がたと摩擦のある二自由度系の強制ねじり振動の研究*

(第2報, 固着すべり運動の場合)

片岡真澄**, 大野進一***, 鈴木常夫***

Forced Torsional Vibration of a Two Degrees of Freedom System Including Clearance and Friction

(2nd Report, Case of Stick-Slip Motion)

by Masumi KATAOKA, Shinichi OHNO, and Tsuneo SUZUKI

The engine-clutch-manual transmission system of an automobile is modelled by a forced torsional vibration system of two degrees of freedom including two nonlinear terms, namely clearance and friction. In the derivation of the analytical solution, the friction term is linearized based upon the approximate solution of motion. The conclusions are as follows: 1) Experiments, computer simulations and the analytical solution show that the stick-slip motion occurs when the friction torque takes a value within certain limits. 2) When the system approaches resonance, the sum of torque impulse becomes large in the system with small friction, but it remains almost unchanged in the system with large friction. 3) It seems that the effects of system parameters on the magnitude of shock can be estimated by the amplitude magnification factor of an approximate single degree of freedom system.

Key Words: Theory of Vibration, Shock, Two Degrees of Freedom System, Forced Torsional Vibration, Friction, Backlash, Gear Noise, Experiment, Computer Simulation, Analysis

1. 緒 言

著者らは、自動車の歯車変速機の歯打ち振動を、がたと摩擦を含む二自由度系の強制ねじり振動として考え、第1報において摩擦部に連続すべり運動が生じている場合を扱った⁽¹⁾。

本報では、摩擦部に固着すべり運動が生じている場合をとりあげ、実験、シミュレーション計算、および解析解の誘導を行い、歯面間の衝撃の大きさに及ぼす諸因子の影響を調べた。

2. 力学モデルと記号

図1は、実験に用いた系の力学モデルである。ここで各記号は

J_1 : 入力歯車の慣性モーメント

J_2 : 副軸歯車の慣性モーメント

k_1 : ねじりばね定数

k_2 : かみあっている一對の歯の曲げ剛性の等価ねじりばね定数

ω' : 平均回転角速度 ($=\omega/2$)

ω : 加振変位の変動部分の角振動数

E : 加振変位の変動部分の振幅

ϵ : 歯車対に存在するがたの1/2

C_1, C_2 : 粘性減衰係数

X : 入力歯車の角変位

Y : 副軸歯車の角変位

Z : 加振角変位

x : 入力歯車の角変位の変動部分

y : 副軸歯車の角変位の変動部分

z : 強制角変位の変動部分 ($=E \sin \omega t$)

t : 時間

ΔF : 摩擦トルクの大きさ

図1 振動系

* 昭和61年6月27日 北陸信越支部北陸地方(金沢)講演会, 原稿受付 昭和60年10月9日.

** 正員, 千葉工業大学 (〒275 習志野市津田沼2-17-1).

*** 正員, 東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木2-22-1).

3. 運動方程式

3.1 運動方程式 図1の系の慣性モーメント J_1 , J_2 の角変位は $X = \omega't + x$, $Y = \omega't + y$ であり $Z = \omega't + z$ と書けるから J_1, J_2 の運動方程式は変動部分 x, y に関する方程式として

$$\left. \begin{aligned} J_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + C_1 \frac{dx}{dt} + k_1 x &= k_1 E \sin \omega t + T(y-x) \\ &+ F(\dot{z}-\dot{x}) - C_1 \omega / 2 \\ J_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + C_2 \frac{dy}{dt} &= -T(y-x) - C_2 \omega / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、時間原点は強制角変位の変動部分が零である時刻にとり、 y の原点はがたの中央にとるものとする。 $T(y-x)$ は、がた部に起因する非線形トルクを表し、 $F(\dot{z}-\dot{x})$ は摩擦トルクを表すものとする。さて第1報では、摩擦トルクの小さい範囲を扱ったが、この場合は、 J_1 は近似的に周期的な連続すべり運動を行っていた。しかし、摩擦トルクを増加させていけば、ある範囲で J_1 は固着すべり運動を生じ、さらに摩擦トルクを増せば駆動端と固着した運動となることが予想される。

