構造物のパラメータ同定におけるベイジアン手法の拡張

岩 壺 卓 三**, 中 川 紀 寿**, 川 井 良 次***
辻 内 伸 好†, 森 岡 雄 二**Modified Theory of Bayesian Estimation Method
to Parameter Identification of StructuresTakuzo IWATSUBO, Noritoshi NAKAGAWA, Ryoji KAWAI,
Nobutaka TSUJIUCHI, and Yuji MORIOKA

In the Bayesian parameter estimation method, the uncertainties of both experimental responses and theoretical model parameters are taken account of to identify the finite element model from experimental modal test results such as the natural frequencies and mode shapes of a structure. This paper presents a modified theory of the Bayesian parameter estimation method. In this theory, the Bayesian parameter estimation method is extended by normalizing the error function, and a constant that weights the parameter values to the test data can be reasonably determined; that is, a parameter identification that weights the experiment, or that weights the theory can be carried out quantitatively and easily. And constants that denote the various uncertainties of each parameter and response reflect the identified values. The effects of relative parameter and measurement uncertainties on the identified values are illustrated by two five-degrees-of-freedom models.

Key Words: Vibration, Parameter Identification, Bayesian Estimation Method, Error Function, Modal Analysis

1. 緒 言

構造物の振動解析において、実験的な解析手法としてはモーダルアナリシス、理論的な解析手法としては有限要素法が代表的であるが、理論解析において系の諸定数の推定にはいくつかの不確定要素が含まれる可能性が大きく、その結果、この理論解析モデルを用いて得た解析結果の多くは、実際の系の挙動を十分正確に表すことのできない可能性が大きい。そこで、これらの不確定要素をパラメータとし、理論解析モデルを実験値と比較、対照することによってモデルのパラメータを修正、または同定する研究^{(1)~(4)}が行われている。実験値における誤差と理論における推定誤差の両方の不確定性を考慮した同定を行う方法として、広く用いられているベイジアン手法⁽⁵⁾があるが、この手法においては各実験値、各パラメータ推定値の、どの値に重みをおいて同定を行うか、また、実験値と初期理論解析モデルのどちらに重みをおいて同定を行うかを決定する重み係数は定性的なものであり、定量的には

同定値に反映しない。すなわち、これらの重み係数の決定は試行錯誤によるものであり、定量的には決定できないという難点がある。そこで、本論文ではこのベイジアン手法の誤差関数を規準化することによって実験値とパラメータ推定値に等価な重みをおき、同定値に定量的に影響する相対的な重み係数を容易に決定する方法を提案する。

2. 使用される主な記号

 m : 質量 c : 減衰 k : 剛性 $\{R\}$: 理論モデルの応答値ベクトル $\{R_e\}$: 実験から得られた応答値ベクトル $\{P\}$: 理論モデルのパラメータベクトル $\{P_0\}$: 初期理論モデルのパラメータベクトル w_r : 実験データ間の信頼度を表す重み係数 w_p : 初期モデルパラメータ間の信頼度を表す重み係数 W : 実験データと初期モデルパラメータ間の相対信頼度係数 E : ベイジアン評価手法の誤差関数 E_n : 規準化された誤差関数

* 昭和61年8月22日 第938回講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月6日。

** 正員、神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。

*** 正員、芦屋大学 (〒659 芦屋市六麓荘町13-22)。

† 正員、三菱電機(株) (〒661 尼崎市塚口本町8-1-1)。

†† 准員、三菱電機(株) (〒652 神戸市兵庫区和田崎町1-1-2)。

[S]: 感度マトリックス

添 字

i : 応答の番号

j : パラメータの番号

3. 規準化されたベイズアン手法の導入

ベイズアン手法においては、理論解析の初期モデルパラメータ（密度、弾性係数、減衰係数など）を実験値（固有値、固有モードなど）と比較することによって修正する。理論解析の初期モデルパラメータと実験値の相違は、

$$E = (\{R\} - \{R_e\})^T [W_r] (\{R\} - \{R_e\}) + W (\{P\} - \{P_0\})^T [W_p] (\{P\} - \{P_0\}) \quad \dots (1)$$

