8 \gamma_{1k}(t) X_{i1k}(z) + \dot{A}_1(t) Y_{i1}^{(I)}(z) \\ &\quad + \dot{f}(t) Y_{i1}^{(I)}(z) + A_1(t) A_0(t) Y_{i1}^{(I)}(z) \\ &\quad + A_1(t) A_2(t) Y_{i1}^{(I)}(z) \\ \bar{Z}_{10}^{(I)}(z, t) &= \sum_{k=1}^4 \gamma_{0k}(t) X_{i0k}(z) + Y_{i0}^{(I)}(z) \\ &\quad + \dot{A}_0(t) Y_{i0}^{(I)}(z) + A_1^2(t) Y_{i0}^{(I)}(z) \\ &\quad + \dot{G}(t) Y_{i0}^{(I)}(z) \\ \bar{Z}_{12}^{(I)}(z, t) &= \sum_{k=1}^8 \gamma_{2k}(t) X_{i2k}(z) \\ &\quad + \dot{A}_2(t) Y_{i2}^{(I)}(z) + A_1^2(t) Y_{i2}^{(I)}(z) \\ \bar{Z}_{13}^{(I)}(z, t) &= \sum_{k=1}^8 \gamma_{3k}(t) X_{i3k}(z) \\ &\quad + \dot{A}_3(t) Y_{i3}^{(I)}(z) + A_1(t) A_2(t) Y_{i3}^{(I)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq z \leq h + \eta|_{r=1}) \dots \dots (28)$$

$$\bar{Z}_{im}^{(II)}(z, t) = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \gamma_{m, k+\bar{k}}(t) X_{imk}(z) \quad (m=0 \sim 3) \\ (h + \eta|_{r=1} \leq z \leq l) \dots \dots (29)$$

式(29)において、

$$\bar{k} = 4 \quad (m=0), \quad \bar{k} = 8 \quad (m \geq 1) \dots \dots (30)$$

である。領域(I)における解を表す式(28)の各式の右辺第1項と領域(II)における解を表す式(29)は、式(20)の右辺を零とおいた斉次方程式の一般解であり、式(28)の各式の右辺第2項以下は、式(20)の非斉次項である圧力項に対する特解になっている。 $X_{imk}(z), Y_{im}^{(j)}(z)$ はそれぞれ斉次方程式の一般解および圧力に対する特解を表す関数系である。特解 $Y_{im}^{(j)}(z)$ は次のようにして求める：すなわち、圧力項〔式(22)〕が $\cosh(\lambda z)$ あるいは z の多項式の形の項から成るので、 u, v, w の特解を前者の圧力項に対してはそれぞれ $\sinh(\lambda z), \cosh(\lambda z), \cosh(\lambda z)$ に比例した形に、後者の圧力項に対しては適当な次数の z の多項式において、未定係数を決定すればよい。なお、斉次方程式の一般解については、特性方程式が周方向波数 $m=0$ の変形に対しては2組の共役複素根を、 $m=1$ に対しては四重根0と2組の共役複素根を、 $m \geq 2$ に対しては4組の共役複素根を有する⁽⁷⁾ことに注意して、特性根の個数 $\bar{k}$ を式(30)のように定義した。 $\gamma_{mk}(t) (k=1 \sim 2\bar{k})$ は斉次方程式の一般解における未定常数に相当し、 $k=1 \sim \bar{k}$ は領域(I)での解〔式(28)〕に、 $k=\bar{k}+1 \sim 2\bar{k}$ は領域(II)での解〔式(29)〕に割り当てられている。

以下、 $\gamma_{mk}(t)$ を端末条件と領域(I), (II)間の解の連続条件：

$$Z_i^{(I)}|_{z=0} = 0 \quad (i=1 \sim 4) \dots \dots (31)$$

$$Z_i^{(I)}|_{z=l} = 0 \quad (i=5 \sim 8) \dots \dots (32)$$

$$Z_i^{(I)}|_{z=h+\eta(1,\theta,t)} = Z_i^{(II)}|_{z=h+\eta(1,\theta,t)}$$

$$(i=1\sim 8)\cdots\cdots(33)$$

を用いて定める。まず、連続条件〔式(33)〕が液位 η を含むので、領域 (I) での解〔式(28)〕中の速度ポテンシャルに関する変数 $A_m, \dot{A}_m$ を式(14)を用いて液位に関する変数 $C_m, \dot{C}_m$ で表す。そして、領域 (I) での解 $Z_i^{(j)}(z, \theta, t)$ 〔式(26)〕を $\Theta_{im}(\theta)$ ($m=0\sim 3$) について整理すれば、各周方向波数成分は次のような液位変数 $C_m, \dot{C}_m$ の関数:

$$\Theta_{i1}(\theta): C_1, \dot{C}_1, C_1^3, C_1 \dot{C}_1^2, C_1 C_0, \dot{C}_1 \dot{C}_0,$$

$$C_1 C_2, \dot{C}_1 \dot{C}_2$$

$$\Theta_{i0}(\theta): 1, C_0, C_1^2, \dot{C}_1^2$$

$$\Theta_{i2}(\theta): C_2, C_1^2, \dot{C}_1^2$$

$$\Theta_{i3}(\theta): C_3, C_1^3, C_1 \dot{C}_1^2, C_1 C_2, \dot{C}_1 \dot{C}_2$$

