平面6節機構の層配置に関する研究*

坂本吉弘**, 舟橋宏明***
小川 潔**, 本多立弥****

Research into the Layer Arrangements of Six-Bar Mechanisms

Yoshihiro SAKAMOTO, Hiroaki FUNABASHI,
Kiyoshi OGAWA, and Tatsuya HONDA

The layer arrangements of planar six-bar crank mechanisms with only revolute pairs, namely the arrangements of links to parallel planes such as to avoid mutual interferences of the moving links are discussed with consideration of the displacement characteristics of the mechanisms. The types of mechanisms that cannot be constructed as crank mechanisms only by arrangements of each link to parallel planes are listed. For such mechanisms, pairs on the same link are proposed to be arranged on different layers. The minimum numbers of layers required to construct crank mechanisms are investigated, and the numbers are applied to classify the types of the six-bar crank mechanisms.

Key Words: Mechanism, Planar Six-Bar Mechanism, CAD, Layer Arrangement, Interferences of Links

1. 緒 言

平面機構の設計において、機構の運動中における動節間の干渉を避けるために各動節を複数の平行平面上に配置し、しかも配置する機構の占有空間は配置可能な空間のうち最小のものを選ぶ必要がある。

著者のふたりは先にグラフィックディスプレイを用いた機構の最小層数の組織的な決定について述べたが⁽¹⁾、これを各対偶の回転または揺動運動に対する従動節の変位線図の特性によって解析した平面6節機構⁽²⁾⁽³⁾に適用した結果、この方法は機構の動節上の対偶を各節についてすべて一平面内に配置しているために機構の運動中に動節間の干渉が生じ、そのために最小層数の決定ができない機構の存在することがわかった。そこで本報では、上記平面6節機構のうち、最小層数の決定できない機構について、任意の動節上の対偶を複数の層に分けて配置することにより動節間の干渉を回避し、これによって節形状ならびに最小層数の決

定を可能にする。また、上記によって得られた最小層数を用いて平面6節機構に対する分類を行う。

2. 節の層配置

2-1 動節間の干渉を考慮した機構の最小層数

図1に示す平面6節機構の層配置を行うために、これら機構のうちの対偶が低次のまわり対偶のみで構成され、しかも原動節が $2\pi\text{rad}$ 以上回転する機構を取り上げて、機構の形式を分類し、各対偶の回転または揺動運動に対する従動節の変位線図の幾何的特性を表1に示す。表1中の J_{ij} は節 L_i および L_j を連結する対偶を、 θ , ϕ および ψ は原動節角変位、従動節角変位および原・従動節を除く腕節の角変位を表す。また表1中の数値は $0 \leq \theta \leq 2\pi\text{rad}$ における各角変位の極値の数を示す。一般に各節上の対偶をそれぞれ一平面内に配置するとき機構の層に対する制約条件は、機構中の対偶 J_{ij} および J_{jk} が回転する場合、節 L_i , L_j および L_k を配置する層の番号を $P(i)$, $P(j)$ および $P(k)$ とすれば

$$P(i) \leq P(j) \leq P(k) \dots\dots\dots (1)$$

(複号同順)

で表され⁽¹⁾、これを表1に示す機構に適用すれば各機構の制約条件は表2のようになる。さらに、節の連結

* 昭和61年9月28日 北海道支部第28回講演会において講演、原稿受付 昭和61年2月19日。

** 正員、武蔵工業大学工学部 (〒158 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)。

*** 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

**** 武蔵工業大学大学院。

状態をマトリックス M で表示すれば

$$M = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

となる。ただし、上式のマトリックスの成分は左から

図 1 平面 6 節機構

および上から順に L_i, L_j および L_k に対応し、互いに連結される場合を 1 としている。以後、このマトリックスをインシデンスマトリックスと呼ぶ。

ここで、機構の節数および層数を N および P_N とし節 L_1 の層 $P(1)=1$ と仮定する。また、層を要素とする集合 $A=\{1, 2, \dots, P_N\}$ および式 (1) に示す制約条件により節 L_k ($k=2, 3, \dots, N$) を配置できない層の集合 $B_k=\{P(m)|1 \leq m \leq k-1, m \text{ は } M(k, m)=1 \text{ を満たす整数}\}$ とすれば、節 L_k は集合 A と B_k の補集合 B_k^c との積集合 C_k , すなわち

$$C_k = A \cap B_k^c \dots\dots\dots (3)$$

の要素のいずれかに配置できる。したがって、空集合を ϕ で表せば、機構の最小層数は $C_k \neq \phi$ を満たす P_N の最小値となる。さらに、この層数のもとで機構が一周期運動する間の動節の運動軌跡をグラフィックディスプレイによって描き⁽⁴⁾、干渉を避けた節形状を決定することにより機構の最小層数を求めることができる。

