ねじれた板の自由振動*
(基礎理論)

築地 恒夫**, 末岡 禎佑***

Free Vibrations of Pre-twisted Plates
(Fundamental Theory)

Tsuneo TSUIJI and Teiyu SUEOKA

The derivation of fundamental equations of motion governing the response of a pre-twisted plate is presented. The strain-displacement relationships of pre-twisted plates are obtained under assumptions of the thin shell theory. The simplified forms of these are proposed for plates having relatively large length-width ratios and small pre-twists. Then, the principle of the virtual work of the free vibration of pre-twisted plates is formulated. The equation derived will be used to analyze the free vibrations of pre-twisted plates by the Rayleigh-Ritz procedure.

Key Words: Vibration, Free Vibration, Pre-twisted Plate, Thin Shell Theory, Principle of Virtual Work

1. はじめに

ねじれたはり、板、殻の自由振動解析は、回転機翼の振動特性解明の基礎となることから、数多くの研究成果が発表されており⁽¹⁾、長い翼の場合ははり理論によって、また、短い翼は板または殻理論による解析が行われている。中でも、はり理論による研究は、あらゆるパラメータを考慮した解析が行われ、多大な成果をあげている。これに反し、板または殻としての研究は、解析に必要な基礎方程式が導かれていないことと併せて、複雑な形状のため解析上の問題もあり、まだ十分行われていない。また、現在得られている短い翼の解析結果は、そのほとんどが有限要素法によるものであり、したがって、その値の有効性は、実験または他の解析法による結果との比較検証が必要となるであろう。

そこで、本研究では、ねじれた板の振動解析をレーレー・リッツ法で行うことを目的とし、解析に必要な基礎式を誘導する。まず、薄肉殻理論⁽²⁾に基づき、ねじれた板の変位・ひずみ関係式を導き、次に、解析に必要

な自由振動に関する仮想仕事の原理を定式化する。

2. 変位・ひずみ関係式

図1に示すように、板は x 軸回りに一定のねじれ率 k でねじれているものとする。板の中央面内に、 x 軸に垂直に y 軸を定め、 x, y 方向の単位ベクトルを i_1, i_2 とする。また、 i_1, i_2 と右手系をなし、両者に垂直な単位ベクトルを i_3 とする。したがって、 i_2, i_3 は x 軸に沿って回転するベクトルである。

板の中央面上の点 P の位置ベクトル $r_0^{(0)}$ は

$$r_0^{(0)} = xi_1 + yi_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表される。したがって、中央面上の基本ベクトル a_1, a_2 は次のようになる。

図1 ねじれた板の座標軸

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月10日。

** 正員、長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町1-14)。

*** 長崎大学工学部。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial r_1^{(0)}}{\partial x} = i_1 + ky i_3 \\ a_2 &= \frac{\partial r_2^{(0)}}{\partial y} = i_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、式(2)を導く際、セレ・フレネの公式を用いた。次に、中央面に垂直な単位法線ベクトルを a_3 とすると、

$$a_3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|} = -\frac{ky}{\sqrt{g}} i_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} i_3 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$$g = 1 + k^2 y^2 \dots\dots\dots (4)$$

である。

中央面からの距離 z にある点の位置ベクトル $r^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= xi_1 + yi_2 + za_3 \\ &= \left(x - \frac{kyz}{\sqrt{g}}\right) i_1 + yi_2 + \frac{z}{\sqrt{g}} i_3 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

となり、 (x, y, z) 座標系での基本ベクトル $g_i (i=1, 2, 3)$ は次のようになる。

$$g_1 = \frac{\partial r^{(0)}}{\partial x} = i_1 - \frac{kz}{\sqrt{g}} i_2 + ky i_3$$

表 1 $\partial a^k / \partial y^i$ の値

$i \backslash k$	1	2	3
1	$\frac{1}{\sqrt{g}(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2})}$	$\frac{kz}{g(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2})}$	0
2	$\frac{kz}{g\sqrt{g}(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2})}$	$\frac{1}{(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2})}$	0
3	0	0	1

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{\partial r^{(0)}}{\partial y} = -\frac{kz}{g\sqrt{g}} i_1 + i_2 - \frac{k^2 yz}{g\sqrt{g}} i_3 \\ g_3 &= \frac{\partial r^{(0)}}{\partial z} = -\frac{ky}{\sqrt{g}} i_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} i_3 \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