の一次結合によって形成されていることがわかる。これらは、圧力を液位に関する変数 $C_m, \dot{C}_m$ で表したときの各周方向波数成分を形成する関数形である〔既報⁽³⁾式(33)~(35)参照〕。それゆえ、式(28), (29)中の未定時間関数 $\gamma_{mk}(t)$ は下記の形をとる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1k}(t) &= \gamma_{1k}^{(1)} C_1 + \gamma_{1k}^{(2)} \dot{C}_1 + \gamma_{1k}^{(3)} C_1^3 \\ &\quad + \gamma_{1k}^{(4)} C_1 \dot{C}_1^2 + \gamma_{1k}^{(5)} C_1 C_0 + \gamma_{1k}^{(6)} \dot{C}_1 \dot{C}_0 \\ &\quad + \gamma_{1k}^{(7)} C_1 C_2 + \gamma_{1k}^{(8)} \dot{C}_1 \dot{C}_2 \\ \gamma_{0k}(t) &= \gamma_{0k}^{(0)} + \gamma_{0k}^{(1)} C_0 + \gamma_{0k}^{(2)} C_1^2 + \gamma_{0k}^{(3)} \dot{C}_1^2 \\ \gamma_{2k}(t) &= \gamma_{2k}^{(1)} C_2 + \gamma_{2k}^{(2)} C_1^2 + \gamma_{2k}^{(3)} \dot{C}_1^2 \\ \gamma_{3k}(t) &= \gamma_{3k}^{(1)} C_3 + \gamma_{3k}^{(2)} C_1^3 + \gamma_{3k}^{(3)} C_1 \dot{C}_1^2 \\ &\quad + \gamma_{3k}^{(4)} C_1 C_2 + \gamma_{3k}^{(5)} \dot{C}_1 \dot{C}_2 \end{aligned} \right\} \cdots (34)$$

$$(k=1\sim 2\bar{k})$$

ここで、 $\gamma_{mk}^{(j)}$ は未知の複素定数である。式(26)に式(34)を代入し、端末条件〔式(31), (32)〕および連続条件〔式(33)〕を課す。式(33)の計算に際しては、 $z=h+\eta|_{r=1}$ での各量の値を $z=h$ のまわりのテイラー展開式によって評価する。例えば、

$$\begin{aligned} Y_{i1}^{(j)}(h+\eta|_{r=1}) &= Y_{i1}^{(j)}(h) + Y_{i1}^{(j)'}(h)\eta|_{r=1} \\ &\quad + Y_{i1}^{(j)''}(h)\eta^2|_{r=1}/2 + O(\epsilon^{3/3}) \cdots \cdots (35) \end{aligned}$$

のように近似し、液位 η のモード展開式(10)を代入する。このとき、式(16)に留意して $Z_i^{(j)}(z, \theta, t)$ ($j=I, II$) が液位変数 $C_m, \dot{C}_m$ の三次微小量 $O(\epsilon^{3/3})$ までを保存するような省略近似を行う。このような近似は、式(28), (29)中の関数 $X_{imk}(z), Y_{imk}(z)$ が $z=h$ と $z=h+\eta|_{r=1}$ の間でゆるやかに変化する関数であるから有効である。以上に基づき式(31)~(33)を計算した後、 t と θ の関数:

$$C_1 \Theta_{i1}, \dot{C}_1 \Theta_{i1}, C_1^3 \Theta_{i1}, C_1^3 \Theta_{i3},$$

$$C_1 \dot{C}_1^2 \Theta_{i1}, C_1 \dot{C}_1^2 \Theta_{i3}, C_1 C_0 \Theta_{i1},$$

$$\dot{C}_1 \dot{C}_0 \Theta_{i1}, C_1 C_2 \Theta_{i1}, C_1 C_2 \Theta_{i3},$$

$$\dot{C}_1 \dot{C}_2 \Theta_{i1}, \dot{C}_1 \dot{C}_2 \Theta_{i3}, C_3 \Theta_{i3},$$

$$C_2 \Theta_{i2}, C_1^2 \Theta_{i2}, \dot{C}_1^2 \Theta_{i2}, \Theta_{i0},$$

$$C_0 \Theta_{i0}, C_1^3 \Theta_{i0}, \dot{C}_1^3 \Theta_{i0}$$

について整理すれば、未定複素定数 $\gamma_{mk}^{(j)}$ に関する一次方程式系 (次元数 288) が下記のように得られる。

$$[A]\{\gamma\} = \{b\} \cdots \cdots (36)$$

ここで、列ベクトル $\{\gamma\}$ の第 1~144 行成分は、

$$\gamma_{1k}^{(1)}, \gamma_{1k}^{(2)}, \gamma_{1k}^{(3)}, \gamma_{1k}^{(4)}, \gamma_{1k}^{(5)}, \gamma_{1k}^{(6)}, \gamma_{1k}^{(7)}, \gamma_{1k}^{(8)},$$

$$\gamma_{1k}^{(9)}, \gamma_{1k}^{(10)}, \gamma_{1k}^{(11)}, \gamma_{1k}^{(12)}, \gamma_{1k}^{(13)}, \gamma_{1k}^{(14)}, \gamma_{1k}^{(15)}, \gamma_{1k}^{(16)}$$