式 (3) の適用例として図 2 に示す A・3・1 形機構を取り上げ節形状および最小層数を求める。

表 2 よりこの機構の制約条件は

$$P(1) \leq P(2) \leq P(3) \quad (\text{複号同順})$$

となる。

インシデンスマトリックス M_A は

表 1 平面 6 節機構の形式

Type	Pairs Making Full Rotation	Displacement Characteristics				Type	Pairs Making Full Rotation	Displacement Characteristics			
		$\frac{d\psi}{d\theta}=0$	$\frac{d\phi_2}{d\theta}=0$	$\frac{d\psi}{d\phi}=0$	$\frac{d\phi}{d\phi}=0$			$\frac{d\psi}{d\theta}=0$	$\frac{d\phi_2}{d\theta}=0$	$\frac{d\psi}{d\phi}=0$	$\frac{d\phi}{d\phi}=0$
A・1	J12, J15, J16					D・1	J12, J16				
A・2・1	J12, J16, J34, J46					D・2・1	J12, J24, J45, J56	2			
A・2・2	J12, J15, J34, J45					D・2・2	J12, J24, J45, J56	3			
A・3・1	J12, J23					D・2・3	J12, J24, J45, J56	4			
A・3・2	J12, J23			1		D・2・4	J12, J24, J45, J56	5			
A・3・3	J12, J23			1	1	D・2・5	J12, J24, J45, J56	6			
A・3・4	J12, J23			2		E・1・1	J12, J23				
A・3・5	J12, J23			2	2	E・1・2	J12, J14, J35				
B・1	J12, J14, J16					E・2・1	J12, J16, J23, J35				
B・2	J12, J14, J45					E・2・2	J12, J14, J16				
B・3・1	J12, J23					F・1	J12, J16				
B・3・2	J12, J23			1		F・2	J12, J23				
B・3・3	J12, J23			2		G・1	J12, J16				
C・1・1	J12, J16					G・2	J12, J23, J25				
C・1・2	J12, J16			1		G・3	J12, J25, J45				
C・1・3	J12, J16			2		H・1	J12, J16				
C・1・4	J12, J16			3		H・2	J12, J16, J24, J56				
C・2・1	J12, J23					H・3	J12, J23, J24				
C・2・2	J12, J23		1			H・4	J12, J23, J56				
C・2・3	J12, J23		2								
C・2・4	J12, J23		3

図 2 A・3・1形機構

図 3 A・3・1形機構の節 L_2 に対する同層の節の相対軌跡

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

である。図 2 において、原動節 L_2 が一周期運動する間の節 L_2 に対する同層の節、すなわち節 L_4 の相対軌跡をグラフィックディスプレイによって描けば図 3 となり、 L_4 は L_2 に対して干渉を生じていないことがわかる。同様に他の節についてもグラフィックディスプレイによって動節間の干渉の有無を判断し、節形状および層配置を求めれば、図 4 (a) および (b) のようになり、この機構の最小層数は 3 となる。

同様に、表 2 に示す制約条件より各機構の最小層数が表 3 のように求められる。表 3 において横線を施してある欄の最小層数は決定が不可能であることを示している。

例えば図 5 に示す B・2 形機構において、節 L_5 に対して同層の節、すなわち節 L_3 の相対軌跡は図 6 となり、節の形状を変更しても L_3 と L_5 の間の干渉は避けることができず、したがってこの機構の最小層数は決定できないことがわかる。同様のことが A・2・1, A・2・2, D・2・1, D・2・2, D・2・3, D・2・4, D・2・5, G・3 および H・2 形機構についても言える。さらに、A・1, B・1, E・1・2, E・2・2, G・2, H・3 および H・4 形機構に対しても表 2 に示す制約条件を満足せず、これらの機構に対す