そこで、以下の解析では摩擦的作用により J_1 が近似的に周期 $2\pi/\omega$ の対称な一停滞の固着すべり運動を行うとみなせる場合を扱うものとする。解析にあたり、第1報にならって式(1)の第1式右辺の摩擦トルク $F(\dot{z}-\dot{x})$ の近似解をフーリエ級数展開し、線形化する。すなわち、 $\dot{x}$ の近似解として衝突の影響を無視した場合の解を用いることとする。すなわち、図1の振動系において $\varepsilon=0$ とおき、さらに簡単のために $k_2 = \infty$, $C_1 = C_2 = 0$, $J = J_1 + J_2$ とおいた一自由度系の解を用いることにする。今後の記号の混乱を避けるために、 J の変位を ξ で表す。

3.2 摩擦トルクの分解 J が駆動端に対してすべっている期間、つまり J と駆動端との相対速度が零でない区間の半周期に対する割合を、すべり率と呼ぶことにし、記号 s で表す。ここで、無次元時間 $\theta = \omega t$ を導入し、すべっている場合のうち正の摩擦力の作用する区間の中央 O_1 と時間原点 O_2 との位相角を φ とおけば、無次元化した摩擦トルク $F'(\theta)/k_1$ は図2(a)のように表すことができる。ここで

$$F'(\theta)/k_1 = f_1(\theta) + f_2(\theta) \dots\dots\dots (2)$$

とおき、 $f_1(\theta)$ をすべり区間に作用する摩擦トルクのみを表す関数、 $f_2(\theta)$ は固着区間に作用する摩擦トルクのみを表す関数として $F'(\theta)/k_1$ を分けて考える。 $f_1(\theta)$ は図2(b)の太い実線で示す階段状の関数であ

り、 $f_2(\theta)$ は図2(c)の三角波状の関数である。

3.3 $f_1(\theta)$ のフーリエ級数展開 $f_1(\theta)$ はさらに分解できて図2(b)の細い実線で示したく形波、すなわち時間原点 O_2 より $\varphi - (1-s)\pi/2$ だけ位相の進んだ点 O_4 が正の部分の中央となり、高さが周期 π/ω ごとに $\pm \Delta F/2k_1$ となる波形 $f_1'(\theta)$ と、細い破線で示したく形波、すなわち $f_1'(\theta)$ をさらに $(1-s)\pi$ だけ位相を進めた波形 $f_1''(\theta)$ とを加えることから得られる。この二つのく形波 $f_1'(\theta), f_1''(\theta)$ をフーリエ級数に展開することから

$$f_1(\theta) = \frac{2\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \times \left[\begin{aligned} &\sin\{(2m+1)(\theta + \varphi + s\pi/2)\} \\ &- \sin\{(2m+1)(\theta + \varphi - s\pi/2)\} \end{aligned} \right] \dots\dots (3)$$

3.4 $f_2(\theta)$ のフーリエ級数展開 図2(c)に示す固着区間の中点 O_3 を原点とする無次元時間 τ_2 を用いて、摩擦トルクを $f_2'(\tau_2)$ と書く。 O_3 を含む固着区間の J の角変位を ξ_2 とおくと J についての運動方程式から

$$f_2'(\tau_2) = (\omega/\omega_1)^2 \frac{d^2 \xi_2}{d\tau_2^2} + \xi_2 - E \sin(\tau_2 - \varphi + \pi/2) \dots\dots\dots (4)$$

図2 摩擦トルク

この区間では, J は駆動端に固着しているから

$$\xi_2 = E \sin(\tau_2 - \varphi + \pi/2) + \beta \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(4), (5)から

$$f_2'(\tau_2) = -E(\omega/\omega_1)^2 \cos(\tau_2 - \varphi) + \beta \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, $\omega_1 = \sqrt{k_1/(J_1 + J_2)}$ であり, β は後に決定される定数である。式(6)をフーリエ級数に展開し

$$f_2'(\tau_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_{2m+1} \cos(2m+1)\tau_2 + b_{2m+1} \sin(2m+1)\tau_2\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