の $k=1\sim 8$ の部分および

$$\gamma_{0k}^{(0)}, \gamma_{0k}^{(1)}, \gamma_{0k}^{(2)}, \gamma_{0k}^{(3)}$$

の $k=1\sim 4$ の部分を上記の順に並べたものであり、 $\{\gamma\}$ の第 145~288 行成分は $\gamma_{1k}^{(1)}\sim\gamma_{1k}^{(16)}$ の $k=9\sim 16$ の部分および $\gamma_{0k}^{(0)}\sim\gamma_{0k}^{(3)}$ の $k=5\sim 8$ の部分を上記の順に並べたものである。正方行列 $[A]$ と列ベクトル $\{b\}$ の各要素を付録に示す。これらは、式(36)の第 1~72 行, 73~144 行, 145~288 行をそれぞれ式(31)~(33)に対応させることによって得られる。

式(36)を解いて定数 $\gamma_{mk}^{(j)}$ を求め、これらを式(34)に代入することにより $\gamma_{mk}(t)$ を定めれば、側壁変形解〔式(28), (29)〕が液位に関する変数 $C_m, \dot{C}_m$ で表される。したがってこれらの式に、液位に関する非線形振動方程式系〔式(15)〕の解を代入することにより、側壁変形が求められる。

5. 非定常不規則応答

地震加速度 $\ddot{f}(t)$ を定常非白色性雑音 $n(t)$ が確定包絡関数 $e(t)$ により振幅変調される形の確率過程:

$$\ddot{f}(t) = e(t)n(t), \quad E[n(t)] = 0 \cdots \cdots (37)$$

によって模擬する。最初に、式(15)で記述される非線形系に対して既報⁽³⁾の非定常不規則応答解析法を適用することによって、液位変数 $C_m, \dot{C}_m$ ($m=0\sim 3$) に関する一次、二次および三次モーメント〔既報⁽³⁾式(43)~(46)〕の時間変動が求められる。次に、側壁変形解は $C_m, \dot{C}_m$ で表されているので、側壁変形の非定常不規則応答は、液位のモーメントの値を用いて算定される。ただし、液面近傍 $z \cong h$ で支配的となる側壁たわみ w や周方向応力 σ_θ の応答を求めることは、 z が領域 (I), (II) のいずれに属するかに応じて式(28), (29)を使い分ける際に、領域境界 $z=h+\eta|_{r=1}$ が時間とともに不規則に変動することを考慮しなければならないので、極めて困難となる。そこで本研究では、固定端 $z=0$ での軸方向応力 σ_z の応答に着目する。

以下に示す計算例では、下記の諸元を有する LNG 用アルミニウム合金製円筒貯槽を採用する。

$$a=30 \text{ m}, l=40 \text{ m}, h=20 \text{ m}, h_s=2 \text{ cm},$$

$$\rho_f=471 \text{ kg/m}^3, \rho_s=2672 \text{ kg/m}^3,$$

$$E_s = 6.86 \times 10^{10} \text{ Pa}, \nu_s = 0.34$$

また、式(37)における定常白色性雑音 $n(t)$ の自己相関関数として次式を用いる。

$$E[n(t)n(t+\tau)] = R_0 e^{-\gamma|\tau|} \cos \rho\tau \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 ρ はスペクトルの卓越振動数、 γ はスペクトル帯域幅を規定する定数、 R_0 は $n(t)$ の二乗平均値である。さらに、振幅変調包絡関数 $e(t)$ として、単位階段関数および次式で表される指数包絡関数を用いる。

$$e(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{\max(e^{-at} - e^{-bt})} \dots\dots\dots (39)$$

計算に用いた指数包絡関数の具体的形状を図2に示す。

図3, 4にそれぞれ、単位階段包絡関数、指数包絡関数に対する壁面液位と側壁固定端の軸方向応力（側壁外表面での値）の非定常不規則応答を示す。指数包絡関数を用いた計算例では、比較的小さい加速度入力下で微小減衰系の振動が長時間持続する場合を想定している。 $E[\]$ は平均応答を、 $SD[\]$ は標準偏差応答を表す。液位 η については、非線形解（実線）と線形解（破線）を、応力 σ_z については、直接法による非線形解（実線）、ガレルキン法による非線形解（一点鎖線）、線形解（破線）を示す。線形解では平均応答は常に零で

図2 指数包絡関数 ($a=0.01\omega_1$, $b=0.2\omega_1$)

図3 単位階段包絡関数に対する非定常不規則応答
($\sqrt{R_0} = 50 \text{ gal}$, $\rho = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2}$, $\gamma = 0.1\omega_1$, $\zeta_1 = 0.01$)