で与えられ、この誤差関数 E を最小にすることによってパラメータの同定値が得られる。ここで、 $[W_r]$ は実験値間の信頼度を表す重み係数マトリックスであり、また、 $[W_p]$ は初期モデルパラメータ間の信頼度を表す重み係数マトリックスである。実験データ間、またモデルパラメータ間に相関がないと仮定すれば、 $[W_r]$ 、 $[W_p]$ は対角マトリックスとなり、その対角成分は誤差関数を無次元化するため、

$$W_{r_{ii}} = \frac{w_{r_{ii}}}{R_{ei}^2} \quad \dots (2)$$

$$W_{p_{jj}} = \frac{w_{p_{jj}}}{P_{0j}^2} \quad \dots (3)$$

となる。ここで $w_{r_{ii}}$ 、 $w_{p_{jj}}$ はそれぞれ i 番目の実験値、 j 番目のモデルパラメータの相対信頼度を表す重み係数である。たとえば、固有振動数は固有モードより高い信頼度で測定することができるので、同定の際に固有値に重みをおいて計算を行うことができる。また、パラメータの推定においても同様なことが言える。さらに、式(1)における W は、実験値と初期モデルパラメータ間の相対信頼度を表す重み係数である。すなわち、 W を小さくすれば（実験値に重みをおく場合）、実験値によく一致するが、初期モデルパラメータから大きく変化したパラメータが同定値として求まる。また、 W を大きくすれば（初期理論解析モデルに重みをおく場合）、その逆のパラメータが得られる。すなわち、ベイズアン手法においては同定値は重み係数 w_r や w_p や W の値に制御される。

ここで、このベイズアン手法の誤差関数 E を最小にするアルゴリズムを考える。 $k+1$ 次の応答を k 次と $k+1$ 次のモデルパラメータを用いて、一次のテーラ展開で近似すると、

$$\{R^{(k+1)}\} = \{R^{(k)}\} + [S] (\{P^{(k+1)}\} - \{P^{(k)}\}) \quad \dots (4)$$

となる。ここで、 $[S]$ は係数 S_{ij} を要素とする大きさ n

$\times m$ の長方マトリックスであり、 n は応答の数、 m は評価されるパラメータの数を表す。要素 S_{ij} は i 番目の応答値 R_i に対する j 番目のパラメータ P_j の偏微分係数で、

$$S_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial P_j} \quad \dots (5)$$

となる。よって、 $[S]$ は構造物のモデルのパラメータを変化させたときの固有値・固有モードなどの応答値の変化を表すヤコビアン・マトリックス、すなわち、感度マトリックスとなる。動的な応答値としては、その他に減衰比、伝達関数、強制振動応答などが考えられる。これらの動的な応答値のモデルのパラメータに対する一次感度は、いずれも運動方程式をパラメータで偏微分することにより得られる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

誤差関数 E を最小とするためには、

$$\frac{\partial E}{\partial P} = 0 \quad \dots (6)$$

とならなければならない。式(4)、(6)より式(1)は、

$$\begin{aligned} \{P^{(k+1)}\} &= \{P^{(k)}\} + (W[W_p] + [S]^T[W_r][S])^{-1} \\ &\times \{W[W_p](\{P_0\} - \{P^{(k)}\}) \\ &+ [S]^T[W_r](\{R_e\} - \{R^{(k)}\})\} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

となるアルゴリズムで最小化される。

ベイズアン手法においては、実験解析値の誤差と理論解析モデルのパラメータの推定誤差の両方を考慮した同定を行い、重み係数 $W \cdot w_r \cdot w_p$ を変化させることによって、実験値と理論解析のどちらに重みを置くか、また、さまざまな誤差を持つ実験値や理論解析のパラメータのなかでも、どの値に重みをおいて同定を行うかを定めることができた。しかし、このベイズアン手法においては、実験値とパラメータ推定値間の相対的な重み係数の決定は、試行錯誤によるものであり定量的には決定できないという難点がある。すなわち、重み係数 $W \cdot w_r \cdot w_p$ を変化させることによって定量的にパラメータの同定値をどの程度、実験値にまたは、理論値に近づけるかを、予想することは不可能である。そこで、本論文ではこのベイズアン評価手法の誤差関数を規準化することによって重み係数を定量的に決定できる手法を提案する。

式(1)右辺第1項を E_r とおくと、

$$E_r = \sum_{i=1}^n W_{r_{ii}} (R_i - R_{ei})^2 \quad \dots (8)$$

となる。この E_r は n 個の応答の差を示すのに対し、式(1)の右辺第2項は m 個のパラメータの変化量を示すもので異質なものである。そこで、式(1)の最小値をうまく求めるため、パラメータの変化によって生

