構造物の振動特性向上のための最適化解析

第1報 新しい固有モード感度解析手法の提案
と異なる解析手法の比較

萩原 一郎** 藤原 稔久** 永瀬 和夫***

Optimum Analysis for Structural Vibration Character

(First Report Proposition of a New Eigen Mode Sensitive Analysis and
Comparison between Some Different Methods)by Ichiro HAGIWARA by Toshihisa FUJIWARA
by Kazuo NAGABUCHI

The particular eigen modes of the body and the suspension of a vehicle have a great influence on vehicle compartment noise and idling vibrations etc. Therefore, it is desirable to develop the optimum method for effective control of these eigen modes and improvement of these phenomena.

The most effective analysis method to accomplish it is, in the broad sense, the mode sensitive analysis. A new method for mode sensitive analysis is proposed in this paper. By using some eigen vectors of the current structure as the initial value, we calculated some eigenpairs of the changed structure with this method, that is, the modified simultaneous iteration method. The inverse matrix of the current structure shortens the calculation time greatly, when applying this modified simultaneous iteration method. By using a 5-degrees of freedom vibration model and an FEM beam model, we compared it with the four existing methods and confirmed its effectiveness.

We also discovered some new characters of these existing methods.

Key Words: Vibration, Eigen Value, Eigen Mode, Sensitive Analysis, Optimum Analysis, Perturbation Method, Mode Control, FEM, Simultaneous Iteration Method

1. ま え が き

自動車車両を構成する車体やサスペンション等の特定の固有周波数モードは、不規則な路面を走行するときに車室内に発生する騒音や発進時のアイドル振動等の特性に大きく影響する。

そのため、最も効果的に単独のあるいは複数の固有振動モードを制御して、これらの現象を向上させる最適化検討が望まれる。

自動車業界では、近年、車両開発の基本構想段階で有限要素法を用いた最適化解析が適用されつつあるが^{(1),(2)}モード制御に関する最適化解析は、トラックの乗り心地向上検討に⁽³⁾用いられた。比較的単純なバネ・質点モデルで見られるだけである。自動車業界以外でも有限要素法を用いた同解析は、単純なトラス構造で見られる程度⁽⁴⁾のようである。

一般に最適化検討は、いわゆる構造解析等を行うアナライザ部と最適化計算を行うオブティマイザ部があ

ここでのアナライザ部としては、現在の振動状態を既知として部分的に構造変更をなしたあとの固有ベアを求める広義の感度解析法が有効である。その代表的な研究として次のようなものをあげることができる。

① Duncan⁽³⁾、長松⁽⁵⁾らは、全自由度 n に対し、下から m 個 ($m \ll n$) のモード・パラメータを求めておき、これと構造変更の情報とから、 m 自由度の小さな固有値問題に変換して、構造変更後の固有ベアを得ている。これは、摂動法 (Perturbation Method) とも称されている。

② Fox⁽⁶⁾らは、固有モードの感度係数を現構造の固有モードの重畳和として表現し、マス正規化とマス直交性の条件とから係数パラメータを決定している。ここでは、これをFOXの方法と称す。

③ 狭義の感度解析の方法では、固有モードの設計変更に対する変化分を求める際、特異方程式が得られる。ここでひとつの代表する自由度を拘束して、一般化逆行列を求めて、固有モード感度係数を求める方法^{(7),(8)}によって始めて可能となる。

* 昭和61年6月21日 東北支部秋田地方講演会において講演、原稿受付 昭和60年12月27日。

** 正員、日産自動車(株)中央研究所 (〒237 横須賀市夏島1)。

*** 日産自動車(株)中央研究所。

ここでは、これを、拘束法と称す。又、一般化逆行列を求める際、固有モードのマス正規化条件を付帯条件とする手法⁽⁶⁾があり、ここでは、これも簡単に正規化法と称す。

FOXは、アナライザ部は、FOXの方法で、OPTマイザ部として直接最適化法のひとつである可能方向法を採用して先程述べたトラス構造でモード制御に対する検討をしている。

さて、本報告では、車体レベルの大自由度構造体のモード制御を行えるシステムを開発することを目的として、これら四つの解析技法の得失の把握と新しい固有モード感度解析技法の提案を行う。

報告者の提案する技法は、現構造の固有ベクトルを初期ベクトルとして、同時反復により、構造変更後の固有ベアを算出する方法である。ここで同時反復に必要な逆マトリクスは、現構造の固有値解析で得られる逆マトリクスを利用することで演算数の削減を図っている。