あるが、非線形解では平均応答が生ずる⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。地震入力の卓越振動数 ρ が基本次の液面減衰固有振動数 $\omega_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2}$ に一致する共振状態では、壁面液位が有限振幅に成長し〔図3(a), 4(a)〕, 側壁に対する液圧作用域 $0 \leq z \leq h + \eta|_{r=a}$ が大きく変動する。このため、 σ_z の非線形解には、直接法、ガレルキン法いずれの解法によってもそれぞれ式(19), (35)のテイラー級数近似に起因する誤差は避けられない。しかし、両解析手法による σ_z の計算結果は、図3(b), 4(b)に示すようにおおむね一致する。したがって、前報までに適用してきたガレルキン法による非線形解析は有効と考えられる。

6. 結 言

弾性円筒貯槽が水平方向に長周期地震に対応する振幅変調非白色性励振を受ける場合について、有限振幅液面揺動による側壁変形を平衡方程式を直接解く方法によって解析し、ガレルキン法による解析結果と比較検討した。両者は、液位振幅がかなり大きい場合でも比較的良好に一致する。したがって、前報におけるガレルキン法による側壁変形解析が有効であることが明らかになった。

付 録

一次方程式〔式(36)〕の係数行列 $[A]$ の各要素 a_{ij} と右辺の列ベクトル $\{b\}$ の各要素 b_j は以下のとおりである。

a_{ij} :

図4 指数包絡関数に対する非定常不規則応答
($\sqrt{R_0} = 20 \text{ gal}$, $\rho = \omega_1 \sqrt{1 - \zeta_1^2}$, $\gamma = 0.1\omega_1$, $\zeta_1 = 0.001$)

$z=0$ における端末条件〔式(31)〕より,

$i=1\sim 4, k=1\sim 8$ として;

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= X_{i1k}(0), & a_{4+i,8+k} &= X_{i1k}(0) \\ a_{8+i,16+k} &= X_{i1k}(0), & a_{12+i,24+k} &= X_{i3k}(0) \\ a_{16+i,32+k} &= X_{i1k}(0), & a_{20+i,40+k} &= X_{i3k}(0) \\ a_{24+i,48+k} &= X_{i1k}(0), & a_{28+i,56+k} &= X_{i1k}(0) \\ a_{32+i,64+k} &= X_{i1k}(0), & a_{36+i,72+k} &= X_{i3k}(0) \\ a_{40+i,80+k} &= X_{i1k}(0), & a_{44+i,88+k} &= X_{i3k}(0) \\ a_{48+i,96+k} &= X_{i3k}(0), & a_{52+i,104+k} &= X_{i2k}(0) \\ a_{56+i,112+k} &= X_{i2k}(0), & a_{60+i,120+k} &= X_{i2k}(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$i=1\sim 2, k=1\sim 4$ として;

$$\left. \begin{aligned} a_{64+i,128+k} &= X_{i0k}(0), & a_{66+i,132+k} &= X_{i0k}(0) \\ a_{68+i,136+k} &= X_{i0k}(0), & a_{70+i,140+k} &= X_{i0k}(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

$z=l$ における端末条件〔式(32)〕より,

$i=1\sim 4, k=1\sim 8$ として;

$$\left. \begin{aligned} a_{72+i,144+k} &= X_{i+4,1k}(l), & a_{76+i,152+k} &= X_{i+4,1k}(l) \\ a_{80+i,160+k} &= X_{i+4,1k}(l), & a_{84+i,168+k} &= X_{i+4,3k}(l) \\ a_{88+i,176+k} &= X_{i+4,1k}(l), & a_{92+i,184+k} &= X_{i+4,3k}(l) \\ a_{96+i,192+k} &= X_{i+4,1k}(l), & a_{100+i,200+k} &= X_{i+4,1k}(l) \\ a_{104+i,208+k} &= X_{i+4,1k}(l), & a_{108+i,216+k} &= X_{i+4,3k}(l) \\ a_{112+i,224+k} &= X_{i+4,1k}(l), & a_{116+i,232+k} &= X_{i+4,3k}(l) \\ a_{120+i,240+k} &= X_{i+4,3k}(l), & a_{124+i,248+k} &= X_{i+4,2k}(l) \\ a_{128+i,256+k} &= X_{i+4,2k}(l), & a_{132+i,264+k} &= X_{i+4,2k}(l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

$i=1\sim 2, k=1\sim 4$ として;

$$\left. \begin{aligned} a_{136+i,272+k} &= X_{i+2,0k}(l), & a_{138+i,276+k} &= X_{i+2,0k}(l) \\ a_{140+i,280+k} &= X_{i+2,0k}(l), & a_{142+i,284+k} &= X_{i+2,0k}(l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

