駆動源との相互作用を考慮した回転軸系の 最適運転曲線に関する研究*

山 川 宏**, 西岡康志***, 鈴木良明****

A Study on the Optimum Operating Curve for Rotating Shaft Systems under Consideration of the Effect of Limited Power Supply

Hiroshi YAMAKAWA, Yasushi NISHIOKA, and Yoshiaki SUZUKI

There exist comparatively few studies on the dynamic behavior of rotating systems with limited power supply when passing through the critical speed. However, little work has been done on the determination of the optimum operating curve of such systems to minimize the maximum whirl deflections yielded just after passing through the critical speed. In this study, a new method of dynamic analysis is presented in which both Newmark's β method and Newton-Raphson's method are utilized. Then, from a practical point of view, optimum operating curves are studied by making use of an optimization technique.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Limited Power Supply, Critical Speed, Optimum Operating Curve, Dynamic Analysis, Optimization

1. 緒 言

回転機械の中には構造的に種々の制約を受け、回転の動力源に十分な出力の余裕を持たせることが困難となる場合が見うけられる。余裕のないトルクで運転する回転軸系の挙動は駆動トルクの影響を受けやすい。特に加速運転では、危険速度通過時のふれまわりや加速時の加速度にその影響が顕著に現れる。このような現象を解析する上で、さらに設計上の限界駆動トルクを知るためにも、駆動源との相互作用を考慮した解析が必要となる。

従来、回転軸系の振動問題の中で危険速度通過問題を取扱った研究は数多くある。それらの研究のうちで駆動源との相互作用を考慮に入れた研究は、1964年に Kononenko によって漸近法を用いた非定常振動時の解析⁽¹⁾、1974年の岩壺、神吉、川井らによる非対称回転軸に関する解析および実験がある⁽²⁾。また1977年には、野波、宮下らが漸近法を用いた方法によりジ

ャイロ効果の影響を解明し⁽³⁾、矢鍋は駆動トルクの影響を明らかにした⁽⁴⁾。そして1977年には松浦が不釣合定数を用いて非定常特性の検討を行っている⁽⁵⁾。しかしながら駆動源との相互作用を考慮し、かつ運転曲線の最適な加速方法を検討した研究例はほとんどない。

そこで本研究では、駆動源との相互作用、減衰などを考慮に入れた回転軸系の動的応答問題の解析法として、ニューマークの β 法とニュートン・ラプソン法を併用した方法をまず提示する。しかる後危険速度通過時の最大ふれまわり振幅の抑制を目的とした最適運転曲線を検討し、これらの結果を実験により一部検証した。

記 号

本論文で用いた主な記号を以下に示す：

a ：角加速度

c ：減衰係数

D ：ロータ直径

I_d ：ロータの横慣性モーメント

I_p ：ロータの極慣性モーメント

k ：軸の剛性

K ：運動エネルギー

m ：ロータの質量

* 昭和61年8月21日 第938回講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月6日。

** 正員、早稲田大学理工学部 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)。

*** 准員、住友金属工業(株) (〒554 大阪市此花区島屋5-1-109)。

**** 准員、ソニー(株) (〒243 厚木市旭町4-14-1)。

r : ふれまわり振幅
 T : 駆動トルク
 t_{st} : 角速度の停留時間
 V : ポテンシャルエネルギー
 ε : 偏心率
 θ : 重心 G の回転角
 φ : ロータの傾き角
 φ_x : φ の yz 平面への投影
 φ_y : φ の xz 平面への投影
 ω : 角速度
 ω_{st} : 角速度の停留値

2. 駆動源との相互作用を考慮した 回転軸系の動的応答解析

2.1 運動方程式 回転軸系を多自由度系に近似して以下に行うものとほぼ同様の解析も可能であるが、本研究では問題の本質を把握しやすくするために、図1に示すような両端を軸受 A, B で支持された基本ロータモデルを考え、以下に示す仮定を置く。

- (i) ロータの剛体円板が軸に垂直に取付けられているとし、軸質量は無視する。
- (ii) 軸受は剛軸受とする。
- (iii) ロータの並進運動に比例する外部減衰を考え、内部減衰は無視する。

