動的応答実験と逐次積分法を併用した動的応答解析*

佐野 久**, 山川 宏***

Dynamic Response Analysis by a Combined Method of Experimental Data and the Step-by-Step Integration Technique

Hisashi SANO and Hiroshi YAMAKAWA

This paper is aimed at proposing a method of dynamic response analysis by combining experimental data with the step-by-step integration technique. The objective structures are supposed to be divided into two parts: a part which it is possible to analyze, and a part which it is difficult or impossible to analyze. In the proposed method the step-by-step integration technique in the large matrix method or in the incremental transfer matrix method is applied only to the part which it is possible to analyze, and experimental data are used in place of the part impossible to analyze. The necessary number of experimental data are adopted to compensate for the lack of the number of boundary conditions which are yielded by the part which it is impossible to analyze. Several numerical results were obtained by the method in beam and frame structures. The validity and the effectiveness were confirmed through those results.

Key Words: Vibration, Structure, Dynamic Response, Experimental Data, Incremental Transfer Matrix Method

1. 緒言

構造物の動的応答を解析する際、その構造物が解析に手数のかかる部分や解析不可能な部分を含む場合がある。動的応答実験と理論解析を組合せることができるモーダルアナリシスは多くの研究がなされているが、原理的には線形系に対してのみ適用可能であり、時間的に変化するパラメータを有する系や、非線形系への適用はできないため、他の有効な解法が望まれている。そこで本研究ではその一つの試みとして、構造物を理論解析可能な部分と不可能な部分とに分けて考え、動的応答実験と逐次積分法を組合せることによって理論解析可能な部分の動的応答を求める手法を提示し、その妥当性を検討することを目的とした。

提案する手法では、対象構造系を解析可能な部分と解析不可能な部分とに便宜的にみなし、解析可能な部分に対しては有限要素法などの離散系化手法を適用して運動方程式を導き、それを逐次積分法にて解く。一方解析不可能とみなした部分は解析を行わず、それに

よって失われた境界条件は、この部分に隣接した、あるいは境界上において実験により採取された変位または加速度などの時刻歴応答データによって補てんする。この手法によれば、例えば実験のみにより必要箇所の応答測定は困難であるが、別の箇所の時刻歴応答記録が実験により採取可能な場合などに、解析により必要箇所の応答を得ることができる。

提示した手法に基づき計算プログラムを増分伝達マトリックス法にて作成し、塑性域を有するはりや平面フレーム構造に対して適用する一方、各種の数値計算上の検討を行い、提示した方法の妥当性と有効性を示す。

2. 動的応答実験と逐次積分法を併用した動的応答解析法

本章では、動的応答実験と逐次積分法を組合せた動的応答解析法について述べる。まず解析対象の構造物を理論解析可能な部分と不可能な部分とに便宜的に分けて考える。解析可能な部分と不可能な部分との境界は解析者が妥当と思うところで決める。ただしここに理論解析不可能な部分とは、例えば構造物の非線形性を有する部分などのことを言い、大変形解析や弾塑性解析を用いれば解析可能となるかもしれないが、解析

* 昭和61年8月22日 第938回講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月3日。

** 准員、本田技研工業(株) (〒107 東京都港区南青山2-1-1)。

*** 正員、早稲田大学理工学部 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)。

には手数がかかるため、本論文ではあまり適切な表現でないかもしれないが仮想的にこの部分を解析不可能な部分と称して取扱うことにし、この部分は解析しない。そして理論解析可能な部分は有限要素法によって離散化する。以下には最初に構造物全体の自由度を有する大マトリックス法を用いた方法について簡単に述べた後、増分伝達マトリックス法を用いた方法について主体的に述べる。

2.1 大マトリックス法による解析方法

2.1.1 構造物全体が解析可能な場合 構造物を要素分割し有限要素法によって離散化する。i番目の要素の時刻 t より微小時間 Δt 経過後の時刻 $t + \Delta t$ 後における運動方程式は

$$m_i \ddot{q}_i(t + \Delta t) + c_i \dot{q}_i(t + \Delta t) + k_i q_i(t + \Delta t) = Q_i(t + \Delta t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