2. アナライザ部解析方法の説明

まず従来のアナライザ部の各技法について、ここで議論ができる程度に簡単に記す。次にここで提案する技法について述べる。

対象とする問題は、現構造の固有値解析(1)式に対し、剛性マトリクス $[K]$ が $[K] + [\Delta K]$ に、質量マトリクス $[M]$ が $[M] + [\Delta M]$ に変化した時の、方程式(2)又は、(2)'の固有ベアを感度解析で求めるものである。なおここで、簡単のため、減衰項は省略する。

$$[K] X_i = \lambda_i [M] X_i \dots\dots\dots (1)$$

$$([K] + [\Delta K]) (X_i + \Delta X_i) =$$

$$(\lambda_i + \Delta \lambda_i) ([M] + [\Delta M]) (X_i + \Delta X_i) \dots\dots\dots (2)$$

$$[K'] X_i' = \lambda_i' [M'] X_i' \dots\dots\dots (2')$$

2.1 摂動法 構造変更後の固有モード X_i' を(3)式のように、現構造の1次から m 次までの固有モードを並べたモード行列 $[X]$ で表現する。

$$X_i' = [X] a \dots\dots\dots (3)$$

(3)式を(2')式に代入し、左から $[X]^T$ をかけると(4)式を得る。

$$([\tilde{k}_i] + [X]^T [\Delta K] [X]) a = \lambda' ([\tilde{m}_i] + [X]^T [\Delta M] [X]) a \dots\dots (4)$$

ここで、 $\tilde{k}_i$, $\tilde{m}_i$ は、現構造の i 番目等価剛性及び質量。従って、(2)式の n 次固有値方程式が(4)式の m 次の小さな固有値方程式に変換される。(4)式の固有ベクトルを並べた m 行 m 列のモード行列 $[a]$ を(3)式に代入すると変更後の固有ベクトルの近似値が得られる。

さて、この摂動法は、Ritz解析を効率よく行うものといえる。Ritz解析では、独立な m 本のベクトル $[Y]$ を選んで(4)式を解くことで、 $[Y]$ の張る部分空間の中で、(2)式の固有ベクトルを最もよく近似するものを搜し出す。この $[Y]$ として、 $[X]$ を用いることで、 X_i' の張る部分空間と近いものを作り、より精度の良い解を得ようとしている。

従って $m=n$ として、 m 本とも独立なベクトルを選べば、何を選んでも、正解を得る。例えば、ベクトルとして、単位ベクトルを用いれば、すなわち、(4)式で $[X]$ のかわりに $[I]$ を用いれば、(2)式そのものとなる。

2.2 FOXの方法 (2)式において、2次の項を省略すると(5)式を得る。

$$([K] - \lambda_i [M]) \Delta X_i = (-[\Delta K] + \lambda_i [\Delta M] + \Delta \lambda_i [M]) X_i \dots\dots (5)$$

ここで、

$$\Delta X_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} X_k, \quad m \leq n \dots\dots\dots (6)$$

として、 i 番目の固有モードの変動分を、現構造の固有モードを用いて表す。(6)式を(5)式に代入

して、左から X_k^T をかけると、 X_i の $[M]$ 直交性等を利用して、 a_{ik} が (7) 式で得られる。

$$a_{ik} = X_k^T ([\Delta K] - \lambda_i [\Delta M]) X_i / (\lambda_i - \lambda_k), (\text{for } i \neq k) \dots\dots\dots (7)$$

又、 $i = k$ のときは、正規化条件 (8) 式の変分をとり (9) 式を作る。

$$X_i^T [M] X_i = 1 \dots\dots\dots (8)$$

$$2 X_i^T [M] \Delta X_i = -X_i^T [\Delta M] X_i \dots\dots\dots (9)$$

これに (6) 式を代入し、直交性から、

$$a_{ii} = -X_i^T [\Delta M] X_i / 2 \dots\dots\dots (10)$$

(7), (10) 式を (6) 式に代入して、(11) 式を得る。

$$\Delta X_i = -X_i^T [\Delta M] X_i X_i / 2 + \sum_{k=1, k \neq i}^m \frac{X_k^T ([\Delta K] - \lambda_i [\Delta M]) X_i}{\lambda_i - \lambda_k} X_k \dots\dots\dots (11)$$