$z=h+\eta|_{\tau=1}$ における連続条件〔式(33)〕より,

$i=1\sim 8$ として;

$$\left. \begin{aligned} a_{144+i,k} &= X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8) \\ a_{144+i,128+k} &= \beta_{1i}\mu_1 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \\ a_{152+i,8+k} &= X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8) \\ a_{160+i,k} &= \beta_{2i}\mu_1^2 X'_{i1k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8) \\ a_{160+i,16+k} &= X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8) \\ a_{160+i,112+k} &= \mu_1 X'_{i2k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8) \\ a_{160+i,128+k} &= \beta_{3i}\mu_1^3 X'_{i0k}(h)/6 \quad (k=1\sim 4) \\ a_{160+i,136+k} &= \beta_{1i}\mu_1 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \\ a_{168+i,k} &= \mu_1^2 X''_{i1k}(h)/8 \quad (k=1\sim 8) \\ a_{168+i,24+k} &= X_{i3k}(h) \quad (k=1\sim 8) \\ a_{168+i,112+k} &= \mu_1 X'_{i2k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8) \\ a_{168+i,128+k} &= \beta_{4i}\mu_1^3 X'_{i0k}(h)/6 \quad (k=1\sim 4) \\ a_{176+i,32+k} &= X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8) \end{aligned} \right\}$$

$$a_{176+i,120+k} = \mu_1 X'_{i2k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{176+i,140+k} = \beta_{1i}\mu_1 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{184+i,40+k} = X_{i3k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{184+i,120+k} = \mu_1 X'_{i2k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{192+i,k} = \mu_0 X'_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{192+i,48+k} = X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{192+i,128+k} = \beta_{1i}\mu_1\mu_0 X''_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{192+i,132+k} = \beta_{1i}\mu_1 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{200+i,56+k} = X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{208+i,k} = \beta_{5i}\mu_2 X'_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{208+i,64+k} = X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{208+i,104+k} = \mu_1 X'_{i2k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{208+i,128+k} = \beta_{6i}\mu_1\mu_2 X''_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{216+i,k} = \mu_2 X'_{i1k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{216+i,72+k} = X_{i3k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{216+i,104+k} = \mu_1 X'_{i2k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{216+i,128+k} = \beta_{6i}\mu_1\mu_2 X''_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{224+i,80+k} = X_{i1k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{232+i,88+k} = X_{i3k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{240+i,96+k} = X_{i3k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{240+i,128+k} = \beta_{1i}\mu_3 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{248+i,104+k} = X_{i2k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{248+i,128+k} = \beta_{1i}\mu_2 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{256+i,k} = \mu_1 X'_{i1k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{256+i,112+k} = X_{i2k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

$$a_{256+i,128+k} = \beta_{6i}\mu_1^2 X''_{i0k}(h)/2 \quad (k=1\sim 4)$$

$$a_{264+i,120+k} = X_{i2k}(h) \quad (k=1\sim 8)$$

..... (44)

$i=1\sim 4$ として;

$$\left. \begin{aligned} a_{272+i,128+k} &= X_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \\ a_{276+i,128+k} &= \mu_0 X'_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \\ a_{276+i,132+k} &= X_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \\ a_{280+i,k} &= \mu_1 X'_{i1k}(h)/2 \quad (k=1\sim 8) \\ a_{280+i,128+k} &= \mu_1^2 X''_{i0k}(h)/4 \quad (k=1\sim 4) \\ a_{280+i,136+k} &= X_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \\ a_{284+i,140+k} &= X_{i0k}(h) \quad (k=1\sim 4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

そして,

$$a_{144+j,144+k} = -a_{144+j,k} \quad (j, k=1\sim 144) \dots\dots\dots (46)$$

上記以外の a_{jk} はすべて零.

b_i :

$z=0$ における端末条件〔式(31)〕より,

$i=1\sim 4$ として;

$$\left. \begin{aligned} b_i &= Y_{i1}^{(1)}(0)/\psi_1 \\ b_{4+i} &= S_1 Y_{i1}^{(1)}(0) - Y_{i1}^{(2)}(0) \\ b_{8+i} &= -H^{(2)} Y_{i1}^{(1)}(0) \\ b_{12+i} &= -H^{(32)} Y_{i1}^{(1)}(0) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 b_{16+i} &= (-1/\phi_1^2) \{ (H^{(1)} - H_0^{(11)} H_0^{(23)})/\phi_0 \\
 &\quad - H_2^{(11)} H_2^{(23)}/\phi_2 \} Y_1^{(1)}(0) - H_0^{(23)} \\
 &\quad \times Y_1^{(3)}(0)/\phi_0 - H_2^{(23)} Y_1^{(4)}(0)/\phi_2 \} \\
 b_{20+i} &= (-1/\phi_1^2) \{ (H^{(31)} - H^{(41)} H_2^{(23)})/\phi_2 \\
 &\quad \times Y_1^{(3)}(0) - H_2^{(23)} Y_1^{(2)}(0)/\phi_2 \} \\
 b_{24+i} &= -H_0^{(12)} Y_1^{(1)}(0) \\
 b_{28+i} &= -\{ H_0^{(11)} Y_1^{(1)}(0) + Y_1^{(3)}(0) \} / (\phi_1 \phi_0) \\
 b_{32+i} &= -H_2^{(12)} Y_1^{(1)}(0) \\
 b_{36+i} &= -H^{(42)} Y_1^{(1)}(0) \\
 b_{40+i} &= -\{ H_2^{(11)} Y_1^{(1)}(0) + Y_1^{(4)}(0) \} / (\phi_1 \phi_2) \\
 b_{44+i} &= -\{ H^{(41)} Y_1^{(1)}(0) + Y_1^{(2)}(0) \} / (\phi_1 \phi_2) \\
 b_{48+i} &= Y_1^{(1)}(0)/\phi_1 \\
 b_{52+i} &= Y_1^{(1)}(0)/\phi_1 \\
 b_{56+i} &= -H_2^{(22)} Y_1^{(1)}(0) \\
 b_{60+i} &= -\{ H_2^{(21)} Y_1^{(1)}(0) + Y_1^{(2)}(0) \} / \phi_1^2
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

