並列構造物の制振法に関する研究* (P, T, Q 定点理論による方法)

岩浪孝一**, 鈴木浩平***, 背戸一登****

Studies of the Vibration Control Method of Parallel Structures (The Method by the Theory of P, T, Q)

Kouichi IWANAMI, Kouhei SUZUKI, and Kazuto SETO

The purpose of this paper is to propose a vibration control method of structures which are designed in parallel. In this control method, the optimum adjustment is analyzed under the consideration of the structure being a part of the damping system. The analyses are made under the following approximation, that is, the structure is composed of a mass and a spring, and vibrates as a one-degree-of-freedom model. In this paper, two vibration models are dealt with. The first model is composed of the two structures which are connected with a damper, and the second model is composed of the three structures which are connected with two dampers. From the analysis, it became clear that the Theory of P, Q and the Theory of P, T, Q are useful as the optimum adjusting method of the parallel structures connected with damping elements.

Key Words: Vibration, Vibration Control Method, Optimum Design, Parallel Structures

1. 緒 論

建造物や機械系およびその支持構造系,さらにはプラントなどにおける配管系も,基本的には質量とばねとで構成された系の複合体としてモデル化できる。これらの構造物が地震など外部からの強制励振によって振動破壊するのを防止するため,振動絶縁器を取付けたり,吸振器を組み込むなどの対策がとられている。これらの対策は,モード振動を考慮する複雑な構造系や複数の構造物から成るシステムを対象とする場合も含め,各共振系個々に,独立に行われているのが通例である。

これに対し,並列に設計された構造物を対象とする場合には,構造物自体を吸振装置の一部とみなし,構造物の相互の動きを利用して制振効果を得る方法が考えられ,具体例としては,並列する構造物をダンピング要素で相互に結合する制振方法があげられる⁽¹⁾。

本研究は,この制振方法に着目し,質量とばねでモ

デル化した並列構造物をダンパで相互に結合し,それぞれの構造物を同時に,最適に制振する最適調整法を解析する。

初めに,2個並列に設計される塔状構造物を1個のダンパで結合して制振する場合について解析を行った。この場合は二質点系であるので,P,Q 定点理論を応用したところ,各構造物を最適に調整するのが可能であることが明らかになり,合せて最適調整式および設計資料を求めた。

次に,3組の並列な塔状構造物を2個のダンピング要素で結合した場合について解析を行った。最適調整の解析にあたり,著者らが提案するP,T,Q 定点調整法⁽²⁾を応用すると,調整が容易に行えることを明らかにし,合せて最適調整条件および調整式を導いた。

なお,この調整を行う場合,構造物の質量の組合せ方によっては,P,T,Q 点理論を適用できない場合が生じるが,このような場合に対してもP,Q 点理論を加味して調整することにより,最適調整が可能となることを明らかにした。

2. 2組の並列構造物について

2-1 振動モデル 図1(a)に示すような質量とばねとで構成される2組の塔状構造物が並列に存在す

* 昭和61年8月22日 第938回講演会において講演,原稿受付 昭和61年3月14日。

** 正員,東京都立工業高等専門学校(〒140 東京都品川区東大井1-10-40)。

*** 正員,東京都立大学工学部(〒158 東京都世田谷区深沢2-1-1)。

**** 正員,防衛大学校(〒239 横須賀市走水1-10-20)。

る場合を考える。ここで構造物のモード振動は考えず、集中定数系とした一自由度系に近似できると仮定し、各々の質量を1個のダンパで図1(b)のように結合した場合について解析を行う。これを力学モデルで表すと図2となる。

2.2 理論解析

2.2.1 運動方程式と変位振幅比 図2について運動方程式を求めると式(1)となる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k_1(u - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k_2(u - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで系が調和振動するものと仮定し、 $x_1 = X_1 e^{j\omega t}$, $x_2 = X_2 e^{j\omega t}$, $u = U e^{j\omega t}$ と表し、基礎の水平強制変位の振幅 U に対する各質量の変位振幅 X_1 , X_2 の比を求めると、式(2), (3)となる。

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) \left\{ 1 + \mu \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right\} \right\}^2 \right]} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left| \frac{X_2}{U} \right| = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) \left\{ 1 + \mu \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right\} \right\}^2 \right]} \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta = \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 - 1 \right\}^2 \left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right\}^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right) \right]^2$$