フーリエ係数 a_{2m+1} , b_{2m+1} の決定は, 式(6)を式(7)の左辺に代入して両辺を積分する一般的方法によれば行えるが, $f_2'(\tau_2)$ は不連続関数であるため収束性はあまりよくないものと考えられる。そこで以下では級数変換による収束改善⁽²⁾⁽³⁾をこころみる。便宜上 $\theta_0 = (1-s)\pi$ とおき, 区間 $(-\theta_0/2, \theta_0/2)$ での $f_2'(\tau_2)$ を $f_2'(\tau_2 + \theta_0) = -f_2'(\tau_2)$ によって $3\theta_0/2$ まで延長し $(-\theta_0/2, 3\theta_0/2)$ の区間でフーリエ級数展開したものを

$$f_2'(\tau_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \eta_{2j+1} \cos \frac{(2j+1)\pi}{\theta_0} \tau_2 + \zeta_{2j+1} \sin \frac{(2j+1)\pi}{\theta_0} \tau_2 \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(6)を式(8)に代入し区間 $(-\theta_0/2, \theta_0/2)$ で積分すると

$$\eta_{2j+1} = \frac{4E}{\pi} (-1)^j (\omega/\omega_1)^2 \sin \frac{s\pi}{2} \times \frac{(2j+1)}{(1-s)^2 - (2j+1)^2} \cos \varphi + 4\beta (-1)^j / \pi (2j+1) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\zeta_{2j+1} = \frac{4E}{\pi} (-1)^j (\omega/\omega_1)^2 \sin \frac{s\pi}{2} \times \frac{(1-s)}{(1-s)^2 - (2j+1)^2} \sin \varphi \quad \dots\dots\dots (10)$$

また古い級数の係数 a_{2m+1} , b_{2m+1} と新しい級数の係数 η_{2j+1} , ζ_{2j+1} の関係は変換式から

$$\left. \begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{4}{\pi} (-1)^m \sin(2m+1)s\pi/2 \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1)(1-s)}{(2j+1)^2 - (1-s)^2 (2m+1)^2} \eta_{2j+1} \\ b_{2m+1} &= \frac{4}{\pi} (-1)^m \sin(2m+1)s\pi/2 \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2m+1)(1-s)^2}{(2j+1)^2 - (1-s)^2 (2m+1)^2} \zeta_{2j+1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで, $\tau_2 = \theta + \varphi - \pi/2$ であるから, これを式(7)に代入すると

$$f_2(\theta) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\begin{aligned} &a_{2m+1} \sin \{(2m+1)(\theta + \varphi)\} \\ &- b_{2m+1} \cos \{(2m+1)(\theta + \varphi)\} \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (7)'$$

3・5 摩擦トルク $F'(\theta)$ のフーリエ級数展開

式(2), (3), (7)'から $F'(\theta)/k_1$ のフーリエ級数展開は

$$F'(\theta)/k_1 = \frac{2\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \times \left[\begin{aligned} &\sin \{(2m+1)(\theta + \varphi + s\pi/2)\} \\ &- \sin \{(2m+1)(\theta + \varphi - s\pi/2)\} \end{aligned} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\begin{aligned} &a_{2m+1} \sin \{(2m+1)(\theta + \varphi)\} \\ &- b_{2m+1} \cos \{(2m+1)(\theta + \varphi)\} \end{aligned} \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

よって, 式(12)を $F(\varepsilon - x)$ の近似式とすることから式(1)の第1式における非線形項の一つ $F(\varepsilon - x)$ が線形化されたことになる。

3・6 すべり率 s , 位相角 φ , 定数 β の決定

s , φ , β の値は, 上述の一自由度系が周期的な固着すべり運動を行っている場合の解を接合法で求めることから決定する⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

図3に示すように, 駆動端と J との相対速度が正, すなわち正の摩擦トルクの作用している区間を PQ, 区間幅 $s\pi$ とし, この区間における J の変動角変位を ξ_1 で表す。次の相対速度が零, つまり固着している区間を QR, 区間幅 $(1-s)\pi$, この区間での J の変動角変位を ξ_2 とする。この ξ_2 は式(5)の ξ_2 と同じである。さらに次の相対速度が零となり, 負の摩擦トルクの作用する区間を RS, 区間幅 $s\pi$, 変動角変位を ξ_3 とし, 各区間の無次元時間の原点をそれらの区間の中央にとるものとし, その原点からの無次元時間を τ_1 , τ_2 , τ_3 で表す。区間 PQ での運動方程式は

$$d^2 \xi_1 / d\tau^2 + (\omega_1/\omega)^2 \xi_1 = (\omega_1/\omega)^2 E \sin(\tau_1 - \varphi) + (\omega_1/\omega)^2 \Delta F / k_1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

