3形ウォームギヤの歯面修整法の研究*

(第1報, ホブ基礎ねじ面の計算法の解析)

岸 佐年**, 岡角宗晴***, 吉田 嘉太郎****

A Study of the Crowning Method for the Type 3 Worm Gear (1st Report, An Analysis of Calculation Method for the Basic Thread Surface of the Hob)

by Satoshi KISHI, Muneharu MOROZUMI, and Yoshitaroh YOSHIDA

A precise analysis has been made on the crowning method of the type 3 worm gear. Firstly the calculation method, which is used to find the amount of clearance between the thread surface of the worm and the modified tooth surface of the wheel in this crowning method, is obtained. This clearance is defined to be taken in the direction of the circumference of the wheel and is calculated along the characteristic curve between the thread surface of the worm and the wheel tooth surface. Then the design process for the hob, which cuts the modified wheel tooth surface so as to satisfy the given amount of clearance, is clarified by using this calculation method. Theories in this analysis are verified by applying the calculation method and the design process to numerical examples of the type 3 worm gear. This calculation method and the design process are easily practicable for manufacturing engineers.

Key Words: Gear, Type 3 Worm Gear, Crowning Method Analysis, Characteristic Curve, Hob Design

1. 緒 言

ウォームのねじ面とウォームホイールの歯面とは理論上では幾何学的に線接触をしてみあう。しかし実際の運転においては製品の工作誤差および組立誤差などにより理論通りのかみあいは行えず片当たりを生ずることがある。そこでホイールの歯面にわずかに膨らみをつけ片当たり現象を緩和する歯面修整法について、いくつかの研究が行われている^{(1)~(5)}。

本研究ではこれとは別にパソコンなどの小形電算機により現場技術者が容易に用いることのできる計算方式の確立を目的として、ウォームギヤとして最も多く用いられている3形ウォームギヤの場合について、ホイール歯面に膨らみをつける歯切り法に関する解析的研究を行い、ウォームのねじ面とホイール歯面との同時接触線に沿ってのホイール歯面の理論的膨らみ量を求める厳密な数値計算法を導き、さらに与えられたウォームの諸元に対して要求された膨らみ量を満足するホイールを切削するホブとホブ基礎ねじ面工作用紡錘形

工具との諸元を決定する数値計算法を明らかにする。
表1は本文に用いる主な記号である。

2. 解 析 理 論

2.1 3形ウォームのねじ面 いまウォームのねじ面またはホブの基礎ねじ面を JIS B 1723 に規定される3形ウォームと定め、図1に示すように x 軸がねじみぞの中央を通り z 軸がウォーム軸となる $o-xyz$

表 1 使用記号の説明

α	: pressure angle of worm at arbitrary radius in axial section
α_a	: pressure angle of worm at pitch radius in axial section
l	: lead of worm
n	: number of threads on worm
P	: pitch of worm ($=l/n$)
h	: reduced pitch of worm ($=l/2\pi$)
r_c	: pitch radius of worm
r	: arbitrary radius of worm
β_c	: lead angle of worm at pitch radius ($=\tan^{-1}(l/2\pi r_c)$)
Z	: number of teeth of wheel
k	: gear ratio ($=Z/n$)
R_c	: pitch radius of wheel ($=lZ/2\pi n=hk$)
R	: arbitrary radius of wheel
c	: center distance ($=r_c+R_c$)

* 昭和61年6月27日 北陸信越支部北陸地方(金沢)講演会において講演, 原稿受付 昭和60年12月23日。

** 正員, 長野工業高等専門学校 (〒380 長野市徳間716)。

*** 正員, 信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

**** 正員, (株)小金井製作所 (〒184 小金井市緑町3-11-28)。

座標系でこのねじ面を表すと次式となる⁽⁶⁾。ただし複号は図1に示したねじ面①, ②の順とする。

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= -\rho \sin \theta \sin \beta_c \\ &\mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c + h(\lambda + \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし

$$\tan \lambda = \frac{\rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c}{a - \rho \cos \theta} \dots\dots\dots (2)$$