$i=1\sim 2$ として;

$$\begin{aligned}
 b_{64+i} &= -Y_1^{(0)}(0) \\
 b_{68+i} &= Y_1^{(1)}(0)/\phi_1 \\
 b_{68+i} &= -H_0^{(22)} Y_1^{(1)}(0) - P^{(51)} Y_1^{(3)}(0) \\
 b_{70+i} &= -\{ H_0^{(21)} Y_1^{(1)}(0) + Y_1^{(2)}(0) \} / \phi_1^2 \\
 &\quad - P^{(52)} Y_1^{(3)}(0)
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

$z=l$ における端末条件 [式(32)] より,

$$b_j=0 \quad (j=73\sim 144) \tag{49}$$

$z=h+\eta|_{r=1}$ における連続条件 [式(33)] より,

$i=1\sim 8$ として;

$$\begin{aligned}
 b_{144+i} &= Y_1^{(1)}(h)/\phi_1 - \beta_{1i} \mu_1 Y_1^{(0)'}(h) \\
 b_{152+i} &= S_1 Y_1^{(1)}(h) - Y_1^{(2)}(h) \\
 b_{160+i} &= \beta_{2i} \mu_1^2 Y_1^{(1)'''}(h)/(2\phi_1) - H^{(2)} Y_1^{(1)}(h) \\
 &\quad - \beta_{3i} \mu_1^3 Y_1^{(0)'''}(h)/6 - \beta_{1i} \mu_1 H_0^{(22)} Y_1^{(1)'}(h) \\
 &\quad - \mu_1 H_2^{(22)} Y_1^{(1)'}(h)/2 - \beta_{1i} \mu_1 P^{(51)} Y_1^{(3)'}(h) \\
 b_{168+i} &= \mu_1^2 Y_1^{(1)'''}(h)/(8\phi_1) - H^{(32)} Y_1^{(1)}(h) \\
 &\quad - \beta_{4i} \mu_1^3 Y_1^{(0)'''}(h)/6 - \mu_1 H_2^{(22)} Y_1^{(1)'}(h)/2 \\
 b_{176+i} &= \{ -(H^{(1)} - H_0^{(11)} H_0^{(23)})/\phi_0 - H_2^{(11)} H_2^{(23)}/\phi_2 \} \\
 &\quad \times Y_1^{(1)}(h) - \beta_{1i} \phi_1^2 \mu_1 P^{(52)} Y_1^{(3)'}(h) \\
 &\quad + H_0^{(23)} Y_1^{(3)}(h)/\phi_0 + H_2^{(23)} Y_1^{(4)}(h)/\phi_2 \\
 &\quad - \beta_{1i} \mu_1 (H_0^{(21)} Y_1^{(1)'}(h) + Y_1^{(2)'}(h)) \\
 &\quad - \mu_1 (H_2^{(21)} Y_1^{(1)'}(h) + Y_1^{(2)'}(h))/2 / \phi_1^2 \\
 b_{184+i} &= \{ -(H^{(31)} - H^{(41)} H_2^{(23)})/\phi_2 \} Y_1^{(1)}(h) \\
 &\quad - \mu_1 (H_2^{(21)} Y_1^{(1)'}(h) + Y_1^{(2)'}(h))/2 \\
 &\quad + H_2^{(23)} Y_1^{(2)}(h)/\phi_2 / \phi_1^2 \\
 b_{192+i} &= \mu_0 Y_1^{(1)'}(h)/\phi_1 - H_0^{(12)} Y_1^{(1)}(h) \\
 &\quad + \beta_{1i} \{ \mu_1 Y_1^{(1)'}(h)/\phi_1 - \mu_1 \mu_0 Y_1^{(0)''}(h) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{200+i} &= -\{ H_0^{(11)} Y_1^{(1)}(h) + Y_1^{(3)}(h) \} / (\phi_1 \phi_0) \\
 b_{208+i} &= \beta_{5i} \mu_2 Y_1^{(1)'}(h)/\phi_1 - H_2^{(12)} Y_1^{(1)}(h) \\
 &\quad - \beta_{6i} \mu_1 \mu_2 Y_1^{(0)''}(h) + \mu_1 Y_1^{(1)'}(h)/(2\phi_1) \\
 b_{216+i} &= \{ \mu_2 Y_1^{(1)'}(h) + \mu_1 Y_1^{(1)'}(h) \} / (2\phi_1) \\
 &\quad - \beta_{6i} \mu_1 \mu_2 Y_1^{(0)''}(h) - H^{(42)} Y_1^{(1)}(h) \\
 b_{224+i} &= -\{ H_2^{(11)} Y_1^{(1)}(h) + Y_1^{(4)}(h) \} / (\phi_1 \phi_2) \\
 b_{232+i} &= -\{ H^{(41)} Y_1^{(1)}(h) + Y_1^{(2)}(h) \} / (\phi_1 \phi_2) \\
 b_{240+i} &= Y_1^{(3)}(h)/\phi_1 - \beta_{1i} \mu_3 Y_1^{(0)'}(h) \\
 b_{248+i} &= Y_1^{(1)'}(h)/\phi_1 - \beta_{1i} \mu_2 Y_1^{(0)''}(h) \\
 b_{256+i} &= \mu_1 Y_1^{(1)'}(h)/(2\phi_1) \\
 &\quad - \beta_{6i} \mu_1^2 Y_1^{(0)''}(h)/2 - H_2^{(22)} Y_1^{(1)}(h) \\
 b_{264+i} &= -\{ H_2^{(21)} Y_1^{(1)}(h) + Y_1^{(2)}(h) \} / \phi_1^2
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