変位ベクトル U の $a_i (i=1, 2, 3)$ 方向成分を $U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$ とすると、

$$U = Ua_1 + Va_2 + Wa_3 \dots\dots\dots (7)$$

したがって、任意点の変位後の位置ベクトル r は

$$r = r^{(0)} + U = \left(x - \frac{kyz}{\sqrt{g}} + U - \frac{ky}{\sqrt{g}} W\right) i_1 + (y + V) i_2 + \left(\frac{z}{\sqrt{g}} + kyU + \frac{1}{\sqrt{g}} W\right) i_3 \dots\dots\dots (8)$$

となる。また、 r の x, y, z による微分 $G_i (i=1, 2, 3)$ は、それぞれ次のようである。

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\partial r}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x}\right) i_1 + \left(-\frac{kz}{\sqrt{g}} - k^2 yU + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k}{\sqrt{g}} W\right) i_2 \\ &\quad + \left(ky + ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x}\right) i_3 \\ G_2 &= \frac{\partial r}{\partial y} = \left(-\frac{kz}{g\sqrt{g}} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y}\right) i_1 + \left(1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right) i_2 \\ &\quad + \left(-\frac{k^2 yz}{g\sqrt{g}} + kU + ky \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y}\right) i_3 \dots\dots\dots (9) \\ G_3 &= \frac{\partial r}{\partial z} = \left(-\frac{ky}{\sqrt{g}} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z}\right) i_1 + \frac{\partial V}{\partial z} i_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} + ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z}\right) i_3 \end{aligned}$$

式(6), (9)を用い、ひずみテンソル $f_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ が次式より求まる。

$$2f_{ij} = G_i \cdot G_j - g_i \cdot g_j \dots\dots\dots (10)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} f_{11} &= g \frac{\partial U}{\partial x} + k^2 yV + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(k^2 yU - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{k}{\sqrt{g}} W\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - k^2 yU - \frac{k}{\sqrt{g}} W\right)^2 + \left(ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \right] \\ f_{22} &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{k^2 y}{g} U + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(kU + ky \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \right] \\ f_{33} &= \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2f_{12} = & g \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2k}{\sqrt{g}} W - \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} V \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - k^2 y U - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \frac{\partial V}{\partial y} \\
& + \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right. \\
& \left. - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \left(ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(kU + ky \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
2f_{13} = & g \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{k}{\sqrt{g}} V - \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\
& + \left(ky \frac{\partial U}{\partial x} + kV + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} \right) \left(ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - k^2 y U - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \frac{\partial V}{\partial z} \\
2f_{23} = & \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{k}{\sqrt{g}} U - \frac{kz}{\sqrt{g}} \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} W - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + \left(kU + ky \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} W + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial y} \right) \left(ky \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

である。式(11)中アンダーラインを付した項は変位の2次項であり、以下の微小振動においては無視する。しかし、遠心力場における振動を解析する場合には無視できない項である。

式(11)のひずみを、直交直線座標系に関するひずみに変換するため、板内の任意点において、局部直交直線座標軸 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ をベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 方向に設け、それぞれの方向の単位ベクトルを $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ とする。

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{i}_1 + \frac{ky}{\sqrt{g}} \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{j}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} = \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{j}_3 = \frac{\mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_3|} = -\frac{ky}{\sqrt{g}} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{i}_3 \tag{12}$$

($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) 座標系におけるひずみテンソル e_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) は、次式から計算される⁽²⁾。

$$2e_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \alpha^k}{\partial y^i} \frac{\partial \alpha^l}{\partial y^j} \cdot 2f_{kl} \tag{13}$$

ここに、

$$\frac{\partial \alpha^k}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^3 g^{kj} (\mathbf{j}_i \cdot \mathbf{g}_j) \tag{14}$$

であり、 g^{kj} は次式に示すとおりである。

$$[\mathbf{g}^{kj}] = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 \\ & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 \\ \text{対称} & & \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g \left(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2} \right)^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k^2 z^2}{g^2} & \frac{2kz}{\sqrt{g}} & 0 \\ \frac{2kz}{\sqrt{g}} & g \left(1 + \frac{k^2 z^2}{g^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & g \left(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2} \right)^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