一方、構造変更後の固有値は、レイリー商から求める。

2.3 拘束法、正規化法 式 (5) に左から X_i^T を乗じ、 $[K] - \lambda_i [M]$ の対称性を利用すると式 (12) が得られる。

$$\Delta \lambda_i = \frac{X_i^T ([\Delta K] - \lambda_i [\Delta M]) X_i}{X_i^T [M] X_i} \dots\dots\dots (12)$$

しかし、(5) 式の $([K] - \lambda_i [M])$ は特異であるから (5) 式から直接 ΔX_i を求めることはできない。そこで、次の2つの方法によって ΔX_i を求める。但し、ここで簡単のため、 λ_i は非縮合とする。

2.3.1 拘束法 任意の自由度をひとつ拘束し、

ΔX_i を得る。

$$\Delta X_i = ([K] - \lambda_i [M])^{-1} \times (-1) ([\Delta K] - \lambda_i [\Delta M] - \Delta \lambda_i [M]) X_i \dots\dots\dots (13)$$

ただし、バーは、1 自由度拘束を表わす。

2.3.2 正規化法 (5) 式の正規化条件の変分をとって得られる (9) 式を加えて (14) 式を得る。

$$\left(\frac{[K] - \lambda_i [M]}{2 X_i^T [M]} \right) \Delta X_i = \left(-[\Delta K] + \frac{\lambda_i [\Delta M] + \Delta \lambda_i [M]}{-X_i^T [\Delta M]} \right) X_i \dots\dots\dots (14)$$

この式を

$$[C] \Delta X_i = [D] X_i \dots\dots\dots (15)$$

と表わし、左から $[C]^T$ をかけることで、行列のランクをあげ、 ΔX_i を得る。

$$\Delta X_i = ([C]^T [C])^{-1} [C]^T [D] X_i \dots\dots\dots (16)$$

なお、拘束法、正規化法とも2次感度まで容易に求めることができ、その効果についても例えば文献(7)等で報告されているが、本報告では、この点については、ふれないので省略する。

2.4 報告者の方法 現構造の固有ベクトルを初期ベクトルとして、構造変更後の固有ベクトルの算出を同時反復法を利用して求める手順を (i) ~ (v) に示す。

(i) m 本の出発ベクトル $[X^0] = [X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0]$ を現構造の固有モードベクトルとする。シフト値 μ を適当にとることにより希望する周波数の近傍のベクトルを選択できる。

(ii) $[X^1] = ([Z] + [\Delta Z])^{-1} ([M] + [\Delta M]) [X^0]$ を計算する。

ここに、 $[Z] = [K] - \mu [M]$,

$$[\Delta Z] = [\Delta K] - \mu [\Delta M]$$

(iii) $[X^1] = [X_1^1, X_2^1, \dots, X_m^1]$ を Gram-Schmidt の方法により $[M]$ 直交させる。

(iv) 長さを調節する.

$$[X_i]^T ([M] + [AM]) [X_i] = 1$$

(v) 収束判定を行い, 未収束なら(ii)へ戻る.

ここで, (ii)の $([Z] + [AZ])^{-1}$ は(17)式の m 項までの式で算出する.

$$\begin{aligned} & ([Z] + [AZ])^{-1} \\ &= ([I] + [B] + [B]^2 + \dots + [B]^m \\ &+ ([I] - [B])^{-1} [B]^{m+1}) [Z]^{-1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

但し, $[B] = -[Z]^{-1}[AZ]$. 同時反復法で演算数の最も多い部分は逆マトリクスを求めるところであるが, $[Z]^{-1}$ は現構造の固有値解析で既に得られているから, (17)式の演算主要部は, $[B]^i [Z]^{-1}$, $i = 1 \sim m$ の算出である. $[AZ]$ の非零成分の自由度を N , 全自由度を n とすると, $[B]^i$ の非零成分は, nN となる. このことを考慮して, 同時反復法で必要な逆マトリクスを求める際, (17)式の利用により, 演算数がどれだけ削減されるかを見る.

(i) $[C] = [B] + [B]^2 + \dots + [B]^m$ の算出に約 $2mnN^2$

(ii) $[Z]^{-1}[C]$ の算出に, $2n^2N$

(iii) $[Z]^{-1}([I] + [Z]^{-1}[C])$ の算出に Nn 合計 $K \div 2n^2N$

一方, 通常同時反復法では,

(i) $[Z]$ のLU分解に $n\ell^2/2$ ℓ : バンド幅

(ii) LU分解から $[Z]^{-1}$ の算出に $2n^3/3$

従って, 短縮率 R は, $R = K / (n\ell^2/2 + 2n^3/3)$ $n \gg N$, ℓ を利用すると, $R = 3N/n$

さて, 本手法が適用しえるか否かは, m 値を選んだとき, 剰余項が無視し得るか否かによる. そこで剰余項 $R = ([I] - [B])^{-1}[B]^{m+1}[Z]^{-1}$ の大きさを評価する.