図1 2組の並列構造物と振動モデル

図2 2組の並列構造物の力学モデル

$$\times \left[- (1 + \mu) \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + \left\{ 1 + \mu \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right\} \right]^2$$

ただし、固有振動数: $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$, $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$

質量比: $\mu = m_2/m_1$

減衰率: $\zeta = c/2\sqrt{m_2 k_2}$

固有振動数比: $\gamma = \omega_2/\omega_1$

2.2.2 最適調整条件 この振動系を最適に制振する最適調整条件を求める。調整にあたり、P, Q 定点理論の応用を検討する。

まず減衰率 ζ を 0, ∞ とした二つの条件における $|X_1/U|$, $|X_2/U|$ の式を求めると式(4)~(6)となる。

(i) $\zeta = 0$ の時

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left| \frac{X_2}{U} \right| = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \dots\dots\dots (5)$$

(ii) $\zeta = \infty$ の時

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \left| \frac{X_2}{U} \right| = \frac{\omega_d^2}{\omega_d^2 - \omega^2} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $\omega_d = \omega_1 \sqrt{1 + \mu(\omega_2/\omega_1)^2} / (1 + \mu) \dots\dots (7)$

つぎに、 $\omega_1 < \omega_2$ と仮定し、式(4)~(6)を図で示すと図3, 4となる。ここで式(4)と(6)の交点をP点、式(5)と(6)の交点をQ点と定義する。図3には、減衰率 ζ を 0 から ∞ まで変化させた時の変位振幅比 $|X_1/U|$ の変化を示すが、この曲線はすべてP点を通る。同様に、図4は、 ζ を 0 から ∞ まで変化させた時の振動比 $|X_2/U|$ の変化を示したもので、すべての曲線はQ点を通っている。このことより、ここで定義したP, Q点は、減衰率 ζ に無関係な定点であることがわかった。

以上の解析の結果、図1に示す2組の並列構造物の最適調整法として、P, Q 定点理論を適用できることが示された。よって最適調整条件は次のように定められる。

図3 ζ をパラメータとする変位振幅比曲線と交点P

(最適調整条件)

(I) P, Q 点の高さが等しい。

(II) 変位振幅比 $|X_1/U|$, $|X_2/U|$ の曲線が、それぞれ P, Q 点において極大点を持つ。

2・2・3 最適調整条件式の導出 まず、調整条件 (I) を満足する条件式を求める。交点 P は式 (4) と (6) の交点であるから、位相を考慮して、P 点の周波数軸上の値 ω_P を求めると、

$$\omega_P = \sqrt{\frac{2\omega_1^2\omega_d^2}{\omega_1^2 + \omega_d^2}} \quad (8)$$

同様に、交点 Q は式 (5) と (6) の交点であるから、Q 点の周波数軸上の値 ω_Q を求めると、

$$\omega_Q = \sqrt{\frac{2\omega_2^2\omega_d^2}{\omega_2^2 + \omega_d^2}} \quad (9)$$

ここで、P, Q 点共に式 (6) 上の点でもあるので、位相を考慮すると、P, Q 点の高さを等しくする条件式として次式が成立する。

$$\frac{\omega_d^2}{\omega_d^2 - \omega_P^2} = -\frac{\omega_d^2}{\omega_d^2 - \omega_Q^2} \quad (10)$$

式 (7), (8), (9) を式 (10) に代入して整理すると、

$$\{(\omega_2/\omega_1)^2 - 1\} \{\mu^2(\omega_2/\omega_1)^2 - 1\} = 0$$

ここで、 $\omega_1 \neq \omega_2$ であるから、

$$\gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\mu} \quad (11)$$

すなわち、式 (11) が P, Q 点の高さを等しくする条件式である。この場合の P, Q 点の高さは、

$$\left| \frac{X_1}{U} \right|_{\omega=\omega_P} = \left| \frac{X_2}{U} \right|_{\omega=\omega_Q} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \quad (12)$$

次に、調整条件 (II) を満足する条件式を求める。

これは、式 (2), (3) を ω について微分を行い、P または Q 点を水平な接線で横切るようにすればよい。すなわち、式 (11) の成立下で、 $|X_1/U|$ の曲線が P 点で水