と記述できる。ここに m_i , c_i , k_i は i 番目要素の質量、減衰、剛性の各マトリックスで q_i , Q_i は i 番目要素の変位ベクトルおよび力ベクトルである。また $\cdot = d/dt$, $\ddot{\cdot} = d^2/dt^2$ である。各要素の接続点での力の平衡条件と変位の適合条件から構造物全体の運動方程式は

$$M \ddot{q}(t + \Delta t) + C \dot{q}(t + \Delta t) + K q(t + \Delta t) = Q(t + \Delta t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表記できる。ここに M , C , K は構造物全体の質量、減衰、剛性の各マトリックスで q , Q は構造物全体の変位ベクトルおよび力ベクトルである。

本研究では既存の各種の逐次積分法の中から Newmark の β 法を採用することにする。Newmark の β 法による時刻 $t + \Delta t$ における変位と速度の近似式は時刻 t における $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ を用いて次のように表せる：

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \ddot{q}(t) + \beta(\Delta t)^2 \ddot{q}(t + \Delta t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{q}(t) + \Delta t\gamma\ddot{q}(t + \Delta t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(2)～(4)から $\ddot{q}(t + \Delta t)$, $\dot{q}(t + \Delta t)$ を消去して

$q(t + \Delta t)$ について特にまとめれば

$$Q(t + \Delta t) = U q(t + \Delta t) + G(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここに

$$U = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C + K \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$G(t) = - \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M \left\{ q(t) + \Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2 \ddot{q}(t) \right\} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \left\{ q(t) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\Delta t \dot{q}(t) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\gamma}\right)(\Delta t)^2 \ddot{q}(t) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。式(5)はさらに次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} Q(t + \Delta t) \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U & G(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(t + \Delta t) \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで式(8)を次のように略記しよう。

$$Q_{\text{SYS}} = K_{\text{SYS}} q_{\text{SYS}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

なお式(2)～(4)は $q(t + \Delta t)$ 以外の $\dot{q}(t + \Delta t)$, $\ddot{q}(t + \Delta t)$ のいずれかについてもまとめられ、それぞれ

$$Q_{\text{SYS}} = C_{\text{SYS}} \dot{q}_{\text{SYS}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$Q_{\text{SYS}} = M_{\text{SYS}} \ddot{q}_{\text{SYS}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と書くことができる。

いま一節点 n 自由度を持ち、節点数が m 個あるとすれば式(9)の力ベクトルおよび変位ベクトルの成分個数は表1のようになる。ただし式(9)の力ベクトル、変位ベクトル中の1は付加項を表現するためのもので成分個数には含めない。そして境界条件から既知成分が与えられ、既知成分と未知成分の個数は通常表2のようになる。方程式の数 mn , 未知成分個数 mn であるから式(9)が解ける。

2.1.2 構造物が解析不可能な部分をもつ場合の取扱い 構造物を N 個の部分構造に分け、そのうち R 個の部分構造が解析不可能な部分であるとする。解析不可能な部分は構造物のどこにあってもよい。この場合の残りの $N - R$ 個の解析可能な部分を解析する方法を次に示す。解析可能な部分を有限要素法によって要素分割し離散化したときの節点数を m 個とし、解析不可能な部分と s 個の節点で接続されているものとする。解析可能な部分では2.1.1項の理論がそのまま使えてベクトル成分の数も表1に示すものと同じである。境界条件から既知成分が与えられ、既知成分個数と未知成分個数は表3のようになる。

しかしこのままでは未知数が方程式の数よりも多く式(9)は解くことができない。この不足を補うために

表1 ベクトル成分の個数

Number of displacement vector components	mn
Number of force vector components	mn
Total number of vector components	$2mn$

実験値の導入を考えるが、たわみ角などの回転自由度などは実験では測定が難しいために、ここでは次の方法を考案した。解析可能な部分と不可能な部分との接続点および解析可能部分側の近傍節点の変位のみ合計 sn 個測定し、この実験値を既知成分として取り入れればベクトル成分の既知成分個数と未知成分個数は表 2 と同一になる。したがって方程式の数 mn 、未知成分個数 mn となるから式(9)を解くことができ解析可能な部分の解析ができる。

なお実験で速度、加速度を測定する場合にはそれぞれ式(10)、(11)を用いればよい。

2.2 増分伝達マトリックス法による解析方法

各種の系は結局図 1 のような連鎖接続系に帰着できるので、ここでは簡単のため連鎖接続系で説明を行う。解析には著者の一人によって提唱された計算時間短縮、記憶容量節約を長所にもつ増分伝達マトリックス法を用いることにする⁽¹⁾。