式(15)を用い、 $\partial \alpha^k / \partial y^i$ の値を式(14)から求め、表1に示す。

($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) 座標系でのひずみ成分は、変換公式(12)を用いると、それぞれ次のようである。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = e_{11} &= \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V + \frac{kz}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} U - \frac{k}{g\sqrt{g}} W \right) \right] \\
\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} = e_{22} &= \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - k^2 y U - \frac{k}{\sqrt{g}} W \right) \right], \quad \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = e_{33} = \frac{\partial W}{\partial z} \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} = 2e_{12} &= \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\sqrt{g} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2k}{g} W + \frac{kz}{g} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} V + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \\
\varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} = 2e_{13} &= \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\sqrt{g} \left(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2} \right) \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{k}{g} V + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{kz}{g} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
\varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} = 2e_{23} &= \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\left(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2} \right) \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{k}{\sqrt{g}} U + \frac{kz}{g\sqrt{g}} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} V + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

薄板を対象にすると、変形前中央面に垂直な直線は、変形後も変形した中央面に垂直であり、しかも、伸び縮みしないと仮定することができる。変形した板の中央面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は、変位の2次項を無視すると、

$$n = \frac{(G_1 \times G_2)_{z=0}}{|(G_1 \times G_2)_{z=0}|}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(ky + ky \frac{\partial u}{\partial x} + ky \frac{\partial v}{\partial y} + kv + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) i_1 - \left(\frac{k}{\sqrt{g}} u + \frac{\partial w}{\partial y} \right) i_2$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{ky}{\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) i_3 \dots \dots \dots (17)$$

となる。ここに、 u, v, w は中央面上の点の $a_i (i=1, 2, 3)$ 方向変位で、 x, y の関数である。ベクトル n の $a_i (i=1, 2, 3)$ 方向成分を $\Gamma_i (i=1, 2, 3)$ とすると、式(17)より、

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{k}{\sqrt{g}} v \right), \quad \Gamma_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k}{\sqrt{g}} u \right), \quad \Gamma_3 = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{k^2 y}{g} v = 1 \dots \dots \dots (18)$$

である。したがって、変位ベクトル U が

$$U = Ua_1 + Va_2 + Wa_3 = (u + z\Gamma_1)a_1 + (v + z\Gamma_2)a_2 + [w + z(\Gamma_3 - 1)]a_3 \dots \dots \dots (19)$$

と表され、ねじれた板の任意点の変位 U, V, W は、次式のように板の中央面上の点の変位 u, v, w で表される。

$$U = u - \frac{z}{g} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{k}{\sqrt{g}} v \right), \quad V = v - z \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k}{\sqrt{g}} u \right), \quad W = w \dots \dots \dots (20)$$

変位成分、式(20)を変位・ひずみ関係式(16)に代入すると、 u, v, w で表現されたひずみ成分が導かれる。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} v - z \left(\frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k^2}{g^2} w \right) \right.$$

$$\left. - z^2 \frac{k}{g} \left(\frac{k}{g} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2k^3 y}{g^2} v + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2}{g^2} w \right) \right.$$

$$\left. - z^2 \frac{k}{g} \left(\frac{k}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{k^3 y}{g^2} v + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{g^2}{g^2 - k^2 z^2} \left[\sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2k}{g} w - 2z \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{2k^3 y}{g^2} v - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right.$$

$$\left. - z^2 \frac{k}{g} \left(\frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{zx} = 0 \dots \dots \dots (21)$$

なお、回転機翼のねじれ角は 90° 以下であり、しかも薄肉であることから、 $1 - k^2 z^2 / g^2 \approx 1$ と近似できる。したがって、式(21)中アンダーラインを付した項も無視する。さらに、ねじれ率が小さく、比較的長い翼に対しては、 $g = 1 + k^2 y^2 \approx 1$ と近似することができ、その結果、ひずみ・変位関係式が簡単化されて、以後の数値計算が容易になる。

3. 自由振動に関する仮想仕事の原理

板の自由振動に関する仮想仕事の原理は次のようである⁽³⁾。

$$\delta \Pi = \iiint_m \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \nu (\varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy} \delta \varepsilon_{xx}) + \frac{1 - \nu}{2} \varepsilon_{xy} \delta \varepsilon_{xy} \right] dm$$

$$+ \int_s [F_x(s) \delta u + u \delta F_x(s) + F_y(s) \delta v + v \delta F_y(s)] ds + [R \delta w + w \delta R]_{x=x_r, y=y_r}$$

$$+ \int_s [Q(s) \delta w + w \delta Q(s)] ds + \int_s \left[M(s) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \beta \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \beta \right) \delta M(s) \right] ds$$