平な接線を持つ条件式を求めると、次のように減衰率 ζ_P の最適値は質量比 μ の関数として表される。

$$A_P \zeta_P^3 + B_P \zeta_P^2 + C_P = 0 \quad (13)$$

ただし、

$$A_P = 64\mu(\mu+1)^6(1-\mu)$$

$$B_P = 8(\mu+1)^3(-4\mu^6+12\mu^5-9\mu^4-4\mu^3+6\mu^2-1)$$

$$C_P = 16\mu^9 - 48\mu^8 + 24\mu^7 + 48\mu^6 - 39\mu^5 - 21\mu^4 + 18\mu^3 + 6\mu^2 - 3\mu - 1$$

同様に、 $|X_2/U|$ の曲線が Q 点を水平な接線で横切る時の最適な ζ_Q は次式で求められる。

$$A_Q \zeta_Q^4 + B_Q \zeta_Q^3 + C_Q = 0 \quad (14)$$

ただし、

$$A_Q = 64\mu(\mu+1)^6(\mu-1)$$

$$B_Q = 8(\mu+1)^3(-\mu^6+6\mu^4-4\mu^3-9\mu^2+12\mu-4)$$

$$C_Q = -\mu^9 - 3\mu^8 + 6\mu^7 + 18\mu^6 - 21\mu^5 - 39\mu^4 + 48\mu^3 + 24\mu^2 - 48\mu + 16$$

式 (13) または (14) が調整条件 (II) を満足する条件式である。図 5 に、式 (13) および (14) より得られる最適な ζ_P , ζ_Q およびその平均 $\bar{\zeta} = (\zeta_P + \zeta_Q)/2$ を、質量比 μ

図 5 2 組の並列構造物の最適減衰率 (計算値)

図 4 ζ をパラメータとする変位振幅比曲線と交点 Q

図 6 最適調整された 2 組の並列構造物の変位振幅比曲線

図 7 3組の並列構造物と振動モデル

をパラメータとして示す。

図 6 は、 $\mu=0.5$ の場合について、調整条件式(11)、(13)より求めた最適な γ および ζ_p を用いて描いた変位振幅比曲線である。交点 P, Q の高さは等しくそろえられており、かつ $|X_a/U|$ は P 点で極大となり、 $|X_2/U|$ は、Q 点のごく近くで極大点を持ち、最適に制振されていることがわかる。なお、 $|X_1/U|$, $|X_2/U|$ の最大振幅比は、共に 3 倍に制振されている。

3. 3組の並列構造物の制振について

3.1 振動モデル 図 7 (a) に示すような質量とばねとで構成される 3 組の塔状構造物が直線上に並列に存在する場合を考える。構造物のモード振動は考えず、集中定数系とした一自由度系に近似できると仮定し、各々の質量を 2 個のダンパで図 7 (b) のように結

図 8 3組の並列構造物の力学モデル

合した場合について解析を行う。これを力学モデルで表すと図 8 となる。

3.2 理論解析

3.2.1 運動方程式と変位振幅比 図 8 について運動方程式を求めると式(15)となる。

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} &= K(u-x) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}) \\ m_1\ddot{x}_1 &= c_1(\dot{x} - \dot{x}_1) + k_1(u - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= c_2(\dot{x} - \dot{x}_2) + k_2(u - x_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、系が調和振動するものと仮定し、 $x = Xe^{j\omega t}$, $x_1 = X_1e^{j\omega t}$, $x_2 = X_2e^{j\omega t}$, $u = Ue^{j\omega t}$ と表して基礎の水平変位振幅 U に対する各質量の変位振幅 X , X_1 , X_2 の比を求めると式(16)~(18)となる。

$$\frac{X}{U} = \frac{1}{D_a} \begin{vmatrix} K, & -jc_1\omega, & -jc_2\omega \\ k_1, & -m_1\omega^2 + k_1 + jc_1\omega, & 0 \\ k_2, & 0, & -m_2\omega^2 + k_2 + jc_2\omega \end{vmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{X_1}{U} = \frac{1}{D_a} \begin{vmatrix} -M\omega^2 + K + j(c_1 + c_2)\omega, & K, & -jc_2\omega \\ -jc_1\omega, & k_1, & 0 \\ -jc_2\omega, & k_2, & -m_2\omega^2 + k_2 + jc_2\omega \end{vmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{X_2}{U} = \frac{1}{D_a} \begin{vmatrix} -M\omega^2 + K + j(c_1 + c_2)\omega, & -jc_1\omega, & K \\ -jc_1\omega, & -m_1\omega^2 + k_1 + jc_1\omega, & k_1 \\ -jc_2\omega, & 0, & k_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