構造物を有限要素法によって図 1 に示すように N 要素に分割し離散系化したとする。 i 番目の要素の時刻 $t+\Delta t$ における運動方程式は既に式(1)で記述した。ここでも Newmark の β 法を採用することにすれば時刻 $t+\Delta t$ における変位と速度の近似式も式(3)、式(4)において $q, \dot{q}, \ddot{q}$ を要素レベルの $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ に置き換えると式(3)、(4)と同じになる。そして自由

度は要素レベルとなるが、式(8)と同形にすることができて、次のように表現できる。

$$\begin{Bmatrix} -Q^L \\ Q^R \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} u_A & u_B & g^L \\ u_B^T & u_C & g^R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} q^L \\ q^R \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を伝達マトリックスの関係式に変換すると

$$\begin{Bmatrix} q \\ Q \\ 1 \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} t_A & t_B & t_C \\ t_D & t_E & t_F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} q \\ Q \\ 1 \end{Bmatrix}_i^L \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。式(13)を次のように略記する。

$$Z_i^R = T_i Z_i^L \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の T_i が要素の増分伝達マトリックスである。

さらに Z_i^R, Z_i^L などは

$$\begin{cases} Z_i^R = Z_{i-1}^R \\ Z_{i+1}^L = Z_i^R \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (15)$$

の関係があることを考慮すれば、連鎖接続系化された構造物の始端と終端の状態ベクトルの間の関係は

$$Z_N^R = T_N T_{N-1} \dots T_2 T_1 Z_1^L = T Z_1^L \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここに T は系全体の増分伝達マトリックスで各要素の増分伝達マトリックスの連乗で求めることができる。

2.2.1 構造物全体が解析可能な場合 構造物が図 1 のように連鎖接続系に帰着できたとすると、上述の理論がそのまま使えるので式(16)を解けばよいことになる。状態ベクトルの成分数が、状態ベクトル中の 1 を除いて $2m$ あるとすれば始端と終端の状態ベクトルの成分数は $4m$ である。始端と終端の境界条件から既知成分が与えられる。境界条件数、状態ベクトルの既知成分個数および未知成分個数を表 4 に示す。方程式の数 $2m$ 、未知成分個数 $2m$ であるから式(16)を解くことができる。

2.2.2 構造物が解析不可能な部分をもつ場合の取扱い 図 2 に示すように連鎖接続系 N 個の部分構造のうち R 個の部分構造が解析不可能な部分であるとする。この解析不可能な部分は始端、終端のいずれにあってもよいし、両側にあってもよいが、ここでは始端にある場合を考えることにする。この場合の $N-R$ 個の解析可能な部分を解析する方法を示そう。図 2

表 2 ベクトル成分の既知個数と未知個数

Number of known components	mn
Number of unknown components	mn

表 3 ベクトル成分の既知個数と未知個数

Number of known components	$(m-s)n$
Number of unknown components	$(m+s)n$

表 4 諸量の個数

Number of boundary conditions at start point	m
Number of boundary conditions at end point	m
Number of known components	$2m$
Number of unknown components	$2m$

図 1 連鎖接続系

の解析可能な部分だけを取り出せば図1の連鎖接続系モデルと同じになり、式(16)を解くことになる。しかし始端の解析不可能な部分によって、始端の境界条件から本来 m 個得られるはずの既知成分が $m-s$ 個しか得られない。ここに s は解析不可能な部分と接続しているために生じる未知成分個数である。この場合の境界条件数、状態ベクトルの既知および未知成分個数を表5に示す。

方程式の数は $2m$ であり、このままでは未知数が方程式の数より多く式(16)は解けない。そこで解析可能な部分と不可能な部分との接続点および解析可能部分側の近傍節点の変位を合計 s 個測定し、この実験値を始端の境界条件として使えるように増分伝達マトリックスを変換する。このときの境界条件数、状態ベクトルの既知成分個数および未知成分個数は表4と同一のものとなる。したがって方程式の数 $2m$ 、未知成分個数 $2m$ となるから式(16)を解くことができる。