ここで ρ はウォームを工作する紡錘形工具の任意半径, ρ_c は紡錘形工具のピッチ円半径, θ は工具面を表すための偏角, W は ρ_c における工具刃幅, α_c は工具圧力角, a はウォーム軸と工具軸との最短距離 (=

図1 ウォームとホイールとの座標系の関係

$r_c + \rho_c$) を示す。そしてこれらの各諸元とウォームの任意半径 r およびウォームの軸断面輪郭の半径 r における接線が x 軸となす角 α との間にはそれぞれ次式が成立し⁽⁶⁾、計算手順(I)により求めることができる。

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \pm \left[(a - r_c) \tan \alpha_c (r_c \tan \beta_c + a \cot \beta_c) - \left[\rho \sec^2 \alpha_c - \left(\frac{W}{2} \cot \alpha_c + \rho_c \right) \tan^2 \alpha_c \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \left[\rho \sec^2 \alpha_c - \left(\frac{W}{2} \cot \alpha_c + \rho_c \right) \tan^2 \alpha_c \right]^2 + \tan^2 \alpha_c (r_c \tan \beta_c + a \cot \beta_c)^2 - (a - r_c)^2 \right\}^{1/2} \right] \\ &\quad / \left\{ \left[\rho \sec^2 \alpha_c - \left(\frac{W}{2} \cot \alpha_c + \rho_c \right) \tan^2 \alpha_c \right]^2 + \tan^2 \alpha_c (r_c \tan \beta_c + a \cot \beta_c)^2 \right\} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \left[a \cos \theta + \sin \beta_c \left(\frac{W}{2} + \rho_c \tan \alpha_c \right) (\tan \alpha_c \sin \beta_c \pm \cos \beta_c \sin \theta) \right. \\ &\quad - \left. \left\{ r^2 [(\tan \alpha_c \sin \beta_c \pm \cos \beta_c \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta] - \left[\sin \beta_c \cos \theta \left(\frac{W}{2} + \rho_c \tan \alpha_c \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a(\tan \alpha_c \sin \beta_c \pm \cos \beta_c \sin \theta) \right]^2 \right\}^{1/2} \right] / [\cos^2 \theta + (\tan \alpha_c \sin \beta_c \pm \cos \beta_c \sin \theta)^2] \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \mp \frac{dz}{dx} = \mp \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dr} \\ &= \mp \left\{ r \cos^2 \alpha_c \sec^2 \theta [(a - r_c) \sin \theta \mp (a \cot \beta_c + r_c \tan \beta_c) \tan \alpha_c] \right. \\ &\quad \times [(\sin \theta \sin \beta_c \mp \tan \alpha_c \cos \beta_c)(a - \rho \cos \theta) - r_c \tan \beta_c (\tan \lambda \cos \theta + \sin \theta \cos \beta_c \\ &\quad \pm \tan \alpha_c \sin \beta_c) \cos^2 \lambda] + r \rho [\cos \theta \sin \beta_c (a - \rho \cos \theta) + r_c \tan \beta_c \cos \theta \cos^2 \lambda (\tan \lambda \tan \theta \\ &\quad - \cos \beta_c)] \left. \left\{ \left[(a - \rho \cos \theta) \cos \theta - \left\{ \rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c \right\} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times (\sin \theta \cos \beta_c \pm \tan \alpha_c \sin \beta_c) \left. \right\} \cos^2 \alpha_c \sec^2 \theta \right. \\ &\quad \times [(a - r_c) \sin \theta \mp (a \cot \beta_c + r_c \tan \beta_c) \tan \alpha_c] - (a - \rho \cos \theta) \rho \sin \theta \\ &\quad \left. - \left\{ \rho \sin \theta \cos \beta_c \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \sin \beta_c \right\} \rho \cos \theta \cos \beta_c \right\}^{-1} \times (a - \rho \cos \theta)^{-1} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ところで上記の計算手順(I)における工具刃幅 W の値に対して実際の工作現場では $W = (P/2) \cos \beta_c$ とすることが多く、この場合、工作された3形ウォームの軸断面ピッチ円筒におけるみぞ幅の値は $P/2$ よりわずかに小さく