図3 一自由度系の固着すべり運動

式(13)の解は

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega_1/\omega \cdot \tau_1) + B_0 \sin(\omega_1/\omega \cdot \tau_1) + \frac{E(\omega_1/\omega)^2}{(\omega_1/\omega)^2 - 1} \sin(\tau_1 - \varphi) + \Delta F/k_1 \dots (14)$$

ただし A_0, B_0 は未定の定数である。区間 QR での ξ_2 は式(5)である。区間 RS では、区間 PQ と対称であるから

$$\xi_3 = -\xi_1 \dots (15)$$

未定の定数である $A_0, B_0, s, \varphi, \beta$ を決定するための条件は、次のように書ける。

$$(i) \quad \xi_1|_{\tau_1=s\pi/2} = \xi_2|_{\tau_2=-(1-s)\pi/2} \dots (16)$$

$$(ii) \quad \xi_2|_{\tau_2=(1-s)\pi/2} = \xi_3|_{\tau_3=-s\pi/2} \dots (17)$$

$$(iii) \quad d\xi_1/d\tau_1|_{\tau_1=s\pi/2} = dz/d\theta|_{\theta=-\varphi-s\pi/2} \dots (18)$$

$$(iv) \quad d\xi_1/d\tau_1|_{\tau_1=s\pi/2} = dz/d\theta|_{\theta=-\varphi+s\pi/2} \dots (19)$$

$$(v) \quad d^2\xi_1/d\tau_1^2|_{\tau_1=s\pi/2} = -d^2\xi_2/d\tau_2^2|_{\tau_2=(1-s)\pi/2} \dots (20)$$

式(14)と式(18), (19)から

$$A_0 = \frac{E}{(\omega_1/\omega)\{(\omega_1/\omega)^2 - 1\}} \cdot \frac{\sin s\pi/2 \cdot \sin \varphi}{\sin\left(\frac{s\pi}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right)} \dots (21)$$

$$B_0 = -\frac{E}{(\omega_1/\omega)\{(\omega_1/\omega)^2 - 1\}} \cdot \frac{\cos s\pi/2 \cdot \cos \varphi}{\cos\left(\frac{s\pi}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right)} \dots (22)$$

式(16), (17), (20)に式(5), (14), (15)および式(21), (22)を代入して少し計算すると

$$\beta/E = \frac{\sin \frac{s\pi}{2} \cos \varphi}{(\omega_1/\omega)^2 - 1} - \frac{\tan\left(\frac{s\pi}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right)}{\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)\left\{\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 - 1\right\}} \cos \frac{s\pi}{2} \cos \varphi \dots (23)$$

$$\Delta F/k_1 E = \frac{\sin \varphi}{(\omega_1/\omega)^2 - 1} \left\{ \cos s\pi/2 - \frac{\sin s\pi/2}{(\omega_1/\omega) \tan\left(\frac{s\pi}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right)} \right\} \dots (24)$$

$\tan \varphi =$

$$\frac{\sin s\pi/2 - (\omega_1/\omega) \tan\left(\frac{s\pi}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right) \cdot \cos s\pi/2}{-\cos s\pi/2 + (\omega_1/\omega) \sin s\pi/2 / \tan\left(\frac{s\pi}{2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}\right)} \dots (25)$$

よって、 $\Delta F/k_1 E, \omega_1/\omega$ が与えられれば、式(24)に式(25)を代入して φ を消去し、この超越方程式を解くことから s が求まる。この s と式(25)から φ が求まるから、式(23)により β が決定する。次にこの s, φ, β を式(9), (10)さらに式(11)に代入することから a_{2m+1}, b_{2m+1} が定まり結局式(12)より $F'(\theta)$ が求まることになる。

4. 運動方程式の解およびトルク積

式(1)の二つの非線形項のうち摩擦トルク $F(x - \dot{x})$ は $F'(\theta)$ により線形化された。残る $T(y - x)$ は、 J_1 と J_2 との衝突時にだけ J_1, J_2 に作用する衝撃的な励振トルクである。ここで第1報にならって、三角波形の衝撃トルクが作用するものとし、その場合の回帰式による解析解を求めることにする。記号は一般に第1報と同一とし、本報で求めた摩擦トルク $F'(\theta)$ を第1報の摩擦トルク $F'(\theta)$ と置き換えれば、 s 回めの衝突以後の J_1, J_2 の角変位 x, y, s 回めの衝突時刻 $\bar{\theta}_s$ および s 回めの衝突のトルク積 I_s は第1報の結果を利用して次の式で与えられる。