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \|([I] - [B])^{-1}\| \cdot \| [B]^{m+1} \| \\ &\| [Z]^{-1} \| \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$\|$ は2乗ノルム. $\| [Z]^{-1} \|$ は, $([Z])$ の最小固有値 $^{-1}$, 即ち, $(\min(\lambda_i - \mu))^{-1}$.

$\| [B]^{m+1} \|$ は $[B]^{m+1}$ の最大固有値.

3. 適用例

3.1 5自由度振動系 図1, 表1のモデルで m_5 , k_1 がともに5%増加した場合の質点5の各モード毎の振幅値の予測精度及び固有値の予測精度を表2に示す.

Suffix	1	2	3	4	5
M	2	3	6	1	4
K	1	3	2	5	4

図1 5自由度振動系

表1 現構造のモード特性

Mode Number	Eigen Value	Eigen Mode				
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	0.03975	0.1565	0.2045	0.2644	0.2757	0.2871
2	0.57235	0.3694	0.3516	0.0230	-0.1242	-0.2905
3	1.18687	-0.2631	-0.1426	0.2820	0.0499	-0.2674
4	3.10897	0.5193	-0.3839	0.0516	0.0331	-0.0157
5	9.92538	-0.0014	0.0075	-0.0907	0.9512	-0.1065

表2で振幅予測値精度 Err は(19)式で各モード毎に得ている.

$$Err = (X_{B5} - X_{05}) / (X_{B5} - X_{05}) \dots (19)$$

ここで, X_{B5} , X_{05} , X_5 はそれぞれ, 構造変更後の振幅予測値, 現構造振幅値, 実際に5%設計変更させて求めた真値. 数字の5は質点5の値であることを意味する.

従って, Err が1に近い程, 精度がよい.

又, 固有値の予測値精度も(19)式と同様, (予測固有値 - 現構造固有値) / (理論固有値 - 現構造固有値)で得ている.

摂動法は, 全モードを使えば, 理論上, 厳密解に一致することを§2.1で示したが計算結果もその通りになっている.

拘束法, 正規化法, 全モードを使った場合のFOX法も理論的には一致するが, 計算結果も下2桁まで一致している. 拘束法の場合, 特解 ΔX_i を質点1~5のうちどれかひとつの自由度を落して(13)式で求め, 目的の固有モード感度 ΔX_i を次式で得ている.

表2 各モードにおける質点5の振幅予測値精度と固有値予測値精度 (カッコ内)

mode No.	Peturbstion Method	Fox Method	Fixed (Normalized) Method	Authors Method
1	Used Mode No.	Used Mode No.	1.030(1.000)	Ite-ration No.
2	Used Mode No.	Used Mode No.	1.001(1.000)	Ite-ration No.
3	Used Mode No.	Used Mode No.	1.014(1.000)	Ite-ration No.
4	Used Mode No.	Used Mode No.	1.013(1.000)	Ite-ration No.
5	Used Mode No.	Used Mode No.	1.069(1.000)	Ite-ration No.

$$\Delta \bar{X}_i = \Delta \bar{X}_i + C \cdot X_i \quad (20)$$

ここに、C: 定数、 X_i : 現構造 i 番目固有モード
C は、 $(X_i + \Delta X_i)$ の構造変更後のマス・マトリクス
を用いたマス正規化により求める。以上のステップに
より、どの質点を拘束しても同一の値が得られている。

正規化法の場合は (16) 式で得られる特解 $\Delta \bar{X}_i$ をも
とに、又 FOX 法の場合も (7) 式で得られる特解
 $\Delta \bar{X}_i$ をもとに、あとは拘束法の場合と同様にして算出
した結果である。ここで、FOX 法で式 (10) は使用
していない。