なることが明らかにされている⁽⁶⁾。そこでウォームの軸断面ピッチ円筒におけるみぞ幅の値 $2|z_c|$ を与えて、このウォームを工作する工具の刃幅 W を求めるためにウォームの軸断面 (xz 平面) を考え、式(1)の z の式で $z=z_c$, $\theta=0$ として次式を得、これを用いて計算手順(II)により W の正しい値を求めることができる。

$$W=2[\mp(z_c+\rho \sin \theta \sin \beta_c-h \lambda) \sec \beta_c+(\rho-\rho_c) \tan \alpha_c] \cdots \cdots (6)$$

2・2 ホイールの歯面と同時接触線 さてウォームとホイールとのかみあいにおいて、式(1)で与えられたウォームのねじ面を正方向に回転角 ψ だけ回転運動させると、ウォーム自身は z 軸方向には移動しないから次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \psi) \\ y &= r \sin(\theta + \psi) \\ z &= -\rho \sin \theta \sin \beta_c \\ \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c + h(\lambda + \theta) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (7)$$

このときこのウォームにかみあうためにはホイールは図1に示すように負方向に ψ/k だけ回転する。そこで式(7)で表されるウォームねじ面をホイール側静止座標系 $o'-\xi_1\eta_1\zeta_1$ で表し、さらにホイールに固定の座標系 $o'-\xi_1\eta_1\zeta_1$ で表すと次式のようなねじ面群を得る。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= [c - r \cos(\theta + \psi)] \cos \frac{\psi}{k} - \left\{ -\rho \sin \theta \sin \beta_c \right. \\ &\quad \left. \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c \right. \\ &\quad \left. + h(\lambda + \theta) \right\} \sin \frac{\psi}{k} \\ \eta_1 &= [c - r \cos(\theta + \psi)] \sin \frac{\psi}{k} + \left\{ -\rho \sin \theta \sin \beta_c \right. \\ &\quad \left. \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c \right. \\ &\quad \left. + h(\lambda + \theta) \right\} \cos \frac{\psi}{k} \\ \zeta_1 &= r \sin(\theta + \psi) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (8)$$

そしてこのねじ面群の包絡面としてホイールの歯面が創成される。包絡面の条件式は式(8)に対して次のヤコビアンを計算して求めることができる⁽⁶⁾。

$$\begin{vmatrix} \partial \xi_1 / \partial r & \partial \xi_1 / \partial \theta & \partial \xi_1 / \partial \psi \\ \partial \eta_1 / \partial r & \partial \eta_1 / \partial \theta & \partial \eta_1 / \partial \psi \\ \partial \zeta_1 / \partial r & \partial \zeta_1 / \partial \theta & \partial \zeta_1 / \partial \psi \end{vmatrix} = 0$$

より次式を得る。

$$\begin{aligned} &r[r_c - r \cos(\theta + \psi)] + \left\{ -\rho \sin \theta \sin \beta_c \right. \\ &\quad \left. \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c + h(\lambda + \theta) \right\} \\ &\quad \times [h \sin(\theta + \psi) \pm r \tan \alpha \cos(\theta + \psi)] = 0 \end{aligned} \cdots \cdots (9)$$

いま $\theta + \psi = \gamma$ とおき、さらに次式をおく。

$$\left. \begin{aligned} A &= c - r \cos \gamma \\ B &= -\rho \sin \theta \sin \beta_c \\ &\quad \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c \\ &\quad + h(\lambda + \gamma - \psi) \end{aligned} \right\} \cdots (10)$$