なお大マトリックス法の場合と同様に、実験で速度、加速度を測定する場合はそれぞれ式(10)、(11)と同形の要素レベルの自由度の式を用いて増分伝達マトリックスを導出すればよい。

2.3 解析不可能な部分をもつはりの解析 構造物として図3に示す簡単な片持ばりを取り上げ本論文の手法を具体的に例示する。解析可能な部分は有限要素法によって3要素に分割され離散系化されたとする。図3(a)に示すように系全体が解析可能であれば固定端と自由端でそれぞれ2個ずつ計4個の境界条件が与えられる。しかし図3(b)のように、はりの先端に解析不可能な部分がある場合は左側の境界条件2個が与えられないため不定となる。そこで実験によって2点の変位(あるいは速度、加速度)を測定し、これを境界条件として与え解析可能な部分を解析するわけである。

3. 解析結果

本論文で提示した手法の妥当性を確認するため増分伝達マトリックス法を用いたプログラムを作製し数値計算を行った。以下の計算例ではNewmarkの β 法のパラメータ β, γ はそれぞれ1/4, 1/2として計算した。また実験で使用するモデルはSS41で作製し、材料定数は縦弾性係数 $E=186\text{ GPa}$ および密度 $\rho=7.83 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ を用いた。図中の*を付した量は解析に採用する実験値を表している。

図4は全系解析可能な構造物である片持ばりの一部分を仮想的に解析不可能であるとし、はりの先端に衝撃荷重を加え、実験から得られた2点の時刻歴応答結

果を用いて解析した結果である。図5は非線形構造物として、片持ばりの先端に薄い鉛板を装着し、鉛板を塑性変形させた場合の2点の時刻歴応答結果を用いて解析した結果である。図4, 5ともに比較のため計算した節点の実験値も示してある。図4, 5から計算値と実験値はほぼ一致していることがわかる。だが計算値の波形を見ると高周波成分が混入している。

高周波成分の混入原因について定性的な検討を行ったが、ここでは簡単に触れておく程度にとどめる。なお逐次積分法使用時の高周波成分混入については例えば文献(2)などに報告されている。図6は片持ばりの先端に半正弦波の衝撃荷重を加えたときの2点の計算値を仮想的に実験値とみなし、有効数字のけた数を意図的に落とし誤差を混入させて計算した結果である。図6から誤差が大きくなると高周波成分が混入するこ

表5 諸量の個数

Number of boundary conditions at start point	$m-s$
Number of boundary conditions at end point	m
Number of known components	$2m-s$
Number of unknown components	$2m+s$

A : Parts impossible to analyze

B : Parts possible to analyze

図2 解析不可能な部分をもつ連鎖接続系

A : Parts impossible to analyze

B : Parts possible to analyze

(a) 全系解析可能な片持ばり

(b) 解析不可能な部分をもつ片持ばり

図3 片持ばり

とがわかる。高周波成分の混入は実験値に含まれている誤差が主因であり、一種の変位強制的なものが引き金となったものと推定される。高周波成分の抑制には時間ステップをあらくしたり、弱い減衰を入れて計算すると有効であることが各種の計算で確認できたので、図4と図5のモデルに弱い減衰を入れて計算を行ってみた結果を図7, 8に示す。

次に平面フレームモデルを用いて同様の計算を行った。その結果を図9, 10に示す。いずれも計算値と実験値は良好な一致を示している。

4. 結 論

本論文で得られた結論は次の3点である。

(1) 構造物を理論解析可能な部分と不可能な部分に分けて考え、その接続点および接続点近傍の変位、加速度などを実験により測定し、それを境界条件とみなし実験値と大マトリクス法あるいは増分伝達マトリクス法を組合せて解析可能な部分の動的応答を求める手法を提示し、いくつかの計算例を通じてそ

図4 全系解析可能な片持ばりの変位応答

図5 解析不可能な部分をもつ片持ばりの変位応答

の妥当性と有効性を確認した。

(2) 実験値入力による解析の際、場合によっては計算結果に高周波成分が混入することがあり、各種の検討によりこれは誤差による変位強制が引き金となるためと推定され、高周波成分を抑制するためには時間ステップ、減衰を適切に選択すれば有効であることがわかった。