$$x = e^{-\gamma\kappa\theta} \{A \sin q\theta + D \cos q\theta\} + B \sin(\theta + \delta) - \gamma\lambda + \frac{2\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \{S(\theta) - \bar{S}(\theta)\} / \psi_m (2m+1) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \{a_{2m+1} S'(\theta) - b_{2m+1} C'(\theta)\} / \psi_m + \frac{Hn^2}{\{(\gamma\kappa)^2 + q^2\}^2} \sum_{i=1}^s \rho_i I_i e^{-\gamma\kappa(\theta - \bar{\theta}_i)} \times \left[F_1 \{[(\gamma\kappa)^2 - q^2] \sin q(\theta - \bar{\theta}_i) + 2\gamma\kappa q \cos q(\theta - \bar{\theta}_i)\} + F_2 \{[(\gamma\kappa)^2 - q^2] \cos q(\theta - \bar{\theta}_i) - 2\gamma\kappa q \sin q(\theta - \bar{\theta}_i)\} \right] \dots (26)$$

$$y = (1 - e^{-c\theta}) (\dot{y}_0 + 1/2) / c + y_0 - \theta/2 - \frac{1}{c\omega J_2} \sum_{i=1}^s \rho_i I_i \left\{ 1 - \frac{n^2}{c^2} e^{-c(\theta - \bar{\theta}_i)} \times (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \right\} \dots (27)$$

ただし

$$\omega_0 = \sqrt{k_1/J_1}, \quad \lambda = \omega/\omega_0 = 1/\kappa, \quad \gamma = C_1/2\sqrt{J_1 k_1}, \quad q = \kappa\sqrt{1 - \gamma^2}, \quad c = C_2/J_2\omega, \quad \delta = \tan^{-1}(-2\gamma\lambda/1 - \lambda^2) \\ \tan p_m = 2\gamma\lambda(2m+1)/\{1 - \lambda^2(2m+1)^2\}, \quad \psi_m = \sqrt{[1 - \lambda^2(2m+1)^2]^2 + [(2m+1)2\gamma\lambda]^2}, \quad H = \lambda/J_1\omega\sqrt{1 - \gamma^2}$$

$$A = \{\gamma(x_0 - B \sin \delta + \gamma\lambda) + \lambda(\dot{x}_0 - B \cos \delta)\} /$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1-\gamma^2} - \frac{2\Delta F}{\pi k_1 \sqrt{1-\gamma^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\phi_m} \left[\frac{\gamma \{S(0) - \bar{S}(0)\}}{2m+1} \right. \\
& \left. + \lambda \{C(0) - \bar{C}(0)\} \right] - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\phi_m} \\
& \times \left[\begin{aligned} & a_{2m+1} \{\gamma S'(0) + \lambda(2m+1)C'(0)\} \\ & + b_{2m+1} \{\gamma C'(0) + \lambda(2m+1)S'(0)\} \end{aligned} \right] \\
D = & x_0 - B \sin \delta + \gamma \lambda \\
& - \frac{2\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\phi_m(2m+1)} \{S(0) - \bar{S}(0)\} \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\phi_m} \{a_{2m+1} S'(0) - b_{2m+1} C'(0)\}
\end{aligned}$$

$$B = E / \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\gamma\lambda)^2}$$

$$F_1 = (e^{-\gamma\kappa/n} + e^{\gamma\kappa/n}) \cos q/n - 2$$

$$F_2 = (e^{-\gamma\kappa/n} - e^{\gamma\kappa/n}) \sin q/n$$

$$S(\theta) = \sin\{(2m+1)(\theta + \varphi + s\pi/2) - p_m\}$$

$$C(\theta) = \cos\{(2m+1)(\theta + \varphi + s\pi/2) - p_m\}$$

$$\bar{S}(\theta) = \sin\{(2m+1)(\theta + \varphi - s\pi/2) - p_m\}$$

$$\bar{C}(\theta) = \cos\{(2m+1)(\theta + \varphi - s\pi/2) - p_m\}$$

$$S'(\theta) = \sin\{(2m+1)(\theta + \varphi) - p_m\}$$

$$C'(\theta) = \cos\{(2m+1)(\theta + \varphi) - p_m\}$$

また, $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ は J_1, J_2 の初期変位および初速度である。