じる応答の変化量 E_p を求めることを考える。ここで、

$$\Delta R_i = R_i - R_{ei} \quad \dots\dots\dots (9)$$

とおくと式(2)より、

$$E_r = \sum_{i=1}^n w_{ri} \left(\frac{\Delta R_i}{R_{ei}} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで、 ΔR_i をパラメータ P_j についてテーラー展開し一次の項のみで近似すると、

$$\Delta R_i = \sum_{j=1}^m \Delta P_j \frac{\partial R_i}{\partial P_j} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで、 $w_{ri}=1$ において、

$$P_j - P_{0j} = \Delta P_j \quad \dots\dots\dots (12)$$

とすれば E_r と合理的に比較できる E_p が得られる。

$$E_p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{j=1}^m \Delta P_j \frac{\partial R_i}{\partial P_j}}{R_{ei}} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(13)をマトリックス表示すると、

$$E_p = (\{P\} - \{P_0\})^T [W_p]' (\{P\} - \{P_0\}) \quad \dots\dots (14)$$

ここで、

$$[W_p]' = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial P_1} & \frac{\partial R_1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial P_j} \\ \frac{\partial R_2}{\partial P_1} & \frac{\partial R_2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial P_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_i}{\partial P_1} & \frac{\partial R_i}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial R_i}{\partial P_j} \end{bmatrix}$$

となる。この E_p をモデルパラメータ間の信頼度を表す重み係数マトリックス $[W_p]''$ を用いて拡張すると、

$$E_p = (\{P\} - \{P_0\})^T [W_p]'' [W_p]' [W_p]'' \times (\{P\} - \{P_0\}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここで、 $[W_p]''$ は m 次の対角マトリックスでその成分 W_{pjj}'' は

$$W_{pjj}'' = w_{pjj} \quad \dots\dots\dots (16)$$

を表す。この E_p を用いて式(1)を書き換えることによりベイジアン評価手法の誤差関数 E_n は、

$$E_n = (\{R\} - \{R_e\})^T [W_r] (\{R\} - \{R_e\}) + W (\{P\} - \{P_0\})^T [W_p]'' [W_p]' [W_p]'' \times (\{P\} - \{P_0\}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

より、規準化される。また、式(17)を最小化するパラメータは、

$$\{P^{(k+1)}\} = \{P^{(k)}\} + (W[W_p]'' + [S]^T [W_r] [S])^{-1} \times \{W[W_p]'' [W_p]' (\{P_0\} - \{P^{(k)}\}) + [S]^T [W_r] (\{R_e\} - \{R^{(k)}\})\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

のアルゴリズムで求められる。

4. 数値計算例および考察

ベイジアン手法と規準化した誤差関数を用いた本手

法の有効性を比較検討するために、図1に示すような2種類のばね・ダッシュポット・質点系について、パラメータ同定を行い、その解の特性を調べた。表1にこれらのモデルの真の諸元を、また、表2にその固有値解析結果を示す。

ここでは、この解析値を実験値として代用し数値実験を行う。すなわち、表1のモデル諸元は、実験値を最も忠実に表現する値となる。図2はモデルIにおいて系のパラメータを k_1 と k_3 の二つにとり、また実験値としては固有振動数が二次までの二つ、または三次までの三つが得られたものとし、ベイジアン手法と規準化した誤差関数を用いた本手法で、パラメータ同定

表1 モデルの真の緒元

(a) モデルI

Mass	(kg)	Damping	(N·s/m)	Stiffness	(N/m)
m ₁	1.3	c ₁	1.4	k ₁	150
m ₂	1.1	c ₂	1.3	k ₂	140
m ₃	1.4	c ₃	1.1	k ₃	130
m ₄	1.2	c ₄	1.2	k ₄	120
m ₅	1.5	c ₅	1.5	k ₅	110

(b) モデルII

Mass	(kg)	Damping	(N·s/m)	Stiffness	(N/m)
m ₁	12	c ₁	10	k ₁	500
m ₂	5.0	c ₂	40	k ₂	5000
m ₃	4.0	c ₃	50	k ₃	6000
m ₄	3.0	c ₄	20	k ₄	4000
		c ₅	30	k ₅	2000
		c ₆	60	k ₆	3000