図1では質量 m のロータが軸中心 S で固定されており、ロータの重心点 G は S 点より ε だけ偏心している(図2)。回転軸の長さを l とし、簡単のために一様断面とする。さて軸に対するロータの傾き角を φ としてその yz 平面, xz 平面への投影を φ_x, φ_y とし、軸の回転が非定常でしかも軸の変形が微小と仮定すれば系に蓄えられる運動エネルギーは、結局次式にて表せられる⁽⁶⁾。

$$K = \frac{1}{2} [m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}^2 + 2\varepsilon \dot{\theta}(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)) + I_a(\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2) + I_p\{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}(\varphi_x \dot{\varphi}_y - \varphi_y \dot{\varphi}_x)\}] \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに x, y は軸中心 S の座標で、 θ は重心 G の回転角、 I_a, I_p はそれぞれロータの横慣性モーメントと極慣性モーメントである。また系に蓄えられるポテンシャルエネルギー V は

$$V = \frac{1}{2} k_{11}(x^2 + y^2) + k_{12}(y\varphi_x - x\varphi_y) + \frac{1}{2} k_{22}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - T\theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる⁽⁶⁾。上式中 k_{11}, k_{12}, k_{22} は、軸のせん断力と曲

げモーメントをたわみおよびたわみ角と下記のように関係付ける軸の剛性である。また T は駆動トルクである。

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ M_y \\ F_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12} & -k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi_y \\ y \\ \varphi_x \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (3)$$

式(1), (2)の結果を減衰の消散項の存在するラグランジュの運動方程式に代入すれば、次の五つの基礎となる運動方程式を得る：

$$(I_p + m\varepsilon^2)\ddot{\theta} = T + m\varepsilon(\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) - \frac{1}{2} I_p(\ddot{\varphi}_x \varphi_y - \varphi_x \ddot{\varphi}_y) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_{11}x - k_{12}\varphi_y = m\varepsilon(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{12}y + k_{12}\varphi_x = m\varepsilon(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$I_a\ddot{\varphi}_x + I_p\dot{\theta}\dot{\varphi}_y + k_{12}y + k_{22}\varphi_x = -\frac{1}{2} I_p\dot{\theta}\ddot{\varphi}_y \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$I_a\ddot{\varphi}_y - I_p\dot{\theta}\dot{\varphi}_x - k_{12}x + k_{22}\varphi_y = \frac{1}{2} I_p\dot{\theta}\ddot{\varphi}_x \quad \dots\dots\dots (8)$$

2.2 時刻歴応答解析 運動方程式(4)~(8)は $x, y, \varphi_x, \varphi_y, \theta$ を変数とする連立の非線形微分方程

図1 基本ロータ系モデル

図2 ロータの偏心

式である。非線形性を区分線形化することによって逐次積分法ですべての変数に対して数値解を得ることも可能と考えられるが、その精度は一般的によくなくまた計算の手間がかかる上に見通しもよくない。そこで本研究では、変数 θ の項のみが非線形であることに着目して他の変数 $x, y, \varphi_x, \varphi_y$ にニューマークの β 法を適用して、時刻 t より微小時間経過後の $t+\Delta t$ における θ のみに関する方程式を導き、それをニュートン・ラプソン法にて解く方法を以下に提示する。

ニューマークの β 法では、時刻 $t+\Delta t$ の変位ベクトル $\mathbf{q}(t+\Delta t)$ と速度ベクトル $\dot{\mathbf{q}}(t+\Delta t)$ は、 $\beta=1/4$ とすれば

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t+\Delta t) = \mathbf{q}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{q}}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \quad + \frac{(\Delta t)^2}{4} \ddot{\mathbf{q}}(t+\Delta t) \dots\dots\dots (9) \\ \dot{\mathbf{q}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}(t+\Delta t) \\ \quad \dots\dots\dots (10) \end{cases}$$

と表される。いま $\mathbf{q} = \{x, y, \varphi_x, \varphi_y\}^T$ と考えて運動方程式(4)～(8)を次の手順に従って変形する。

〔手順1〕

式(7), (8)から $\varphi_x(t+\Delta t), \varphi_y(t+\Delta t)$ を未知量 $\dot{\theta}(t+\Delta t), x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)$ と時刻 t の既知量を用いて表す。

〔手順2〕

手順1で得られた $\varphi_x(t+\Delta t), \varphi_y(t+\Delta t)$ を式(5), (6)に代入する。この結果 $\ddot{x}(t+\Delta t), \ddot{y}(t+\Delta t)$ は未知量 $\ddot{\theta}(t+\Delta t), \dot{\theta}(t+\Delta t), \theta(t+\Delta t)$ および時刻 t の既知量で表される。