ただし、

$$D_a = \begin{vmatrix} -M\omega^2 + K + j(c_1 + c_2)\omega, & -jc_1\omega, & -jc_2\omega \\ -jc_1\omega, & -m_1\omega^2 + k_1 + jc_1\omega, & 0 \\ -jc_2\omega, & 0, & -m_2\omega^2 + k_2 + jc_2\omega \end{vmatrix}$$

ここで、一般性を持たせるため、次のような無次元項を定義する (ただし、 $\Omega = \sqrt{K/M}$, $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$).
質量比: $\mu_i = m_i/M$, 固有振動数比: $\gamma_i = \Omega/\omega_i$, 減衰率: $\zeta_i = c_i/2\sqrt{m_i k_i}$, 強制振動数比: $\lambda = \omega/\Omega$, ($i=1, 2$)
これらの無次元項を用いて式(16)~(18)を整理すると式(19)~(21)となる。

$$\begin{aligned} \frac{X}{U} &= \frac{1}{D_b} \left[\gamma_1 \gamma_2 \lambda^4 - \left\{ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\zeta_1 \zeta_2 \left(\gamma_1 \gamma_2 + \mu_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \mu_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \right\} \lambda^2 + 1 \right. \\ &\quad + j \left\{ -2 \left(\zeta_1 \gamma_1 \gamma_2^2 + \zeta_2 \gamma_2^2 \gamma_1 + \mu_1 \zeta_1 \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} + \mu_2 \zeta_2 \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \right) \lambda^3 \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left(\zeta_1 \gamma_1 + \zeta_2 \gamma_2 + \mu_1 \zeta_1 \frac{1}{\gamma_1} + \mu_2 \zeta_2 \frac{1}{\gamma_2} \right) \lambda \right\} \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{U} = & \frac{1}{D_b} \left\{ \gamma_2^2 \lambda^4 - \left\{ 1 + \gamma_2^2 + 4 \zeta_1 \zeta_2 \left(\mu_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \mu_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \gamma_1 \gamma_2 \right) \right\} \lambda^2 + 1 \right. \\ & + j \left\{ -2 \left(\zeta_2 \gamma_2 + \mu_1 \zeta_1 \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} + \mu_2 \zeta_2 \gamma_2 + \zeta_1 \gamma_1 \gamma_2^2 \right) \lambda^3 \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\zeta_2 \gamma_2 + \mu_1 \zeta_1 \frac{1}{\gamma_1} + \mu_2 \zeta_2 \frac{1}{\gamma_2} + \zeta_1 \gamma_1 \right) \lambda \right\} \right\} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_2}{U} = & \frac{1}{D_b} \left\{ \gamma_1^2 \lambda^4 - \left\{ 1 + \gamma_1^2 + 4 \zeta_1 \zeta_2 \left(\mu_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \mu_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \gamma_1 \gamma_2 \right) \right\} \lambda^2 + 1 \right. \\ & + j \left\{ -2 \left(\zeta_1 \gamma_1 + \mu_1 \zeta_1 \gamma_1 + \mu_2 \zeta_2 \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} + \zeta_2 \gamma_1^2 \gamma_2 \right) \lambda^3 \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(\zeta_1 \gamma_1 + \mu_1 \zeta_1 \frac{1}{\gamma_1} + \mu_2 \zeta_2 \frac{1}{\gamma_2} + \zeta_2 \gamma_2 \right) \lambda \right\} \right\} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} D_b = & -\gamma_1^2 \gamma_2^2 \lambda^6 + \{ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 + 4 \zeta_1 \zeta_2 \gamma_1 \gamma_2 (1 + \mu_1 + \mu_2) \} \lambda^4 \\ & - \{ 1 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4 \zeta_1 \zeta_2 (\mu_1 \gamma_2 / \gamma_1 + \mu_2 \gamma_1 / \gamma_2) \} \lambda^2 + 1 + j \{ 2 \gamma_1 \gamma_2 (\zeta_2 \gamma_1 + \zeta_1 \gamma_2 + \mu_1 \zeta_1 \zeta_2 + \mu_2 \zeta_2 \gamma_1) \} \lambda^5 \\ & - 2 (\zeta_1 \gamma_1 + \zeta_2 \gamma_2 + \zeta_2 \gamma_1^2 \gamma_2 + \zeta_1 \gamma_1 \gamma_2^2 + \mu_1 \zeta_1 \gamma_1 + \mu_2 \zeta_2 \gamma_1^2 / \gamma_2 + \mu_1 \zeta_1 \gamma_2^2 / \gamma_1 + \mu_2 \zeta_2 \gamma_2) \lambda^3 \\ & + 2 (\zeta_1 \gamma_1 + \zeta_2 \gamma_2 + \mu_1 \zeta_1 / \gamma_1 + \mu_2 \zeta_2 / \gamma_2) \lambda \} \end{aligned}$$