摂動法、FOX 法はともに特に FOX 法では、使用
するモード数が少ないと固有モードの精度はよくない
が、固有値の場合は少ないモード数でも精度がよい。

報告者の方法による計算値の精度は、(17) 式の m
値と反復回数に依存する。m 値決定のため (18) 式の
剰余項の大きさ R 値 を算出するのは、効率がよく
ない。しかし、(18) 式で $[B]^m$ の非零項
の最大値 RS は演算過程で容易に求まるから、

$$\|([I] - [B])^{-1}\|$$

$\bar{R} = \| [Z]^{-1} \| \cdot RS$ で m を決定することを考える。

報告者の方法では、シフト値を $1.2 \times$ (第1番目
固有値) にして、同時に5個の固有モードを得てい
るが反復数3回で、ほぼ拘束法等と同等の精度が得ら
れている。同表で $\bar{R} = 0.1146 \times 10^{-1}$ $m = 3$,

$$R = 0.1170 \times 10^{-1}$$

更に10%、50%変更した場合の拘束法及び正規化法
の結果を表3に、報告者の方法による結果を表4に示
す。拘束法等の場合、変更量50%では、既に精度上、許
容できる大きさを越えているが、報告者の方法では、
依然として精度がよい。表4でシフト値は、5%の
ときと同一である。同表から、 $\bar{R}$ 値が 10^{-2} レベルで十
分な精度が得られることがわかる。すなわち、 $\bar{R}$ 値が
 10^{-2} レベルになるまで、m 数を増加させればよい。

表3 拘束法, 正規化法振幅予測値精度

Mode No.	10 % Changed	50 % Changed
1	1.059902	1.296492
2	1.002394	1.014657
3	1.029221	1.132218
4	1.023531	1.118078
5	1.506984	2.106114

表4 報告者の方法 R値と振幅予測値精度との関係

10 % Changed				50 % Changed			
$\bar{R}$ (R)	m	Iter. No.	Err	$\bar{R}$ (R)	m	Iter. No.	Err
1.797 E+1 (1.834 E+1)	1	1	0.85589	8.985 E+1 (9.169 E+1)	1	1	1.35948
		3	1.12743			3	1.76510
		5	1.13344			5	1.77589
1.284 E+0 (2.594 E+0)	2	1	0.73666	1.462 E+0 (1.492 E+0)	5	1	0.72608
		3	0.98488			3	1.00470
		5	0.99036			5	1.01213
9.170 E-2 (9.358 E-2)	3	1	0.74516	2.380 E-2 (2.429 E-2)	9	1	0.71609
		3	0.99505			3	0.99265
		5	1.00057			5	1.0002
6.551 E-3 (1.324 E-2)	4	1	0.74455	3.036 E-3 (3.099 E-3)	11	1	0.71594
		3	0.99432			3	0.99248
		5	0.99984			5	0.99984

3.2 有限要素法・梁モデル 図2は, 一様梁モデルである. 等間隔に分割した11節点10要素で左端(節点1)を完全固定している. 全長 $l = 760 \text{ cm}$, 断面積 $S = 2.87 \text{ cm}^2$, ヤング率 $E = 7.252 \times 10^7 \text{ Pa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$, 密度 $\rho = 2.75 \text{ g/cm}^3$, 断面2次極モーメント $I_p = 35.4 \text{ cm}^4$, 断面2次モーメント $I_y = 29.4 \text{ cm}^4$, $I_z = 19.6 \text{ cm}^4$ である.

図2 有限要素法梁モデル

ここで第7要素の全ての断面定数を5%及び50%アップさせた時の第5次固有モード(X-Y面 曲げ3節モード, 固有値 $\lambda = 74.759$)を扱う. ここでは, 節点11のY方向の予測値精度の検討を行う.

ここで, 振幅予測値精度 Err は(19)式で, 節点11のY方向の数値を代入した値である.

表5に, 摂動法, FOX法の結果を示す. FOX法

の場合は, 5%変更時, 使用するモード数24で既に良い結果が得られているが全モードを使うより, モード数40の方が精度がよい. 全モードを使っても正解にならないのは, 高次の感度係数を省略しているためと思われる.

表5 摂動法, FOX法振幅予測値精度

Used mode Number		5 % Changed	50 % Changed
8	Perturbation	-0.374575	-0.391666
	FOX	-0.361616	-0.173230
16	Perturbation	1.56141	2.50134
	FOX	1.62025	3.40517
24	Perturbation	0.848399	1.14186
	FOX	0.924589	2.24668
40	Perturbation	0.988523	1.01197
	FOX	1.10468	2.58281
60	Perturbation	1.00062	1.00001
	FOX	1.12061	2.61272

図3 FOX法使用モード数と振幅予測値精度との関係 (5%変更時)

又, 図3に示すように, あるモードを加えると精度が急に悪くなる場合がある. 又, 同図でモード数を増加しても精度が変わらないところがあるのは, 現在考慮しているモードに対して, 加えるモードが直角方向のモードであることによる. この点は, 摂動法の場合も同様である. 50%変更時の精度が悪い. これは, 50%で既に精度上, 許容できる変更の大きさを越えているためと考えられる.