そして式(9)、(10)からそれぞれ次式を得る。

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{r(r_c - r \cos \gamma)}{h \sin \gamma \pm r \tan \alpha \cos \gamma} - \rho \sin \theta \sin \beta_c \right. \\ &\quad \left. \mp \left[\frac{W}{2} - (\rho - \rho_c) \tan \alpha_c \right] \cos \beta_c \right\} + (\lambda + \gamma) \end{aligned} \cdots \cdots (11)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \{ (r_c \sec \gamma \pm B \tan \alpha) \\ &\quad + [(r_c \sec \gamma \pm B \tan \alpha)^2 + 4Bh \tan \gamma]^{1/2} \} \end{aligned} \cdots \cdots (12)$$

これら式(9)、(11)、(12)はウォームとホイールとの同時接触線の条件式でもある。そこで包絡されたホイールの歯面を式(8)を用いて次式で表す。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= R \cos \varphi \\ \eta_1 &= R \sin \varphi \\ \zeta_1 &= r \sin \gamma \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (13)$$

ただし

$$R^2 = A^2 + B^2 \cdots \cdots (14)$$

$$\tan \varphi = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{A \sin \frac{\psi}{k} + B \cos \frac{\psi}{k}}{A \cos \frac{\psi}{k} - B \sin \frac{\psi}{k}} \cdots \cdots (15)$$

そこでこのようにして包絡されたホイール歯面の任意の ξ_1 平面による軸直角断面輪郭を求めることを考え、式(13)の ξ_1 の式より次式を得る。

$$r = \sin^{-1}(\xi_1 / r) \cdots \cdots (16)$$

これらの式を用い、次に示す計算手順をホイールの歯

底半径 R_b から歯先半径 R_K まで繰り返して用いて、ホイールの軸直角断面輪郭を求めることができる。

次にウォームとホイールとの同時接触線を求めることを考える。この場合、ウォームとホイールとの相対的な回転位置関係に対応して同時接触線は無数に存在し得る。したがってウォームの回転角 ϕ の値を定めてやることにより同時接触線は一義的に定まる。そこでウォームのねじ面上の任意の点 $y = y(\xi_1 = \xi_1)$, $r = r$ を通る同時接触線を求めるためには、 $r = r$ に対して計算手順 (I) により $\rho, \Theta, \lambda, \alpha$ を求め、また式 (16) により γ を求め、これらを式 (11) に代入して ϕ を求めればよい。そしてこの ϕ を用いて次に示す計算手順をホイールの歯幅方向に繰り返して計算を行えば同時接触線を求めることができる。ホイールの歯幅方向の限界値 $\xi_{1\max}$ は歯幅の半分または $\xi_{1\max} = r_{cw} \times \tan 30^\circ$ とする考え方がある。

2.3 歯面修整法とその計算手順 前節まではウォームとホブとを識別せずに3形ウォームのねじ面として扱ってきた。ここからはウォームに関わるねじ面、紡錘形工具およびホイール歯面の各諸元に対して添字 w を、ホブに関わる同様な各諸元に対しては添字 h を付してそれぞれ識別して考える。

さてホイールの歯面修整法として、1形ウォームギヤの場合についてウォームの与えられた諸元 (l_w, α_{aw} など) に対して基礎ねじ面のリード l_h と軸断面圧力角 α_{ah} とをわずかに小さくしたホブを用いて歯切りする方法が提案されており⁽¹⁾⁽²⁾、この時のホイールのピッチ円筒上における膨らみ量を容易に正確に計算するための解析が行われている⁽³⁾。このようにして歯切りされたホイールとウォームとのかみあいにおいては、ホイールの中央平面付近で両者が接触し、ホイールの歯幅方向に遠ざかるにつれて両者にわずかにすき間が生じ片当たりの発生を防ぐことができる。そしてこの1形ウォームギヤの場合、ウォームとホブとの諸元の関係式として次式を与えている。

$$l_w \cos \alpha_{aw} = l_h \cos \alpha_{ah} \dots \dots \dots (17)$$

そこで上記のホイール歯面の修整法および式 (17) を本研究における3形ウォームギヤの場合についてもそのまま適用する。この適用の妥当性は後述の数値例に対する計算により明らかにされる。