$$- \iiint_m \gamma \omega^2 U \delta U dm = 0 \dots \dots \dots (22)$$

ここに、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 γ は密度、 ω は角振動数、 R はラグランジュ乗数、 $F_x(s), F_y(s), Q(s), M(s)$ はラグランジュ乗数関数で、板の固定辺に沿った長さ s の関数、 α, β は同辺の外向き法線方向余弦である。式(22)の第1項は応力のなす仮想仕事、第6項は慣性力のなす仮想仕事である。第2～第5項は、解析に使用する仮定変位が、固定辺での固定条件を満たさない場合の拘束条件で、第2項は固定辺において x, y 方向変位を零とする条件、第3項は点 (x_r, y_r) の z 方向変位を零、第4, 5項は固定辺の z 方向変位、および同辺に垂直方向のたわみ角を零にする拘束条件である。微小体積 dm は

$$dm = \sqrt{g} \left(1 - \frac{k^2 z^2}{g^2} \right) dx dy dz \dots \dots \dots (23)$$

と表されるが、ひずみの場合と同じ理由で、()内の第2項は無視する。

式(22)に式(21)、(19)を代入し、板厚方向の積分を行うと、ねじれた板の自由振動に関する仮想仕事の原理は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \iint_A \left[H \sqrt{g} \left(\Omega_x \delta \Omega_x + \Omega_y \delta \Omega_y + \nu \Omega_x \delta \Omega_y + \nu \Omega_y \delta \Omega_x + \frac{1-\nu}{2} \Omega_{xy} \delta \Omega_{xy} \right) \right. \\ & + D \sqrt{g} \{ \Gamma_x \delta \Gamma_x - \Phi_x \delta \Omega_x - \Omega_x \delta \Phi_x + \Gamma_y \delta \Gamma_y - \Phi_y \delta \Omega_y - \Omega_y \delta \Phi_y \\ & + \nu (\Gamma_x \delta \Gamma_y + \Gamma_y \delta \Gamma_x - \Phi_x \delta \Omega_y - \Omega_y \delta \Phi_x - \Phi_y \delta \Omega_x - \Omega_x \delta \Phi_y) \\ & \left. + (1-\nu) (\Gamma_{xy} \delta \Gamma_{xy} - \Phi_{xy} \delta \Omega_{xy} - \Omega_{xy} \delta \Phi_{xy}) / 2 \right] dx dy \\ & + \int_s [F_x(s) \delta u + u \delta F_x(s) + F_y(s) \delta v + v \delta F_y(s)] ds + [R \delta w + w \delta R]_{x=x_r, y=y_r} \\ & + \int_s [Q(s) \delta w + w \delta Q(s)] ds + \int_s \left[M(s) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \beta \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \beta \right) \delta M(s) \right] ds \\ & - \iint_A \gamma \omega^2 t \sqrt{g} (gu \delta u + v \delta v + w \delta w) dx dy = 0 \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

ここに、 t は板厚、 $H = Et/(1-\nu^2)$ は面内剛性、 $D = Et^3/12(1-\nu^2)$ は曲げ剛性である。式(24)を導くにあたり、 z に関する3次以上の項、および回転慣性項を無視した。式(24)中の $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_{xy}, \Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{xy}, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_{xy}$ は次に示す関数である。

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} v, \Omega_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \Omega_{xy} = \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2k}{g} w \\ \Gamma_x &= \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k^2}{g^2} w, \Gamma_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2}{g^2} w \\ \Gamma_{xy} &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{2k^3 y}{g^2} v - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \Phi_x = \frac{k}{g} \left(\frac{k}{g} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \Phi_y &= \frac{k}{g} \left(\frac{k}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{k^3 y}{g^2} v + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \Phi_{xy} = \frac{k}{g} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

レーレー・リッツ法によるねじれた板の自由振動解析に、式(24)が使用される。

ひずみ・変位関係をもとに、ねじれた板の自由振動に関する仮想仕事の原理を定式化し、レーレー・リッツ法による振動解析の基礎式を提案した。

4. お わ り に

本報では、ねじれた板の自由振動解析に必要な基礎的な関係式を誘導した。

まず、薄肉殻理論に従って、ねじれた板の変位・ひずみ関係式を導き、長さが比較的長く、ねじれ率が小さい板に適用できる近似式を提示した。次に、得られた

文 献

- (1) Leissa, A., *Appl. Mech. Rev.*, 34-5 (1981), 623.
- (2) Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd Ed., (1975), 76, Pergamon Press.
- (3) 築地・山下, 機論, 51-470, C (昭60), 2636.