次に, s 回めの衝突発生時刻 $\bar{\theta}_s$, および衝撃の大きさを表すトルク積 I_s を定める式は

$$\begin{aligned}
& (1 - e^{-c\bar{\theta}_s})(\dot{y}_0 + 1/2) + y_0 - \bar{\theta}_s/2 - \frac{1}{c\omega J_2} \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i \\
& \times \left\{ 1 - \frac{n^2}{c^2} e^{-c(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \times (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \right\} = \varepsilon \rho_s \\
& + e^{-\gamma\kappa\bar{\theta}_s} \{A \sin q\bar{\theta}_s + D \cos q\bar{\theta}_s\} + B \sin(\bar{\theta}_s \\
& + \delta) + \frac{2\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \{S(\bar{\theta}_s) - \bar{S}(\bar{\theta}_s)\} / \{\phi_m(2m \\
& + 1)\} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\phi_m} \{a_{2m+1} S'(\bar{\theta}_s) \\
& - b_{2m+1} C'(\bar{\theta}_s)\} - \gamma\lambda + \frac{Hn^2}{\{(\gamma\kappa)^2 + q^2\}^2} \\
& \times \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i e^{-\gamma\kappa(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \times [F_1 \{(\gamma\kappa)^2 - q^2\} \\
& \times \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) + 2\gamma\kappa q \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \\
& + F_2 \{(\gamma\kappa)^2 - q^2\} \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \\
& - 2\gamma\kappa q \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)] \dots\dots\dots (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_s = & \frac{1+e_0}{\rho_s} \{(\dot{y}_0 + 1/2)e^{-c\bar{\theta}_s} - 1/2 - \frac{n^2}{\omega J_2 c^2} (e^{-c/n} \\
& + e^{c/n} - 2) \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i e^{-c(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} - e^{-\gamma\kappa\bar{\theta}_s} \{ (qA \\
& - \gamma\kappa D) \cos q\bar{\theta}_s - (\gamma\kappa A + qD) \sin q\bar{\theta}_s \} \\
& - B \cos(\bar{\theta}_s + \delta) - \frac{2\Delta F}{\pi k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \{C(\bar{\theta}_s) - \bar{C}(\bar{\theta}_s)\} / \\
& \phi_m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)}{\phi_m} \{a_{2m+1} C'(\bar{\theta}_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_{2m+1} S'(\bar{\theta}_s)\} / \phi_m + \frac{Hn^2}{(\gamma\kappa)^2 + q^2} \\
& \times \sum_{i=1}^{s-1} \rho_i I_i e^{-\gamma\kappa(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} [F_1 \{q \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \\
& + \gamma\kappa \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)\} - F_2 \{q \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \\
& - \gamma\kappa \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)\}] / [n^2(e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) / \\
& \omega J_2 c^2 - Hn^2(F_1 q + F_2 \gamma\kappa) / \{(\gamma\kappa)^2 + q^2\}] \\
& \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

5. 解析結果

5.1 振動系の諸元 計算に用いた数値は, 第1報の場合と同じく, $J_1 = 2.72 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2 = 1.12 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\omega = 1.26 \times 10^2 \text{ rad/s}$, $E = 0.0256 \text{ rad}$, $\varepsilon = 8 \times 10^{-4} \text{ rad}$, 反発係数 $e_0 = 0.91$ でいずれも実測値である。また, フーリエ級数の項数は $m = 20$, $j = 10$ とし, n の値は第1報と同じ理由から $n = 70$ とした。

5.2 固着すべり運動発生の確認 図4は解析解による波形の一例で $k_1 = 29.4 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, $\Delta F = 1.18 \text{ N} \cdot \text{m}$ とした場合のものである。図5は第1報で述べた実験, 図6はルンゲ・クッタ・ジル法を用いた直接積分によるシミュレーションから得た波形で, 諸元は図4の場合と同じである。図4, 5および図6の(a)~(c)などの波形はそれぞれ互いに対応している。なお, 図4において時間軸は, 実験およびシミュレーションとの比較の便宜上実時間に直してある。図5の相対変位 $z-x$ の波形は, ノイズと見られる波を含んでいるが近似的には頭の平らな正弦波状の波形といえる。平らな部分は相対変位が時間に関して一定であることを意味し, 固着が生じていることを示している。図6の $z-x$ も頭の平らな正弦波状の波形で, この平らな区間で相対速度 $dz/dt - dx/dt$ が零であり固着が生じているのが分かる。図4では相対速度 $dz/d\theta - dx/d\theta$ と摩擦トルク F/k_1 の波形を比較すると摩擦トルクから分かる固着区間では相対速度が零に一致していないが, これは衝突を無視した摩擦トルクを用いたためである。しかし, この区間の相対速度は連続すべりの区間に比べて零に近い値となっていることが分かる。また図4, 5および図6の速度波形より, 強制角変位一サイクル中に多数回の衝突が生じ, その都度微小な速度変動が生じていることが分かる。