摂動法の場合は, 変更量がいくら大きくてもモード数を増加させれば正解に近づく. 収束の過程は, 変更量の大きさにそれ程, 影響されない. モード数40で十分な精度が得られているが, FOX法の場合と同様, モード数をどこまで使用すれば良いかの指標となるものが容易には得られない.

拘束法, 正規化法の結果を表6に示すが, 両者下4桁まで一致している。これらは, 又, FOX法で全モードを使用したときの数値とも一致している。

ここで, 拘束法では, 節点1以外どの節点のどの自由度を拘束しても同一の値が得られている。

報告者の方法による計算精度を $\bar{R}$ 値, 繰返し数とともに表7に示す。同じ $\bar{R}$ 値を得るために必要な m 数は, 50%変更の場合, 5%変更に比べて格段に多くなるが, $\bar{R}$ 値が同じなら, 50%変更時も得られる精度は変わらない。同表から, 本例題でも $\bar{R}$ 値として, 10^{-2} レベルになるまで, m 数を増せば十分な精度が得られることがわかる。

表6 拘束法, 正規化法振幅予測値精度

	5 % Changed	50 % Changed
Fixed	1.12030	2.61266
Normalized	1.12031	2.61268

表7 報告者の方法 $\bar{R}$ 値と振幅予測値精度との関係

5 % Changed				50 % Changed			
$\bar{R}$ (R)	m	Iter. No.	Err	$\bar{R}$ (R)	m	Iter. No.	Err
2.517 E-1 (3.691 E-1)	1	1	0.78558	2.517 E+0 (3.691 E+0)	1	1	0.93155
		3	1.01262			3	1.19437
		5	1.01982			5	1.20089
6.522 E-3 (1.007 E-2)	2	1	0.77056	1.469 E-1 (1.438 E-1)	3	1	0.70432
		3	0.99370			3	0.91658
		5	1.00080			5	0.92313
1.469 E-4 (1.438 E-4)	3	1	0.76964	3.314 E-2 (4.202 E-2)	5	1	0.75706
		3	0.99232			3	0.99408
		5	0.99941			5	1.00145
7.970 E-6 (1.029 E-5)	4	1	0.76969	5.164 E-3 (2.994 E-3)	7	1	0.75683
		3	0.99240			3	0.99322
		5	0.99948			5	1.00055

3.3 最適化問題への適用についての考察
ここで, 自動車車体のような大自由度構造体の固有モード最適化問題に, アナライザ部の以上の五つの技法を使うことを想定してみる。解析の流れを図4に示す。同図に示すように, 計算時間の多くかかる通常のFEM固有値解析は, 1回実施するだけであとは, 広義の固有モード感度解析のルーチンで次々に構造変更後の固有モードを求め得ることが効率上, 重要である。この点に対しては, 報告者の方法, 拱動法, FOXの方法何れも問題ない。例えば報告者の方法によると, n ステップでは, $[Z_n]^{-1}$ を既知として, (17)式と同様

にして $([Z_n] + [\Delta Z_n])^{-1}$ を算出できる。ここに $[Z_n] = [Z] + [\Delta Z_1] + [\Delta Z_2] + \dots + [\Delta Z_{n-1}]$

一方, 拘束法, 正規化法の場合は, 新たにルーチンを追加する必要がある。即ち, $[Z_n]^{-1}$ が求まっているとして, $([Z_n] + [\Delta Z_n] - \Delta \lambda_n [M_n])^{-1}$ を算出する。

これは, (17)式と同様に求まるが(17)式の $[Z]^{-1} \cdot [\Delta Z]$ の代りに, $[Z_n]^{-1} [\Delta B]$ を算出する。ここに, $[Z_n] = [K_n] - \lambda_n [M_n]$, $[\Delta B] = [\Delta Z_n] - \Delta \lambda_n [M_n]$, $[\Delta Z_n] = [\Delta K_n] - \lambda_n [\Delta M_n]$ 。