いま式 (17) を満足するウォームとホブとの諸元 ($l_w, r_{cw}, \alpha_{aw}, l_h, r_{ch}, \alpha_{ah}$ など) がそれぞれ与えられているものとし、このウォームにより仮想的に創成されるホイールの歯面およびホブにより実際に創成されるホイールの歯面とを考える。そしてホイールの中央平面

内 ($\xi_1 = 0$) におけるピッチ点 ($r = r_{cw}$) を通るウォームねじ面と仮想ホイール歯面との同時接触線を考え、これに沿ってウォームと実際のホイールとがかみあわされた時に両者間に生ずるホイールの円周方向すき間を求めることを考える。この場合 $r = r_{cw}$, $\xi_1 = 0$ ($\gamma = 0$) を通る同時接触線を求めるには計算手順 (I) および式 (11) により $\phi = \phi_c$ を定める必要がある。そこでホイールの中央平面によるそれぞれのホイール歯面の断面輪郭の諸元を $R_{cw}, \varphi_{w0}, \varphi_{h0}$ などで表し、次に任意の値 $\xi_1 = \xi_1$ 平面によるそれぞれのホイール歯面の断面輪郭の諸元を $R_w, \varphi_w, \varphi_h$ などで表すと、これらの間の幾何学的関係をホイールの軸方向から見ると図2に示すようになる。そしてこれら仮想ホイール歯面と実際のホイール歯面とが中央平面内の $R = R_{cw}$ ($r = r_{cw}$) で接触した時、 $\xi_1 = \xi_1$ 平面内の $R = R_w$ の円周方向において両者に生ずるすき間 δ は次式を用いて、計算手順 (V) により求めることができる。

$$\delta = R_w [(\varphi_h - \varphi_{h0}) - (\varphi_w - \varphi_{w0})] \dots \dots \dots (18)$$

図2 ホイールの断面輪郭と同時接触線

そこでウォームの諸元を与えて、このウォームにより仮想的に創成されたホイール歯面とホブにより実際に創成されたホイール歯面とを中央平面内 ($\xi_1=0$) の $R=R_{cw}(r=r_{cw})$ で重ね合せ、この点を通る同時接触線に沿って $\xi_1=\xi_{1\max}$ 平面内の $R=R_w$ での円周方向すき間が所定の値 δ_0 となるようなホブとホブ基礎ねじ面工作用紡錘形工具との諸元を求めることを考える。これまでの理論展開を総合して、これらの各諸元を求める計算手順は次に示すようになる。なおこの場合、ウォームのねじ面およびホブの基礎ねじ面の軸断面ピッチ円筒におけるみぞ幅の値は、それぞれ $P_w/2$ 、 $P_h/2$ と定める。

3. 数值例

ール歯面との円周方向すき間を $\delta_0 = 0.055 \text{ mm}$ として計算手順(VI)によりウォームおよびホブに関わる各諸元の値を求めて表2に示す。この場合 $\rho_{cn} = 195 \text{ mm}$ とした。

次に仮想ホイール歯面と実際のホイール歯面との中央平面による断面輪郭を $\zeta_1=0$ として計算手順(III)により求め、両方の輪郭を、ピッチ点 ($R=R_{cw}$) で重ね