3・2・2 最適調整条件 この振動系の共振を制振する最適調整条件を求める。まず、構造物の固有振動数を $\omega_1 > \Omega > \omega_2$ と仮定し、減衰率 ζ_1, ζ_2 について、 $\zeta_1 = 0$ とし、 ζ_2 を 0 から ∞ まで変化させた時の $|X_2/U|$

図 9 $\zeta_1 = 0$, ζ_2 をパラメータとする変位振幅比曲線

図 10 $\zeta_2 = 0$, ζ_1 をパラメータとする変位振幅比曲線

の曲線の変化を示すと図 9 となる。これらの曲線群は ζ_2 の値にかかわらずすべて一つの交点を通る。これを P 点とする。同様に $\zeta_2 = 0$ とし、 ζ_1 を 0 から ∞ まで変化させた時の $|X_1/U|$ の曲線は図 10 となり、ここでも ζ_1 の値にかかわらず一つの交点を通る。これを Q 点とする。

ここで、交点 P と曲線 $|X_2/U|$ の極大点の関係を調べると、曲線の極大点が P 点付近に存在する時に、P 点での接線がほぼ水平になる。交点 Q と $|X_1/U|$ の間にも同様の関係がある。

次に、 ζ_1, ζ_2 を 0, ∞ とおいた二つの条件 (i) と (ii) における各変位振幅比は次式となる。

(i) $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = \infty$ の時

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \frac{-1}{\gamma_1^2 \lambda^2 - 1} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left| \frac{X_2}{U} \right| = \left| \frac{X}{U} \right| = \frac{-(\gamma_2^2 + \mu_2)}{\gamma_2^2 (1 + \mu_2) \lambda^2 - (\gamma_2^2 + \mu_2)} \dots\dots\dots (23)$$

図 11 式 (22) ~ (25) の変位振幅比曲線とその交点

(ii) $\zeta_1 = \infty, \zeta_2 = 0$ の時

$$\left| \frac{X_1}{U} \right| = \left| \frac{X}{U} \right| = \frac{-(\gamma_1^2 + \mu_1)}{\gamma_1^2(1 + \mu_1)\lambda^2 - (\gamma_1^2 + \mu_1)} \quad \dots\dots(24)$$

$$\left| \frac{X_2}{U} \right| = \frac{-1}{\gamma_2^2\lambda^2 - 1} \quad \dots\dots(25)$$

式(22)～(25)の曲線を示すと図11となる。ここに示すP, Q点は先に図9, 10で示したP, Q点と一致している。式(23)と式(24)の交点をT点とし、この点の持つ性質を調べる。図12は ζ_1, ζ_2 を同じ割合で同時に0から ∞ まで変化させた時の $|X/U|$ の変化を示したもので、曲線の極大点が最も低くなるような ζ_1, ζ_2 の時、その極大点はT点のごく近くに存在している。

以上の解析の結果、図8の並列構造物モデルの最適調整法として、著者らが提案する複合動吸振器の最適調整理論である「P, T, Q点理論」を適用することが可能である。よって最適調整条件は次のように定められる。

(最適調整条件)