図6 計算値 v_a^* , v_b^* の精度を落として実験値として入力した変位応答

図7 図4のモデルに弱い減衰を入れて計算

図8 図5のモデルに弱い減衰を入れて計算

図9 全系解析可能な平面フレームの変位応答

(3) 本手法を用いれば解析不可能な部分や解析に手数のかかる部分を有する系に対し、実験値の採取が困難な他の箇所などの動的挙動の理論的計算が実験値を用いることにより可能になると思われる。

末筆ながら、本研究は著者の一人佐野が早稲田大学大学院在学中に行った研究を基としており、その際に本論文の基礎的な研究を行った高木 修氏〔現在、東芝(株)勤務〕および貴重な助言をいただいた早稲田大学 奥村敦史教授に厚くお礼申し上げるとともに、モデル実験を遂行してくれた平井 理(現在、早稲田

図10 解析不可能な部分をもつ平面フレームの変位応答

大学大学院存学), 山縣 毅(現在、早稲田大学大学院在学)の両君に感謝いたします。

文 献

- (1) 山川・大西, 機論, 48-429, C (昭57), 672.
- (2) 鷲津・ほか4名, 有限要素法ハンドブックII応用編, 40, (昭58), 培風館.

討 論

〔質問〕 本 江 明(㈱東芝総合研究所)

(1) 「図3の例では、実験によって2点の変位(あるいは速度、加速度)を測定し…」とあるが、いろいろの組合せが考えられる。それぞれの組合せの得失、得失があればその物理的意味についてもお教え願いたい。

(2) 3165 ページ左欄1行めから「高周波成分の混入は実験値に含まれている誤差が主因であり、一種の変位強制的なものが引き金になったものと推定される」とあるが、これは「実験値の高周波成分に誤差が混入」したとの主張か。

(3) 図4, 5を加速度で評価した場合、解析と実験の両者に非常に大きな誤差を生じている。本来高調波は生じないとわかっていたり、高調波成分は問題にならないとわかっている場合を除いて、人工粘性の挿入は、かえって現象の本質を見失うおそれはないか。

〔回答〕 (1) 逐次積分法のアルゴリズムを併用

しているため数値計算上はどの組合せも可能で、また差異は少ないものと考えられるが、実験によるデータ採取時には、変化の激しい加速度よりはるその積分値で

(a) 中間に解析不可能な部分をもつ片持ばり

(b) 分割された片持ばり

付図1 中間に解析不可能な部分をもつ場合の解析方法

ある変位などのほうが全体としての誤差は少ないものと考えている。本論文で示した例でも変位を用いた場合と加速度を用いた場合との計算も試みているが、両者の差異はほとんど認められなかった。

(2) 本文中の文献(2)の42ページにも示されているように、逐次積分法による数値計算のみでも場合によっては不自然な高次モードの混入がみられる。本研究の手法では実験による測定値を一部使用しているために、いわゆる真の値との間には低次、高次のモードを含めて誤差が生じているものと考えられる。この誤差が一種の変位強制的な役割をし、逐次積分法中の不自然な高次モードの混入を促進しているものと推察している。本論文中には述べなかったが著者らはいくつかの数値計算実験にてこの点を検討している。

(3) 確かにご指摘のように高調波成分が特に問題となる場合に安易な人工粘性の挿入には問題があると著者らも考えている。本研究では通常の設計では低周波数成分を問題とすることが多いことを考えて人工粘性のそう入を問題解決の一手段として述べたわけであ

るが、高調波成分そのものが問題となるときは、他の方法、すなわち刻み幅を調節する方法などを検討する必要があるものと考えている。

〔質問〕 長 松 昭 男〔東京工業大学工学部〕

貴報では、解析不可能な部分が、始端と終端の片方または両方に存在する場合のみについて解かれている。しかし解析不可能な部分は、例えばボルト結合部やすべり面などのように、解析可能な部分にはさまれて中間に存在することのほうが多いと思われる。このような場合にも貴報で提案された方法は有効か。

〔回答〕 解析不可能な部分が、解析可能な部分にはさまれて中間に存在している場合も本論文の手法は有効である。

例えば付図1(a)に示すような中間に解析不可能な部分をもつ片持ばりを扱う場合、付図1(b)のように二つに分ければ本論文の手法が使える。ただし④、⑤両方の応答を解析で求めようとする場合には、必要な実験測定点は④で2箇所、⑤で2箇所、計4箇所になる。