$i=1\sim 4$ として;

$$\begin{aligned}
 b_{272+i} &= -Y_1^{(0)}(h) \\
 b_{276+i} &= Y_1^{(1)}(h)/\phi_1 - \mu_0 Y_1^{(0)'}(h) \\
 b_{280+i} &= \mu_1 Y_1^{(1)'}(h)/(2\phi_1) - \mu_1^2 Y_1^{(0)''}(h)/4 \\
 &\quad - H_0^{(22)} Y_1^{(1)}(h) - P^{(51)} Y_1^{(3)}(h) \\
 b_{284+i} &= -\{ H_0^{(21)} Y_1^{(1)}(h) + Y_1^{(2)}(h) \} / \phi_1^2 \\
 &\quad - P^{(52)} Y_1^{(3)}(h)
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

ただし、軸対称成分 Θ_{10} , $C_0\Theta_{10}$, $C_1^2\Theta_{10}$, $\hat{C}_1^2\Theta_{10}$ について整理することによって得られる式(41), (43), (45), (48), (51)では、自動的に満足されている u, v, T_z, S_z に関する条件式を除き, w, w_z, Q_z, M_z を順に $i=1\sim 4$ に対応させている。式(44), (50)中の $\beta_{1i}\sim\beta_{6i}$ は次式によって定義される定数である。

$$\begin{aligned}
 &\{\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, \beta_{5i}, \beta_{6i}\} \\
 &= \begin{cases} \{1, 3/4, 3/4, 1/4, 1/2, 1/2\} & (i \neq 2, 6) \\ \{0, 1/4, 0, 0, -1/2, 0\} & (i = 2, 6) \end{cases}
 \end{aligned}$$

このようなパラメータは、式(24)の v と S_z のみが θ について他と異なる関数形をとるために現れる。また、式(44), (45), (50), (51)では、領域(I)と(II)の境界 $z=h+\eta|_{r=1}$ の θ 依存性により、異なる周方向波数成分間に非線形連成が生じている。

文 献

- (1) 坂田・ほか2名, 機論, 49-442, C (昭58), 963.
- (2) 内海・ほか2名, 機論, 49-446, C (昭58), 1670.
- (3) 坂田・ほか2名, 機論, 50-458, C (昭59), 2004.
- (4) 内海・ほか2名, 機論, 52-473, C (昭61), 279.
- (5) Mizoguchi, K., Bull. Univ. Osaka Pref., Ser. A, 14-2 (昭40), 1.
- (6) 木村・大橋, 機論, 44-385, C (昭53), 3024.
- (7) 古賀, 機論, 43-375, C (昭52), 4029.

討 論

〔質問〕 藤田 勝久〔三菱重工業㈱高砂研究所〕
非常に複雑な解析をされていることに敬意を表す。

(1) 確定論的にご提案の両解法を比較した場合はどうなるとお考えか。

(2) 図3, 4において η についての両解法の差はどうか。

(3) 液面揺動の非常に大きい場合の円筒容器の液圧荷重作用範囲の非対称による円筒の非対称ゆがみはどうか。座屈問題にこのような点が関係するののかどうかについて知見が得られているのなら伺いたい。

(4) 円筒の慣性項を無視しながら、準静的たわみを空円筒の振動モード合成で近似する時の精度上の矛盾はないのか。

(5) 式(19), (35)のいずれにも級数近似の誤差がある。実験結果との比較による考察がさらに必要とも考えられる。この点についてはどうか。

〔回答〕 (1) 確定入力に対する数値計算は行っていないが、本質的には確率論的入力に対する応答解析と同等であるから、両解法の精度は同程度と考えられる。

(2) 本論文では、有限振幅の液面揺動圧によって生ずる側壁の変形を、側壁の平衡方程式の直接解法による計算結果とガレルキン法による計算結果の両者について比較している。両解法に対して、側壁に作用する圧力とその作用領域を決定する液位を求めるための液体運動の非線形解析の方法は同一である。したがって、図3, 4中壁面液位 $\eta|_{(r,\theta)=(a,0)}$ の応答は両解析法に対して共通である。