表 2 平面 6 節機構の制約条件

Type	Constraint	Type	Constraint
A・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(5), P(2) \leq P(1) \leq P(6), P(5) \leq P(1) \leq P(6)$	D・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(6)$
A・2・1	$P(1) \leq P(6) \leq P(4), P(2) \leq P(1) \leq P(6), P(3) \leq P(4) \leq P(6)$	D・2・1	$P(1) \leq P(2) \leq P(4), P(2) \leq P(4) \leq P(5), P(4) \leq P(5) \leq P(6)$
A・2・2	$P(1) \leq P(5) \leq P(4), P(2) \leq P(1) \leq P(5), P(3) \leq P(4) \leq P(5)$	D・2・2	
A・3・1	$P(1) \leq P(2) \leq P(3)$	D・2・3	
A・3・2		D・2・4	
A・3・3		D・2・5	
A・3・4		E・1・1	$P(1) \leq P(2) \leq P(3)$
A・3・5		E・1・2	$P(2) \leq P(1) \leq P(4), P(3) \leq P(1) \leq P(2), P(3) \leq P(1) \leq P(4)$
B・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(4), P(2) \leq P(1) \leq P(6), P(4) \leq P(1) \leq P(6)$	E・2・1	$P(1) \leq P(2) \leq P(3), P(2) \leq P(1) \leq P(6), P(2) \leq P(3) \leq P(5)$
B・2	$P(2) \leq P(1) \leq P(4), P(1) \leq P(4) \leq P(5)$	E・2・2	$P(2) \leq P(1) \leq P(4), P(2) \leq P(1) \leq P(6), P(4) \leq P(1) \leq P(6)$
B・3・1	$P(1) \leq P(2) \leq P(3)$	F・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(6)$
B・3・2		F・2	$P(1) \leq P(2) \leq P(3)$
B・3・3		G・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(6)$
C・1・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(6)$	G・2	$P(1) \leq P(2) \leq P(3), P(1) \leq P(2) \leq P(5), P(3) \leq P(2) \leq P(5)$
C・1・2		G・3	$P(1) \leq P(2) \leq P(5), P(2) \leq P(5) \leq P(4)$
C・1・3		H・1	$P(2) \leq P(1) \leq P(6)$
C・1・4		H・2	$P(1) \leq P(2) \leq P(4), P(1) \leq P(6) \leq P(5), P(2) \leq P(1) \leq P(6)$
C・2・1	$P(1) \leq P(2) \leq P(3)$	H・3	$P(1) \leq P(2) \leq P(3), P(1) \leq P(2) \leq P(4), P(3) \leq P(2) \leq P(4)$
C・2・2		H・4	$P(1) \leq P(2) \leq P(3), P(1) \leq P(2) \leq P(6), P(3) \leq P(2) \leq P(6)$
C・2・3			
C・2・4			

る最小層数は決定できない。

2・2 動節上の対偶を複数の層に分けた場合の最小層数 2・1 節で示した平面 6 節機構に対する最小層数の決定方法は動節上の対偶を各節について一平面内に配置していたために、節間の干渉を避けることができない機構が存在し、しかも式(1)に示す制約条件に矛盾が生じ、その結果、最小層数を決定することができない機構が存在した。そこで、2・1 節で示した最小層数の決定できない機構に対して動節上の対偶を複数の層に分けて配置し、最小層数を求める。すなわち、動節上の対偶を複数の層に分けることにより、干渉を避けられなかった節の一部分を他の層に移し、最小層数を決定する。

表 3 動節間干渉を考慮した平面 6 節機構の最小層数

Type	Min.No. of Layers	Type	Min.No. of Layers	Type	Min.No. of Layers
A・1	—	C・1・1	5	E・1・1	3
A・2・1	—	C・1・2		E・1・2	—
A・2・2	—	C・1・3		E・2・1	6
A・3・1	3	C・1・4		E・2・2	—
A・3・2		C・2・1	3	F・1	5
A・3・3		C・2・2		F・2	3
A・3・4		C・2・3		G・1	5
A・3・5		C・2・4		G・2	—
B・1	—	D・1	5	G・3	—
B・2	—	D・2・1	—	H・1	5
B・3・1	3	D・2・2		H・2	—
B・3・2		D・2・3		H・3	—
B・3・3		D・2・4		H・4	—
		D・2・5