つまり, $[Z_n]^{-1} [M_n]$ の演算が余計に加わるが, (17)式と同程度の演算を行うことにより, 拘束法, 正規化法を使用した場合も図4の最適化解析が可能となる。但し, 報告者の方法の $\bar{R}$ 値に対応するものを求めようとすれば, $[Z_n]^{-1}$ のノルムを求める必要があるが, これを算出するのは得策ではない。

図4 固有モードコントロールのための最適化ルーチン

4. ま と め

固有モード制御を行うための最適化システムの核となる固有モード感度解析技法に関し、新しい手法を開発し、四つの既存の同技法とともに基礎検討を行い次の結果を得た。

- 1) 報告者の方法では、演算過程の式 (17) により容易に算出できる $\bar{R}$ 値で精度の予測ができる。具体的には、 $\bar{R}$ 値が 10^{-2} レベルであれば、十分な精度が得られる。
- 2) 一方、従来の四つの技法では、何れもそのような指標を容易に見出せない。
- 3) 摂動法は全モードを使用する場合、厳密解に一致することを示した。但し、モード数をいくつまでとれば良いか不明な点、高次のモードを扱うには、1次からそれより高い周波数の固有モードが必要になる点が欠点である。
- 4) 拘束法、正規化法、全モードを使った場合のFOX法の三者は、(20)式を使うステップをふめば同一の結果を得る。
- 5) 従って、拘束法でどの自由度を拘束すれば良いかの議論は不用である。FOX法で、実際に固有モード感度を求める際、式(10)は不用である。又、拘束法と正規化法を比べた場合、必要なステップ数が少ない拘束法の方が有利である。
- 6) FOX法では、全モードを使用しない場合、あるモードの採用で極端に精度が悪くなる場合があるため注意が必要である。但し、短時間で多くのモードを一度に算出できる長所がある。
- 7) 拘束法、正規化法を使って効率良くモードの最適化解析を行おうとすれば、式(17)と同程度のものが加わる。但し、報告者の方法の $\bar{R}$ 値に対応するものの算出は困難である。

今後、以上の各技法の得失をふまえ、対象とする問題に応じて、これらの技法を使い分けてゆく。実際の車体レベルの感度解析並びに最適化解析は次報以降で報告する予定である。

参 考 文 献

- (1) 萩原, 「自動車の軽量化, 疲労強度問題とスポット溶接」シンポジウム, 自動車技術会(1985)
- (2) 萩原, 「構造解析における最適化技術」シンポジウム, 自動車技術会(1985)
- (3) Duncan A.E., SAE 811313 (1981)
- (4) Fox, R.L. and Kapoor, M.P., AIAA J., 8-10 (1970) 1798
- (5) 長松, 岩本, 藤田, 機論, 49-439C, (1983-3), 314
- (6) Fox, R.L. and Kapoor, M.P., AIAA J., 6-12 (1968), 2426
- (7) Collins, J.D. and Thomson, W.T., AIAA J. 7-4 (1969), 642
- (8) 井上・ほか3名, 機論, 50-452C, (1984-4), 597

討 論

〔質問〕 相 沢 龍 彦〔東京大学教養学部〕

モード法の応用ならびに基礎理論に興味をもつ者として、二、三質問させていただきたい。

(1) 著者は、比較すべき他の方法として、摂動法および Fox らの方法を挙げているが、質問者ら(付1, 2)の一連の研究により上記の方法の拡張した理論として摂動反復法が示され、著者の方法のように $([Z] + [\Delta Z])^{-1}$ を用いずに $[Z]^{-1}$ のみを利用して効率良く摂動固有値問題を解けることがわかっている。文献(付1)(付2)に示した質問者らのアプローチとの比較検討をお願いしたい。

(2) 3・2節ではりの振動問題を用いて比較検討を行っているが、適切に反復法を適用すれば、非縮重固有モードに対しては回数にかかわらず一つの固有対のみを用いればよく、反復挙動は変更量の大きさに依存すると考えられる。貴手法の反復特性をより詳細に伺いたい。