ただし、 $l=0.5(\text{m})$

図1 同定モデル

表 2 固有値解析結果

	Eigen value (rad/s)	
	Model I	Model II
λ_1	$-0.0389+2.8744i$	$-1.2434+12.046i$
λ_2	$-0.3644+8.1740i$	$-2.5713+23.760i$
λ_3	$-0.8540+12.808i$	$-13.379+40.299i$
λ_4	$-1.5247+16.652i$	$-9.8655+45.369i$
λ_5	$-1.7937+19.726i$	$-13.608+58.677i$

表 3 相対重み係数 W

This method	Bayesian
○	△
0	0
0.1	0.001
0.2	0.002
0.33	0.01
0.5	0.02
1	0.05
2	0.1
3	0.2
5	0.5
10	1

を行った結果を示す。系のパラメータ k_1 , k_4 ともモデルの見積もりに 25% の誤差があり (すなわち, モデルのパラメータの初期値としては $k_{10}=104$, $k_{40}=120$ として) 相対重み係数 W を表 3 のように変化させ, その他の重み係数はすべて 1 と置いて計算を行った様子である。両者とも W を大きな値にした場合, すなわち理論解析に重みをおいた場合は初期のパラメータ推定値からの変化が小さく, 逆に W を小さな値にした場合, すなわち実験解析に重みをおいた場合は初期のパラメータ推定値から大きく変化して実験値を忠実に表現する値に収束している ($W=0$ の場合は最小二乗法による同定となる)。しかし, ベイジアン手法では二つのパラメータに等価な誤差を与えているにもかかわらずパラメータの変化量にかなりの偏りが見られる。また, W の値の変化によってどのような値に収束するかを予測することが不可能である。規準化した誤差関数を用いた本手法では等価な誤差をもつ二つのパラ

(a) 採用する応答の数が 2 個の場合

(a) 採用する応答の数が 2 個の場合

(b) 採用する応答の数が 3 個の場合

○: 本手法 △: ベイジアン手法

図 2 相対重み係数 W の変化による同定値 (モデル I)

(b) 採用する応答の数が 3 個の場合

○: 本手法 △: ベイジアン手法

図 3 相対重み係数 W の変化による同定値 (モデル II)

メータは同じ割合で変化し同定値は偏りもなく求まっている。また、 $W=1$ の場合すなわち、パラメータの推定値と実験値に等しく重みをおいた場合には推定値と実験値のほぼ中間点に同定値は収束している。

また同定のために採用する応答の数を変えた場合、本手法においては同定値にほとんど変化は見られなかったがベイジアン手法ではかなりの変化が見られた。これはベイジアン手法では採用する応答の数を変えると誤差関数の第1項のみが変化するのに対し、本手法では第2項も第1項の変化に応じて対応し誤差関数の平衡が保たれるためである。

図3はモデルIIにおいて系のパラメータを m_2 と k_5 にとり、それぞれモデルの見積もりに25%の誤差があり(すなわち、モデルパラメータの初期値としては $m_{20}=4$, $k_{50}=1600$ として)、前と同様の計算を行った結果である。前と同様な結果が得られている。また、モデルIとモデルIIを比較した場合、本手法では、モデルにかかわらず同様な同定値に収束しているが、ベイジアン手法では同定値に変化が見られる。

図4, 5はパラメータ間の相対重み係数 w_p を変化させたときのパラメータの同定値である。パラメータ

の同定値に注目し、モデルIとモデルIIを比較すると、ベイジアン手法では同定値の偏りの大きさにかなりの違いが見られるが、本手法においては両者はほとんど同様な同定値に収束している。すなわち、本手法においては同定値はモデルにかかわらず、パラメータ間の相対重み係数 w_p の大きさのみに依存させて同定を行うことができる。

図6, 7は応答値間の相対重み係数 w_r を変化させたときのパラメータの同定値の応答値である。図6, 7において $\bar{R}$ は初期理論解析値 R_0 から実験値 R_e への無次元変動量すなわち、

$$\bar{R} = (R - R_0) / (R_e - R_0) \times 100 \quad \dots\dots\dots (19)$$

を表す。応答値に注目し、モデルIとモデルIIを比較するとベイジアン評価手法では応答値の偏りの大きさにかなりの違いが見られるが、本手法においては両者はほとんど同様な応答値に収束している。すなわち、本手法においては同定値の応答値はモデルにかかわらず、 w_r の大きさのみに依存させて同定を行うことができる。