5.3 摩擦トルクとすべり率の関係 図7は, $\omega/\omega_1 = 1.44$ の場合の無次元摩擦トルクとすべり率 s との関係を示したものである。実験での s の値は図5の波形において $z-x$ が一定となる時間を3周期にわたって読取り, 周期との比から求めたものである。シミュレーションでの s の値は図6の波形において, z

図4 解析解による波形

図5 実験による波形

$\dot{x}$ が零である時間を3周期にわたって読取り周期との比として求めたものである。固着すべり運動が発生しはじめる $\Delta F/k_1 E$ の値は解析値、シミュレーション解ともほぼ一致している。固着すべり運動の発生する領域では $\Delta F/k_1 E$ の増加にともない解析解と実験値、シミュレーション解に差が生じている。これは解析解が一停滞の固着すべり運動を仮定しているのに対し、実験およびシミュレーションでは大局的には一停滞運動となるが衝突による短いつべりも加わるためである。なお実験値はノイズを含んだ波形からの読取りであるため、精度は低いと思われる。

5.4 摩擦トルクとトルク積の和の関係 図8は振動数比 ω/ω_1 をパラメータとし、無次元摩擦トルク $\Delta F/J\omega^2 E$ とトルク積の和 ΣI_i の関係を示すものである。図8から、トルク積の和を小さくするためには $\omega/$

図6 シミュレーションによる波形

図7 摩擦トルクとすべり率の関係

ω_1 が1に近い場合は摩擦トルクを大きくすることは有効であるが, ω/ω_1 が1.5程度になると摩擦トルクの値はトルク積の和にあまり影響しないことが分かる。

5.5 摩擦トルクと近似一自由度系の振幅倍率の関係 図9は振動数比 ω/ω_1 をパラメータとし無次元摩擦トルク $\Delta F/J\omega^2 E$ と3.1節に述べた近似一自由度系の振幅倍率 ξ_0/E (ただし ξ_0 は $J=J_1+J_2$ の振幅)

図8 摩擦トルクとトルク積の和の関係

図9 摩擦トルクと近似一自由度系の振幅倍率の関係

の関係を示すものである。図9の求め方を簡単に述べると, 摩擦トルク ΔF , ばね定数 k_1 を与えると式(23)~(25)から s, φ, β が定まる。この値を式(5), (14), (15)に代入すると J の角変位が定まる。図8と図9を比較すると $\Delta F/J\omega^2 E$ が0.8程度より大きい時には ω/ω_1 の値によらず, すべての曲線がほぼ一致し, 0.8程度より小さい時は ω/ω_1 の違いによる曲線の変化の様子がよく似ていることが分かる。 J の振幅が大きくなれば, 歯面間の衝撃も大きくなると考えられるのでトルク積の和と近似一自由度系の振幅倍率の曲線が似ていることは, 物理的に納得できる。そこで衝撃の大きさをトルク積の和で評価する代わりに, 近似一自由度系の振幅倍率で評価することが考えられる。

5.6 近似一自由度系の振幅倍率曲線 近似一自由度系の振幅倍率の計算はトルク積の和の計算よりも簡単であり, さらに振幅倍率は図10のような一般的な表し方ができるので衝撃に及ぼす諸因子の影響を調べるのに便利である。図10は図9と同様に求められ, 図10において横軸の値 ω/ω_1 を一定にした場合の縦軸に平行な断面が図9に相当する。図10を用いると J, E, ω があらかじめ与えられている時, ばね定数 k_1 を与えれば振動数比 ω/ω_1 が定まり, 図10より振幅倍率 ξ_0/E を小さくする摩擦トルクの値が求められる。この摩擦トルクの値においてトルク積の和, すなわち衝撃の大きさも小さくなると考えられる。図10の下側破線は連続すべり運動発生領域と固着すべり運動発生領域との境界を示し, この破線の下側で連続すべり運動が発生する。上側の破線は, 固着すべり運動と固着運動との境界を表し, この破線の上側で固着運動が発生する。固着すべり運動の発生する領域は両破線間の範囲である。共振点に近い範囲では固着すべり運動領域に振幅倍率を最小とする摩擦トルクが存在することが分かる。