(I) P, T, Q点の高さが等しい。

(II) 変位振幅比 $|X_2/U|, |X/U|, |X_1/U|$ の各曲線がそれぞれP, T, Q点のごく近くで極大点を持つ。

3・2・3 最適調整条件式の導出 初めに、調整条件(I)を満たす条件式を求める。これは、まずP, Q点の高さを等しくする式と、P, T点の高さを等しくする式とを求め、これよりP, T, Q点の高さを等しくする条件式を導く。

(1) 交点P, Qの高さを等しくする式 交点Pは式(23)と(25)の交点であるから、位相を考慮すると、P点の周波数軸上の値 λ_P は次の式の根として求める。

$$\frac{-(\gamma_2^2 + \mu_2)}{\gamma_2^2(1 + \mu_2)\lambda^2 - (\gamma_2^2 + \mu_2)} = -\frac{1}{\gamma_2^2\lambda^2 - 1} \quad \dots\dots(26)$$

すなわち、

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{2(\gamma_2^2 + \mu_2)}{\gamma_2^2(\gamma_2^2 + 2\mu_2 + 1)}} \quad \dots\dots(27)$$

図12 ζ_1, ζ_2 を一定の関係で変化させた変位振幅比曲線

同様に、交点Qは式(22)と(24)の交点で、 λ_Q は次式の根として求まる。

$$\frac{-1}{\gamma_1^2\lambda^2 - 1} = -\frac{-(\gamma_1^2 + \mu_1)}{\gamma_1^2(1 + \mu_1)\lambda^2 - (\gamma_1^2 + \mu_1)} \quad \dots\dots(28)$$

すなわち、

$$\lambda_Q = \sqrt{\frac{2(\gamma_1^2 + \mu_1)}{\gamma_1^2(\gamma_1^2 + 2\mu_1 + 1)}} \quad \dots\dots(29)$$

ここで、P点は式(25)上の点であり、Q点は式(22)上の点でもあるから、P, Q点の高さを等しくする式は、位相を考慮して求めると

$$\frac{-1}{\gamma_2^2\lambda_P^2 - 1} = \frac{-1}{\gamma_1^2\lambda_Q^2 - 1}$$

すなわち、

$$\gamma_1^2\lambda_Q^2 + \gamma_2^2\lambda_P^2 = 2 \quad \dots\dots(30)$$

式(30)を式(27), (29)を用いて整理すると、

$$\gamma_1^2 = \frac{1 + \mu_1 + \mu_2 - \gamma_2^2\mu_1}{\gamma_2^2 + \mu_2} \quad \dots\dots(31)$$

(2) 交点P, Tの高さを等しくする式 交点Tは式(23)と(24)の交点であるから、位相を考慮すると、 λ_T は次式の根として求まる。

$$\begin{aligned} & \frac{-(\gamma_2^2 + \mu_2)}{\gamma_2^2(1 + \mu_2)\lambda^2 - (\gamma_2^2 + \mu_2)} \\ &= \frac{-(\gamma_1^2 + \mu_1)}{\gamma_1^2(1 + \mu_1)\lambda^2 - (\gamma_1^2 + \mu_1)} \quad \dots\dots(32) \end{aligned}$$

よって、

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2(\gamma_1^2 + \mu_1)(\gamma_2^2 + \mu_2)}{\gamma_2^2(\gamma_1^2 + \mu_1)(1 + \mu_2) + \gamma_1^2(\gamma_2^2 + \mu_2)(1 + \mu_1)}} \quad \dots\dots(33)$$

さて、P, T点共に式(23)上の点であるから、位相を考慮して式を求めると

$$\lambda_P^2 + \lambda_T^2 = \frac{2(\gamma_2^2 + \mu_2)}{\gamma_2^2(1 + \mu_2)} \quad \dots\dots(34)$$

式(34)に式(27), (33)を代入して整理すると、

$$\gamma_1^2 = \frac{\mu_1(1 + \mu_2)^2\gamma_2^2}{(1 + \mu_1)(\gamma_2^2 + \mu_2)^2 - \gamma_2^2(1 + \mu_2)^2} \quad \dots\dots(35)$$