(a) モデルI

(b) モデルII

○ : $w_{p11}=1, w_{p22}=1$ △ : $w_{p11}=2, w_{p22}=1$
□ : $w_{p11}=1, w_{p22}=2$

図4 ベイジアン手法の相対重み係数 w_p による同定値

(a) モデルI

(b) モデルII

○ : $w_{p11}=1, w_{p22}=1$ △ : $w_{p11}=2, w_{p22}=1$
□ : $w_{p11}=1, w_{p22}=2$

図5 本手法の相対重み係数 w_p による同定値

(a) モデル I

(b) モデル II

○ : $w_{r11}=1, w_{r22}=1$ △ : $w_{r11}=2, w_{r22}=1$
 □ : $w_{r11}=1, w_{r22}=2$

図 6 ベイジアン手法の重み係数 w_r による同定値の応答値

(a) モデル I

(b) モデル II

○ : $w_{r11}=1, w_{r22}=1$ △ : $w_{r11}=2, w_{r22}=1$
 □ : $w_{r11}=1, w_{r22}=2$

図 7 本手法の重み係数 w_r による同定値の応答値

5. 結 言

(1) ベイジアン手法の誤差関数を規準化することによって、実験値と系のパラメータの推定値の相対的な重み係数を容易に決定できるようになった。すなわち、実験値に重みをおいた同定値、または、理論値に重みをおいた同定値が定量的かつ容易に求めることができるようになった。

(2) 等価な誤差をもつパラメータはその誤差に応じて同じ割合で変化し同定値に偏りは、ほとんどなくなった。また、同定のために採用する応答値の数の変化によっても同定値は偏りなく求まった。

(3) 本手法によると、パラメータ間の相対重み係数を変化させた場合、同定値はモデルにかかわらず相

対重み係数のみに依存させることができる。また、応答値間の相対重み係数を変化させた場合、同定値の応答値は相対重み係数のみに依存させることができるので、各実験値あるいは理論解析の各初期パラメータのいずれを重視して同定するかを定量的に決めることができる。

文 献

- (1) Caravani, P., *Trans. ASME, Ser. E*, 41-2 (1974), 379.
- (2) Beliveau, J., *Trans. ASME, Ser. E*, 43-2 (1976), 335.
- (3) Collins, D. C., ほか 3 名, *AIAA J.*, 12-2 (1974), 185.
- (4) 長松・ほか 2 名, 機論, 49-439, C (昭 58), 314.
- (5) Blakely, K. D. and Walton, W. B., *Proc. 2nd Int. Modal Anal. Conf.*, 12308 (1984), 82.
- (6) 井上・ほか 3 名, 機論, 50-452, C (昭 59), 4.
- (7) 長松, モード解析, (昭 60), 267, 培風館.

討 論

〔質問〕 稲 村 豊四郎〔金沢大学工学部〕

(1) 貴論文の要旨は、本文式(1)における右辺第1項と第2項の意味を同一の基準にそろえるということであろうと思うが、このような事柄はとりたてて新しい事柄ではなく、例えば文献(付1)にも半ば周知の事実として使われている。この点につき貴論文のオリジナリティはどこにあるのかを示していただきたい。

(2) 実験値により解析モデルを改良する研究として文献(1)～(4)を挙げておられるが、不十分のように思う。この種の研究は *AIAA Journal* を中心に数多くあり、また質問者らも文献(付2)などに論文を出している。著者のご見解をお聞かせ願いたい。

〔回答〕 (1) 本論文の要旨は、本文式(1)にお

けるベイジアン手法の誤差関数を重み係数マトリックスを変えることによって規準化を行う方法を提案したことである。ご指摘のあった論文は、ベイジアン手法を多自由度構造物に適用したものであり、その方法、内容においても、本論文で提案した手法が周知の事実として使われているようには、読取れない。

(2) ご指摘のように、これらの研究に対しては、数多くの論文が出されているが、代表的なものとして(1)～(4)を挙げた。

(付1) Dobbs, M.W. and Nelson, R.B., Parameter identification of large structural Models-Concept and Reality, *Modal Testing and Model Refinement*, AMD-159 (1983), ASME.

(付2) 稲村・ほか, 精密機械, 51-9 (昭60).