(3) ご指摘の問題に答えるためにはまず、側壁たわみ w の (z, θ) 分布を求めなくてはならないと考えるが、現在のところこの計算を行っていない。また、側壁の座屈問題についても、耐震設計上非常に重要な問題であると考えているが、現段階では具体的検討を行っていない。

(4) 空貯槽(円筒殻)の自由振動モード〔式(18)中 $U_{mp}(z), V_{mp}(z), W_{mp}(z)$ 〕は、端末条件を満足し、平衡方程式の定義域 $0 \leq z \leq l$ で直交性：

$$\int_0^l \{U_{mp}(z)U_{mq}(z) + V_{mp}(z)V_{mq}(z) + W_{mp}(z)W_{mq}(z)\} dz = 0 \quad (p \neq q)$$

を有するので、任意の形状を有する変形をフーリエ展開表示する際の基底関数として採用することができる。また、円筒殻の慣性力を考慮して導かれた振

動方程式〔既報⁽³⁾式(33)~(35)〕を用いてガレルキン法により側壁変形解を求めた結果が、振動方程式中の慣性力項を省略した準静的変形解析の結果とほぼ完全に一致することを確認している。

(5) ご指摘のとおり実験による検証が必要と考えられる。また、確定論の範囲であれば、テイラー級数近似式(19), (35)を必要としない方法でより精密な解を求めることができるので、この解法による解析結果と、今までに提案した両解法による確定論的解析結果とを比較することにより、理論的検証を行うことができると考えている。なお、解析結果の実験的検証については、現在研究中で、一部の成果を発表している(付1)。

〔質問〕 柴田 碧〔東京大学生産技術研究所〕
スライドで示された応答計算の中で高次モーメントを三次までとっておられるが、これで必要十分なのか。力学的性質を考えると四次まで考える必要はないか。

〔回答〕 5章の非定常不規則応答解析では、入力を平均値零のガウス過程と仮定して、式(16)に基づき四次微小量 $O(\epsilon^{4/3})$ までを保存した解を得るために、下記の5種類のモーメントに関するモーメント方程式系を解いている⁽³⁾。

$$\begin{aligned} E[C_1 C_1^T] &\sim O(\epsilon^{2/3}) \quad \dots\dots\dots (i) \\ E[C_2] &\sim O(\epsilon^{2/3}) \quad \dots\dots\dots (ii) \\ E[C_2 C_2^T] &\sim O(\epsilon^{4/3}) \quad \dots\dots\dots (iii) \\ E[C_1 C_3^T] &\sim O(\epsilon^{4/3}) \quad \dots\dots\dots (iv) \\ E[C_1^2 C_2^T], E[C_1 C_1 C_2], E[\dot{C}_1^2 C_2] &\sim O(\epsilon^{4/3}) \quad \dots\dots\dots (v) \end{aligned}$$

ここで、 $C_m (m=1 \sim 3)$ は、非線形振動方程式系(15)中の変数を下記のように状態ベクトル表示したものである。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \{C_1, \dot{C}_1\}^T \\ C_2 &= \{C_0, \dot{C}_0, C_2, \dot{C}_2\}^T \\ C_3 &= \{C_3, \dot{C}_3\}^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (vi)$$

式(i)~(v)の中にはご指摘のように四次モーメントが現れていないが、 $O(\epsilon^{4/3})$ までの打ち切り近似の範囲で現れる基本モード C_1 に関する四次モーメント：

$$\begin{aligned} E[C_1^4], E[C_1^3 \dot{C}_1], E[C_1^2 \dot{C}_1^2], \\ E[C_1 C_1^3], E[\dot{C}_1^4] &\sim O(\epsilon^{4/3}) \quad \dots\dots\dots (vii) \end{aligned}$$

は、 C_1 のガウス性を仮定して⁽³⁾二次モーメント〔式(i)〕で次式のように表すことによって評価されている。

(付1) 坂田・ほか3名, 機論, 52-479, C (昭61), 1915.

$$\left. \begin{aligned} E[\dot{C}_1^4] &= 3(E[\dot{C}_1^2])^2 \\ E[\dot{C}_1^3 \dot{C}_1] &= 3E[\dot{C}_1^2]E[\dot{C}_1 \dot{C}_1] \\ E[\dot{C}_1^2 \dot{C}_1^2] &= E[\dot{C}_1^2]E[\dot{C}_1^2] + 2(E[\dot{C}_1 \dot{C}_1])^2 \\ E[\dot{C}_1 \dot{C}_1^3] &= 3E[\dot{C}_1 \dot{C}_1]E[\dot{C}_1^2] \\ E[\dot{C}_1^4] &= 3(E[\dot{C}_1^2])^2 \\ &\dots\dots\dots \text{(viii)} \end{aligned} \right\}$$

したがって、式(vii)に示されている四次モーメントは、
モーメント方程式中には陽な形では現れていない。