〔手順3〕

手順1, 手順2で得られた関係を式(4)に代入して $\dot{\theta}(t+\Delta t)$ のみの非線形方程式を導く。

計算が煩雑となるので途中経過は省略するが、上記の手順によって得られる最終的な式は以下の形をとる。

$$\begin{aligned} & a_7 \dot{\theta}^7(t+\Delta t) + a_6 \dot{\theta}^6(t+\Delta t) + a_5 \dot{\theta}^5(t+\Delta t) \\ & + a_4 \dot{\theta}^4(t+\Delta t) + a_3 \dot{\theta}^3(t+\Delta t) + a_2 \dot{\theta}^2(t+\Delta t) \\ & + a_1 \dot{\theta}(t+\Delta t) + a_0 + \{b_6 \dot{\theta}^6(t+\Delta t) + b_5 \dot{\theta}^5(t+\Delta t) \\ & + b_4 \dot{\theta}^4(t+\Delta t) + b_3 \dot{\theta}^3(t+\Delta t) \\ & + b_2 \dot{\theta}^2(t+\Delta t) + b_1 \dot{\theta}(t+\Delta t) \\ & + b_0\} \sin\{d_1 \dot{\theta}(t+\Delta t) + d_0\} \\ & + \{c_6 \dot{\theta}^6(t+\Delta t) + c_5 \dot{\theta}^5(t+\Delta t) \\ & + c_4 \dot{\theta}^4(t+\Delta t) + c_3 \dot{\theta}^3(t+\Delta t) + c_2 \dot{\theta}^2(t+\Delta t) \\ & + c_1 \dot{\theta}(t+\Delta t) + c_0\} \cos\{d_1 \dot{\theta}(t+\Delta t) + d_0\} \\ & = 0 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに $a_0 \sim a_7, b_0 \sim b_7, c_0 \sim c_7, d_0, d_1$ は、時刻 t の諸量を含む係数である。紙面の都合上、各係数の具体形は省くが、減衰やジャイロ効果の関係項を無視すればその形は簡単になる。

ところで式(11)は、 $\dot{\theta}(t+\Delta t)$ に関して7次式で、しかも $\sin, \cos$ の関数の中にも $\dot{\theta}(t+\Delta t)$ を含む非線形の方程式である。しかしその係数の微分が比較的容易に計算できるのでニュートン・ラプソン法によって効率のよい、精度の高い解を得ることができる。

2.3 駆動トルク特性と運転曲線を考慮した解析

回転機械のトルク特性は、一般に回転数の増加に伴いトルクが減少してゆく、いわゆる右下り特性のものが多い。したがって駆動源に十分な出力余裕を持たせることができない場合には、危険速度通過の際に、大きなふれまわりにより危険速度を越えられない場合も生じてくる。かかる場合は駆動トルク特性を考慮した解析が必要である。運動方程式(4)により、駆動トルク T は、ふれまわりと加速の両方に消費されることがわかる。その様子を図3にて例示すると、区間AとCでは運転曲線で設定した加速度で加速可能であるが区間Bではトルクの右下りの特性(図の T_s の直線)の制限を受けるため、設定した加速度 a を維持できずに a_s に鈍る。

以上述べた駆動トルク特性や運転曲線の加速の方法を考えて前項の時刻歴応答解析を行う解析手順を図4の流れ図にまとめて示す。

3. 運転曲線の最適化

危険速度通過時の回転軸系のふれまわり振幅を最小にするような運転曲線の形態は工学上興味深いものと考えられる。一般的な運転曲線の最適化を考える前にいくつかの運転曲線を試行的に設定し、その危険速度通過時のふれまわり振幅を前章の計算方法で求める一

図3 駆動トルクの加速度への影響

方、後述の実験装置を使用し、一部実験的にも検討を行い、危険速度通過の可否、ふれまわり振幅、トルク特性などを比較した。それらの結果の詳細は割愛するが、それらの結果と実際の運転曲線として直線的な加速が比較的設計しやすいことなどを考慮に入れば、まず一定加速度で上昇させ、危険速度の直前で一端停留させ、再び一定加速度で上昇させ危険速度を越える型の運転曲線は、ふれまわり振幅抑制には効果のある運転曲線の一つであると考えられる。そこで本研究では、図5に示すような運転曲線に着目して、一時的に加速を停留させる角速度 ω_{st} とその停留時間 t_{st} を設計変数にとり、危険速度通過時のふれまわり振幅の最大値を最小化する最適設計問題を設定し(表1)、それを傾斜降下法を用いて解き、最適値を求めた。すなわち最大ふれまわりの設計変数に関する傾斜の方向を計算してその方向に ω_{st} と t_{st} の初期値から改良を進めていく方法を採用した。