図13 最適調整された3組の並列構造物の変位振幅比曲線〔式(41)の正符号を採用した時〕

(3) 交点P, T, Qの高さを等しくする条件式 交点P, T, Qの高さを等しくするには, 式(31)より得られる γ_1 と式(35)より得られる γ_1 を等しく置くことにより得られる。すなわち,

$$\frac{1+\mu_1+\mu_2-\gamma_2^2\mu_1}{\gamma_2^2+\mu_2} = \frac{\mu_1(1+\mu_2)^2\gamma_2^2}{(1+\mu_1)(\gamma_2^2+\mu_2)^2-\gamma_2^2(1+\mu_2)^2}$$

これを γ_2 について整理すると,

$$(\gamma_2^2-1)[\mu_1\gamma_2^4+\{(2\mu_1-1)\mu_2-1\}\gamma_2^2+\mu_2^2(1+\mu_1+\mu_2)]=0 \quad (36)$$

よって,

$$\gamma_2^2=1 \quad (37)$$

または,

$$\mu_1\gamma_2^4+\{(2\mu_1-1)\mu_2-1\}\gamma_2^2+\mu_2^2(1+\mu_1+\mu_2)=0 \quad (38)$$

ここで $\gamma_2^2=\alpha$ とおくと, α について二次式と考えられるから, 式(38)について,

$$(i) \text{ 実根を持つ条件: } \mu_1\mu_2 \leq 1/4 \quad (39)$$

$$(ii) \text{ 正の2根を持つ条件: } \mu_2 < 1/(2\mu_1-1) \quad (40)$$

が導ける。

この条件(i), (ii)のもとで,

$$\gamma_2^2 = \left\{ -\{(2\mu_1-1)\mu_2-1\} \pm (\mu_2+1) \sqrt{1-4\mu_1\mu_2} \right\} / (2\mu_1) \quad (41)$$

よって, P, T, Q点の高さを等しくする条件式は, 式(41)および式(31)または(35)として求められた。これらの式は, 質量比 μ_1, μ_2 の関数として示されている。すなわち, 3組の構造物を最適に同調させるには, まず μ_1, μ_2 を定め, 式(41)によって γ_2 の値を求め, 次に式(31)または(35)に代入して γ_1 の値を求めればよい。

次に, 調整条件(II), すなわちP, T, Q点付近で各

曲線が極大点を持つようにする場合を考える。これは, 式(19)~(21)をそれぞれ λ で微分して求めればよい。しかし, 複雑な式となるので, 次のようにして行った。

すなわち, 調整条件(I)として求めた式(41)と(31)より得られる最適な γ_1, γ_2 の数値を, 式(19)~(21)に代入して各式を ξ_1, ξ_2 のみの関数で表し, これを数値計算することによってP, T, Q点付近で極大点を持つような最適な ξ_1, ξ_2 の値を求めた。

質量比が $\mu_1=0.3, \mu_2=0.6$ の場合について, 以上に述べた方法によって求めた最適な $\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2$ の値を用いて描いた変位振幅比曲線を図13に示す。ここでは, 三つの交点P, T, Qは等しい高さにそろえられており, また, $|X_2/U|, |X/U|, |X_1/U|$ の3本の曲線は, それぞれP, T, Q点付近を通り, しかも, その付近で極大点を持ち, かつ最適に制振されている。なお, 最大変位振幅比は, 各曲線ともに, 2.2倍に抑えられている。

3・2・4 最適調整法の成立条件 P, T, Q点理論による並列構造物の最適調整式を導く過程で, 複数の成立条件が存在し, 実際の使用に当たり, 選択に困る場合が生じるので, これらについて検討する。

まず, 交点P, T, Qの高さを等しくする条件式より, 最適な γ_2 は, 式(37)の $\gamma_2=1$ の場合と, 式(41)による γ_2 の2根の場合があるので, これを検討する。

(1) $\gamma_2=1$ の場合, γ_1 の値は式(31)より $\gamma_1=1$ となる。これは, $\Omega/\omega_1=\Omega/\omega_2=1$ すなわち, 3組の並列構造物の固有振動数が一致し, 防振上, 第一義的に避けるべき最悪条件であり, 本研究の目的に合致しない。

(2) 次に式(41)より得られる γ_2 について調べる。まず, 式(38)が二つの正根を持つ条件は, 式(39), (40)である。また, 式(41)が $\gamma_2=1$ となるのは次式の時である。

図14 P, T, Q点法の成立する質量比 μ_1, μ_2 の範囲

図15 最適調整された3組の並列構造物の変位振幅比曲線 (式(41)の負符号を採用した時)

$|X_1/U|$ の各曲線の極大点が P, Q 点付近を通るように, ξ_1, ξ_2 を調整する. 図 17 は, このような調整法を行った結果を示すもので, $|X/U|$ の曲線を見ると, その極大点は T 点の付近には存在していないが, 最大振幅比の値は小さく制振されている.