〔回答〕 (1) 著者らの技法の特長は、 $([Z] + [\Delta Z])^{-1}$ の演算で $[Z]^{-1}$ を有効に活用するところにあるが、文献(付1)の貴論文(以下、K-A 法と称す)では、ご指摘のように、 $[Z]^{-1}$ そのもので計算ができ、しかも著者らの方法の中の Gram-Schmidt の直交化に相当するサブスペースでの固有値解析も各摂動ごとに1回でよいなど、素晴らしい特性があると考えられる。更に、本論文で述べた Duncan らの摂動法もその中に含まれている。しかし、K-A 法では、随所に摂動が小さいとの仮定が入っている点と他の方法に比べて演算の種類が多く、はん用ソフトウェアに組み込むのが若干、難しい点がある。著者らの方法では、式(17)で剰余項が無視できないような大きな設計変更 $[\Delta Z]$ に対して $[\Delta Z]$ を $[\Delta Z_1]$ $[\Delta Z_2]$ などに分けることができ、最適化解析など設計変更を繰返してゆくうちに大変更となるような問題に向いていると考えている。いずれにしても本論文の続報で、大規模モデルの問題、大変更問題などでより具体的かつ詳細に、各技法の比較を行う予定であり、その中で、K-A 法も比較の対象としたいと考えている。

(2) ご指摘のとおり、反復法では、ひとつの固有ペアのみを用いて目標の固有モードを得ることができる。しかし、今回報告した著者らの方法では、シフト値

μ の変更を反復ごとに行っていないので目標とする固有モードに隣接する固有値のモードへ移行して収束することがある。シフト値 μ を変更すると式(17)を用いるメリットがいくてこない。

次に、構造変更の大きさと反復挙動についてであるが、構造変更を大きくすると、本論文で述べた $\bar{R}$ 値が 10^{-2} 程度になるのに必要な項数 m [式(17)] は増加する。しかし、 $\bar{R}$ 値が同程度であれば、反復法の収束値の精度は同程度になる。また、反復法における収束の様子、厳密に比較したわけではないが、構造変更の大きさによらず、おおよそ、1回の反復で、1けたずつ収束していく。

〔質問〕 中 桐 滋〔東京大学生産技術研究所〕

構造変更と構造動特性の変化の関係に興味を持つ者として貴論文を拝見し、以下の2点につきおたずねしたい。

(1) 貴論文では構造定数値の変化のみを取り上げている。部材の追加のように、構造変更が質量、剛性マトリックスの元数の増加をきたす場合を貴論文の方法では取扱えないと推測する。元数の増加にはどのように対処するのか、お考えがあれば伺いたい。

(2) 一方、構造変更により剛性マトリックスのランクが減少する場合も存在し得る。 $[K] + [\Delta K]$ が正定値性を失うような構造変更は避けるべきであり、またそのような変更が行われても $[K] + [\Delta K]$ を用いる固有値解析ではその不合理は検出できると思う。貴論文の方法では $[Z] = [K] - \mu[M]$ を定式の基礎としている。部材削減により不合理な $[\Delta K]$ が設定された場合、貴論文の方法ではその不合理を検出できるのか。

〔回答〕 (1) 最適化による構造決定問題に、本論文で述べた形状決定問題のほかに、ご指摘のような部材の追加、取り外しを含めた位相決定問題があると考えている。

しかし、位相決定問題の報告例は、本論文で取り上げた固有モード制御より研究例の多い線形剛性問題の例を見てもほとんど見当たらない。そこで、まずここでは、形状決定問題に的を絞っている。

さて、著者らの方法では、ご質問の部材の追加など、自由度の増加に対する問題には、対応できない。ここで述べた従来の四つの感度解析技法も同様に容易には、このような問題には、対応できないと考える。ところで、車両を設計する際、部材の追加、削減に対して、まずいくつかの設計案のあるケースが多い。このよう

(付1) Kikuchi, F. and Aizawa, T., *Bull. JSME*, 27 (1984), 1479.

(付2) Kikuchi, F. and Aizawa, T., *Bull. JSME*, 28-235 (1985), 1733.

な場合には、著者らの方法を用いてそれぞれのケースの最適値を算出して、その中から、いちばんよいものを選ぶといった方法（以下、選択問題と称する。）を採用するほうが現実的な対応と考える。

（2）構造変更の結果、剛性マトリックスの正定値が失われるのは、剛性マトリックスの一部の成分を零にするような変更、すなわち、部材削減に限られると考える。

このような変更は回答(1)で述べたとおり本論文の対象とするところではなく、これには、回答(1)で記した選択問題で対応するか、モード合成法等で対応するほうが適切と考える。

ただし、各部分構造の特性変更の算出には、著者らの方法を始め、感度解析は有効であるため、今後、位相決定問題には、モード合成法と感度解析とを組合せて対応してゆきたいと考える。