4. 実験

上記の解析結果の検証と運転曲線の実用性を調べるために図5のようなモデル装置を作成して実験を行った。この装置では、両端を玉軸受で支持され、中央部にロータを有する SCM 22 材の軸が DC モータで駆動

されている。DC モータの回転数はパソコンによって制御され、図6の運転曲線を含む各種の運転曲線が設定できるようになっている。軸の水平および垂直方向の変位は、それぞれの方向に配した非接触の微小変位計にて測定され、併せてトルクも測定できるようになっている。

5. 数値計算結果

上記の動的応答解析法および最適設計法に対して具体的に数値計算を行い、一部実験結果と比較したものを以下に示そう。対象としては図5に示したロータ軸系を取り上げ、ロータの直径 D 、ヤング率 E 、密度 ρ などは以下の値を用いた。なおこのロータ軸系の危険

表 1 最適設計問題

Design variable	Rotational speed ω_{sr} , Time t_{sr}
Condition of constraints	Rotational acceleration a , Characteristics of driving torque
Objective function	Max whirl displacement r_{max}
Optimum design problem	Minimization of r_{max}

図 4 時刻歴応答解析手順

図 5 実験装置

図 6 対象運転曲線

速度は計算によると $\omega_{cr}=253.2 \text{ rad/s}$ となった。

D (Diameter)	=20	mm
E (Young's modulus)	=206	GPa
ρ (Density)	= 7.80×10^3	kg/m ³

5.1 危険速度通過の際の時刻歴応答 定加速運転の際の危険速度通過付近の時刻歴応答とトルクを図7, 図8に示す。減衰と偏重心はそれぞれ $\zeta=0.05$, $\varepsilon=0.1$ で計算した。図7では駆動源のトルク特性は $T=25-0.05\omega$, 図8では $T=32-0.05\omega$ で与えられる右下りの直線特性で大きさの異なるものを用いた。図7ではトルクに余裕があるために設定した加速度に従っ

ていることがわかる。この場合、ロータのふれまわりの影響が駆動トルクに現れている。図8では駆動源は常に最大トルクを供給しているにもかかわらず、設定加速度を維持することができない。この場合トルクは駆動源のトルク特性を示した右下りのものとなる。

図9は図7と同じトルク特性の系に対して、図6の型の運転曲線で運転したものである。この場合は設定

図7 時刻歴応答と駆動トルク (定加速運転トルク制限小)

図8 時刻歴応答と駆動トルク (定加速運転トルク制限大)

図9 時刻歴応答と駆動トルク (図5の型の運転)

図10 減衰比に対する最大ふれまわり

図11 運転曲線の最適値

図 12 最適運転曲線による挙動

した運転曲線を維持でき、しかもふれまわりの最大振幅の値が減少していることがわかり、この型の運転曲線は効果があることがわかる。

5.2 運転曲線の最適化 二つの設計変数 ω_{st} , t_{st} に対して、3章で述べた最適設計を行い、減衰、角加速度、駆動トルクの影響を調べた。図 10 は得られた最適運転曲線で生ずるふれまわり振幅の最大値と減衰比との関係を示す。同図には参考のため定加速運転で生ずるふれまわり振幅の最大値も示してある。減衰が小さいと最適運転曲線によるふれまわりの抑制効果は大きい、減衰が大きい場合にはその効果があまり期待できないことが判明した。

図 11 は、角加速度 a と減衰比 ξ をパラメータにとり二つの設計変数 ω_{st} と t_{st} の関係をみたものである。

図 12 は計算で得られた最適運転曲線を用いて危険速度通過時の時刻歴応答を計算したものである。図の実線は最適運転曲線に従うものの最大値で、破線は定加速運転の場合で比較のために示した。危険速度通過直後のふれまわり振幅が抑制されていることがわかる。

図 13 は、二つの設計変数を両軸にとり、目的関数 r の値の等しい点を結んで作成したものである。この計算は実験値と比較するために行ったものであり、プロットは実験値を示す。プロットは定加速運転の場合の r_{con} との比で区別しており、 $r/r_{con} < 1$ の場合が抑制効果の認められる場合である。×印が計算の最適値であり、実験値と計算値は多少誤差が見られるものの、よく傾向が一致しているといえる。なお駆動トルクの回転数零のときの値による比較も行ったところ、減衰比の大小によって危険速度の通過できる臨界のトルクの値が異なることがわかった。