4. 結 論

並列に存在する複数の構造物が, 地震動のように基礎部分が水平に励振される場合の一つの制振方法として, 構造物同志を相互にダンピング要素で結合して制振する方法を取り上げ, その最適調整理論および調整方法を解析した結果, 次のような結論が得られた.

(1) 並列構造物のうち, いちばんシンプルな 2 組の並列塔状構造物を, 1 個のダンピング要素で結合した場合を取り上げ, その最適調整法として, P, Q 点定理論が適用できることを示し, 合せてその調整式および設計資料を求めた.

(2) 3 組の並列塔状構造物を 2 個のダンピング要

素で相互に結合して, 同時に制振する場合において, 各要素を最適に調整する方法として, P, T, Q 点定理論が適用できることを明らかにし, その最適調整条件およびそれを満足する調整式を求めた. さらに, P, T, Q 点定法による調整法の成立条件を明らかにし, これを質量比をパラメータとした流れ図で表した設計資料を求めた.

次に, この成立条件に合わない質量比の組合せの構造物を調整する場合でも, P, Q 点定理論を応用することによって調整できることを示した.

終わりに, 本研究の電算機解析に当たり, 東京都立工業高等専門学校の卒研生である, 中込, 横田, 半沢君の協力をいただいた. ここに厚く謝意を示す.

文 献

- (1) 国枝, 機誌, 79-689(昭 51), 86.
- (2) 岩浪・背戸, 機論, 47-415, C(昭 56), 283.

討 論

〔質問〕 大 亦 絢一郎〔明治大学工学部〕

並列構造物をダンパで結合して制振するときの最適調整の解析に興味深く拝見した.

(1) 式(12)によれば, μ が 1 に近づくと P, Q 点の高さは非常に高くなり, 制振効果が悪くなることになる. このような μ の範囲では別の調整法は考えられないか.

(2) 図 14 の P, T, Q 点法の成立する μ_1, μ_2 の範囲で, 最適に調整されたときの最大変位振幅比はどのように変化するのか.

(3) 構造物間をダンパとばねで結合した場合は, 貴報のダンパだけで結合した場合よりも制振効果が悪くなるのか.

〔回答〕 (1) P, Q 点法の一つの特徴は, 連結部のダンパの減衰係数を変化させた場合に, 各質量の変位振幅比曲線が, 常に P, Q 点を通ることにある. そこで, 最適調整のためには, P, Q 点の高さを等しくし, 各質量の最大振幅比を同じ高さにそろえるよう, 固有振動数比 γ を調整して行うことになる.

二組の構造物の場合, 最適調整時の γ は, 式(11)のように, $\gamma = \omega_2/\omega_1 = 1/\mu$ であるので, $\mu \rightarrow 1$ の時 $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ となり, 2 質量をダンパのみで結合して制振するこの手法だと, 制振効果の低下は避けることができない. そこで, このような場合は, 例えば, ダンパと

付図 1 三組の構造物の最大変位振幅比の値 (単位: 倍)

ばねを直列に結合した連結ダンパで質量どうしを結ぶ手法などが考えられる.

(2) 三組の構造物の最適調整時, 最大変位振幅比の変化については, μ_1, μ_2 がパラメータとなってくるので, 正確な変化はつかんでいない.

なお, 変化の傾向としては, 付図 1 に示すように, $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ および式(39)に近づくに従って振幅比が

大きくなり、逆に、これより離れるに従って小さくなる傾向が見られるので、今後検討を重ねたいと思う。

(3) ご指摘のモデルについては、まだ解析を行っていない。今回は、ダンパのみによる連結法を解析し

たが、今後の連結ダンパ方式の展開として、ばねとダンパを直列に、あるいは並列に結合した連結要素を用いた場合について解析を行う予定でいるので、次報以下で報告したいと考えている。