図10 近似一自由度系の振幅倍率曲線

6. 結 論

がたと摩擦のある二自由度系の強制ねじり振動について摩擦部に固着すべりが生ずる場合を取り上げ、解析解を誘導した。またその解と実験およびシミュレーション解とを比較した。その結果、次の結論が得られた。

(1) 摩擦トルクの大きさのある範囲内において、入力歯車が周期的な固着すべり運動を行うことが、実験、シミュレーションおよび解析解により分かった。

(2) 固着すべり運動中も強制振動半サイクルごとに、がたの片側と多数回当たる衝突の発生していることが実験、シミュレーションおよび解析解により確認された。

(3) 摩擦トルクが小さい時は、強制変位の角振動数が近似一自由度系の固有角振動数に近づくにつれて、トルク積の和は著しく大きくなった。摩擦トルクが大きい時は、両振動数が近づいても、トルク積の和はほとんど変化しない。

(4) トルク積の和の代わりに近似一自由度系の振

幅倍率を用いて衝撃の大きさを評価できると考えられる。

(5) 近似一自由度系の振幅倍率を与える一般的な図を得た。

(6) 強制変位に比較して小さながたを有し、摩擦の作用する衝突振動問題について、回帰式による解法は有効であることが分かった。

文 献

- (1) 片岡・大野・鈴木, 機論, 52-481, C (昭61), 2350.
- (2) 前澤・ほか3名, 機論, 43-368 (昭52), 1357.
- (3) 片岡・前澤・杉本, 機論, 44-381 (昭53), 1503.
- (4) Den Hartog, J. P., *Trans. ASME, Ser. E*, 53-9 (1974), 107.
- (5) 中西・亘理・佐藤, 東京大学宇宙航空研究所報告, 22-317 (昭19), 1944.
- (6) 例えば, Sakai, T., ほか4名, *SAE Paper*, 810773 (1981).
- (7) 例えば, 大沼・ほか3名, 手動変速機のアイドル騒音に及ぼすクラッチ振り特性の影響, 自技会, 832 A 44 (昭59), 275.
- (8) 片岡・大野・鈴木, 機論, 52-474, C (昭61), 431.
- (9) 片岡・大野・鈴木, 機論, 52-475, C (昭61), 844.

討 論

〔質問〕 渡 辺 武〔山梨大学教育学部〕

(1) フーリエ級数の項数を $m=20$, $j=10$ としているが、計算の手数の問題もあり、なるべく少なくしたいわけで、 $j=5$ 程度でもよいようにも考えられ、また実用上、項数と計算精度(解の精度)についての検討が必要と思われるが、ご検討されておられたならご教示願いたい。そしてルンゲ・クッタ・ジル法に比して計算時間はどの程度短縮できるのか。

(2) 回帰式による解法は強制変位とがたの比がどの程度に小さい場合、摩擦の作用する衝突振動問題に有効か。

〔回答〕 (1) $m=15$, $j=7$ の場合と、 $m=20$, $j=10$ の場合について摩擦トルクの波形の比較をしてみたところ、あまり大きな差は認められなかったが、念のため $m=20$, $j=10$ を用いて計算した。フーリエ級

数の係数の計算は、計算全体を通して1回だけ行えばよいので、 j の値が多少大きくても全体の計算時間にはあまり影響はない。

ルンゲ・クッタ・ジル法によるシミュレーションの計算時間は積分間隔で変るため一概には言えないが、本報に示した図(図4, 6)で言えば、本解析手法の計算時間はシミュレーション計算の計算時間より7~8%短くなっている。

(2) 本解析手法は、基本的には強制変位の振幅とがたの大きさの比 ε/E の値によらず有効である。しかし ε をいろいろ変えて計算したところ、 $\varepsilon/E=0.3$ 程度になると強制変位半周期1回当たりが生じた。当たりの回数のわかっている衝突振動は他の方法で解けるので、 $\varepsilon/E<0.3$ の範囲で本手法の特長が生かせるのではないかと考えている。