6. 結 言

駆動源との相互作用、減衰などの効果を考慮した回

図 13 目的関数の様相

転軸系の運動方程式を導き、その時刻歴応答解析法として、ニューマークの β 法とニュートン・ラプソン法を併用する方法を提案した。また危険速度通過時のふれまわり振幅を抑制する目的で、実用的で効果が大きいと考えられる危険速度の直前で一時的に停留する定加速度型の運転直線に着目して、そのパラメータを最適化手法によって決定し、各種の検討を行った結果、

- (1) 加速度や減衰などが最適な運転曲線に及ぼす影響を解明した。
  - (2) 最適運転曲線によるふれまわりの最大振幅の抑制は、軽減衰系では効果が大きいことがわかった。
  - (3) 実験的にも最適運転曲線による抑制効果が確認された。
- などの結論を得た。

なお本研究の実行に対し、貴重なご助言をいただいた早稲田大学 奥村敦史教授ならびに実験を遂行した加藤正幸、村上誠爾両君（現在、早稲田大学大学院在学中）に深く感謝する。

文 献

- (1) Kononenko, V. O., *Vibrating System with A Limited Power Supply*, (1969), 11, London Iliffe.
- (2) 岩壺・ほか2名, 機論, 40-335(昭49), 1908.
- (3) 野波・宮下, 機論, 43-369(昭52), 1694.
- (4) 矢鍋, 機械の研究, 29-10(昭52), 1191.
- (5) 松浦, 機論, 45-397, C (昭54), 993.
- (6) 谷口編, 振動工学ハンドブック, (昭51), 第20章, 養賢堂.

討 論

〔質問〕 水谷 一樹〔三重大学工学部〕

駆動源と回転軸系との相互作用に関する研究について興味深く拝見した。

(1) 運動方程式(7), (8)の右辺の $-(1/2)I_p\ddot{\theta}\varphi_y, (1/2)I_p\ddot{\theta}\varphi_x$ は, それぞれ, $-I_p\ddot{\theta}\varphi_y, I_p\ddot{\theta}\varphi_x$ になることがオイラーの運動方程式から得られている(付1)。著者のご見解をうかがいたい。

(2) 一般に駆動源のトルク特性は非線形になると思うが, そのような場合にも本解析手法はそのまま適用できるのか。

(3) 最適運転を与える運転曲線として図6の曲線を採用された理由をお教え願いたい。また, 回転軸系のパラメータ(特に, 減衰)によって最適運転を与える運転曲線の形が変わるというようなことはないのか。

〔回答〕 (1) 本論文の剛体円板が付加した回転弾性軸の運動方程式(7), (8)はご指摘のように文献中のものとは $1/2$ の係数の有無による相違がある。またご指摘いただいてはいないが運動方程式(4)の右辺の第3項に相当するものが同文献にはない。この相違は近似方法の相違にあるものと考えられる。すなわち本論文では運動エネルギーの評価の際に φ の三次以上の項を無視してラグランジュの運動方程式に代入して定式化しているのに対して, 同文献はオイラーの方程式そのもので φ の二次以上の項を無視して定式化していることに起因している。両方法の精度は, さらに高次の項を採るなどして比較する必要がある。問題によっても異なるように思われる。なお同文献の著者

も文献(付2)では同様の定式化を試みており, φ_x, φ_y の二次以上の項を無視する前では, 式(4)に相当する式を得ている。またこれらの項の影響は実際の計算では非常に小さいことを付言しておく。

(2) 2・2節の記述や図4の計算手順中に見られるように微小時間間隔ごとに提唱した方法では対象系を区分線形化して応答を逐次求めるという方法を採用しているので, 非線形のトルク特性や幾何学的あるいは材料的非線形性も考慮して比較的精度の良い近似計算ができる。

(3) 本論文の延長線上にある問題として, 駆動源との相互作用を考慮したうえで危険速度通過時の応答振幅を最小化する大局的な意味での最適運転曲線の決定問題があり, 筆者らも大変に興味を持っている。しかしその問題には, トルク特性, 初期加速度, 危険速度通過時の加速度, 減衰など多くのパラメータを含み, まだ十分に検討できていない。本論文ではその前段階として, 実用上直線的な加速運転は設定しやすいことや, 図7と図9は比較の一例であるが, 初期加速度と危険速度通過時の加速度は一定にし, トルクは右下がりの特性を考えて試行的に計算や実験を行った結果の両方から, 図6の形の運転曲線を一つの候補として, 最適化を行い検討したもので, いわゆる大局的な意味での最適運転曲線の検討は残念ながら行っていない。

(付1) 山本・河野, 機論, 35-278 (昭44), 2044.

(付2) Yamamoto, Y., ほか2名, *Mem. Facul. Eng. Nagoya Univ.*, 24 (1972), 7.