表 2 計算結果

() : indicates given dimensions

図3 中央断面輪郭同志の円周方向誤差

合せた時の円周方向の輪郭の差 Δ を求め図3に示す。図3より両者の差は数 μm の微小値であり、1形ウォームギヤの場合に提案された歯面修整法を本研究の3形ウォームギヤの場合にも適用したことの妥当性が裏付けられた。しかしこの場合、この数値例を同じ諸元の1形ウォームギヤと考えて本研究と同様な解析と数値計算とを行うと、 $l_h = 25.819 \text{ mm}$, $r_{ch} = 26.952 \text{ mm}$, $\alpha_{ah} = 19^\circ 10' 50''$ となり、これらは3形ウォームギヤの場合の計算結果とは異なってしまう。したがって1形ウォームギヤに対する解析理論をそのまま3形ウォームギヤに用いることはできず、3形ウォームギヤのための厳密な解析と数値計算との必要性が確認される。

次に、このようにして切削されたホイールとウォームとの歯当たりをみるために、計算手順(V)を用いて $\psi = \psi_c \pm 180^\circ$ の範囲で5種類の ψ の値に対する同時接触線に沿って、仮想ホイールと実際のホイールとの円周方向すき間 δ を求め、その結果を図4に μm 単位で示す。図4より $\psi = \psi_c$ に対する同時接触線に沿っては $\zeta_1 = 0$ で $\delta = 0$, $\zeta_1 = \zeta_{1\max}$ では $\delta = \delta_0 = 0.055 \text{ mm}$ となっており所定の値を満足していることがわかる。またこの場合、 $\zeta_1 = -\zeta_{1\max}$ では $\delta = 0.065 \text{ mm} > \delta_0$ となっている。そして種々の ψ の値に対する同時接触線に沿っても、ホイールの中央平面内で両者が接触したとき歯幅方向に遠ざかるにつれてすき間が増えてゆく傾向がよく表れており、実際のウォームとホイールとのかみあいにおいては良好な歯当たりを生ずることが考えられ、本研究の歯面修整法の目的を果たしていることがわかる。なおこの場合、ねじ面②の側でのバックラッシュは式(19)より $c_0 = 0.520 \text{ mm}$ であった。

4. 結 言

3形ウォームギヤのかみあいにおける片当たり現象を緩和するために、ホイールの歯面に膨らみをつける歯切り法について厳密な解析的研究を行い、膨らみの

図4 種々の同時接触線に沿った歯面の膨らみ量

ついた歯面を有するホイールを切削するためのホブとホブ基礎ねじ面工作用紡錘形工具との各諸元を求める数値計算法を明らかにした。そしてウォームの諸元と膨らみ量との数値例に対してこの計算法を適用してホブと紡錘形工具との各諸元を求め、さらにこのホブにより歯切りされたホイール歯面の膨らみ量が要求値を満足していることを確認して理論の検証を行った。

この解析ではこれまでの解析にはみられないウォームねじ面とホイール歯面との同時接触線に沿ってのホイール歯面の膨らみ量に注目しており、ウォームギヤの実際のかみあいに即した解析手法となっている。

なお数値例に対する計算結果により、この解析に用いたホイール歯面の修整法によれば良好な歯当たりを生ずるであろうことが予想され、また同じ諸元の1形ウォームギヤに対するホブとは数値的に異なることを明らかにし、3形ウォームギヤのための厳密な解析と数値計算との必要性が確認された。

本研究における数値計算法は現場技術者がそのまま実用できるように詳述されている。

文 献

- (1) 和栗・安東, 機論, 15-50 (昭24), IV-24.
- (2) 文献(1)のIV-28.
- (3) Yoshimoto, I., *Bull. T. I. T.*, Ser. B, 5 (1959), 47.
- (4) 下河辺・豊山・我妻, 精密機械, 46-3 (昭55), 367.
- (5) 下河辺・豊山・我妻, 精密機械, 46-11 (昭55), 1428.
- (6) 両角, ねじ解析理論とその応用, (昭60), 27, 産経出版社.