Layer Arrangement					
P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)
1	2	3	2	3	3

(b)

図 4 A・3・1 形機構の節形状および層配置

いま、図 7 に示す制約条件に矛盾を生じる四つの節 L_i, L_j, L_k および L_l について、節 L_j を図 8 に示すように角 α を一定に保って運動する二つの節 L_i および L_{N+1} に分け、式(1)に示される制約条件を図 7 に対応させれば、次の制約条件を得る。

$$\left. \begin{aligned} P(i) &\leq P(j) \leq P(k) \\ P(i) &\leq P(j) \leq P(l) \\ P(l) &\leq P(j) \leq P(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

(複号同順)

さらに式(5)を図 8 に対応させれば

$$\left. \begin{aligned} P(i) &\leq P(j) \leq P(l) \\ P(j) &\leq P(i) \leq P(N+1) \\ P(i) &\leq P(N+1) \leq P(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(複号同順)

となる。式(6)に示す制約条件は常に成立するのでこれより任意の動節を複数の層に分けた場合の最小層数を決定することができる。このとき、上式に対するインシデンスマトリックス M' は

図 5 B・2 形機構

図 6 B・2 形機構の節 L_5 に対する同層の節の相対軌跡

$$M' = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

となる。ただし式(7)のマトリックスは $(N+1) \times (N+1)$ の成分を持ち、左からおよび上から順に節 L_i , L_j , L_k , L_l および L_{N+1} に対応している。

式(6)の適用例として、B・2形機構を取り上げ 3 対偶素節 L_4 を図 9 に示すように二つの 2 対偶素節 L_4 および L_7 に分ける。

図 9 より制約条件を求めれば

$$\left. \begin{array}{l} P(2) \leq P(1) \leq P(4) \\ P(4) \leq P(1) \leq P(7) \\ P(1) \leq P(7) \leq P(5) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(複号同順)

となる。このとき、この機構のインシデンスマトリックス M_B は

図 7 複数の対偶を有する動節

図 8 図 7 の節 L_j を節 L_j および L_{N+1} に分けた場合

$$M_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

として表すことができる。

ここで、式(8)および式(9)を用いて各節の形状および層配置を求めれば図 10(a)および(b)のようになり、2・1節で示した動節間の干渉を避けられなかった節 L_5 について同層の節は存在せず、節 L_5 は他の節と干渉していないことがわかる。この結果、この機構の最小層数は 7 となる。

つぎに、H・3形機構について上記と同様な総合を行う。いま、図 11 に示すように 3 対偶素節 L_2 を 2 対偶

図 9 B・2形機構と等価な平面 7 節機構

(a)

Layer Arrangement								
P(1)			P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	P(7)
$J_{1,2}$	$J_{1,4}$	$J_{1,6}$						
1	5	5	2	3	4	7	6	6

(b)

図 10 B・2形機構の節形状および層配置

素節 L_2 および L_7 の二つに分ける。このとき、制約条件は

$$\left. \begin{array}{l} P(1) \leq P(2) \leq P(4) \\ P(2) \leq P(1) \leq P(7) \\ P(1) \leq P(7) \leq P(3) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(複号同順)

となり、式(10)は常に成立する。したがって、前述と同様にしてインシデンスマトリックス M_H を求めれば

$$M_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

となる。

図 11 H·3 形機構

図 12 H·3 形機構の節 L_2 に対する同層の節の相対軌跡

ここに、節 L_2 および L_7 に対する同層の節の相対軌跡は図 12 および図 13 となり、節間の干渉は生じないことがわかる。他の節についても同様にして節形状および層配置を求めれば、図 14(a) および (b) のようになり、このとき最小層数は 5 となる。以上に示したように、節形状の変更のみでは動節間の干渉が避けられず、そのために機構の最小層数を決定することができなかった機構について、任意の動節上の対偶を複数の層に分けて配置することにより機構の運動中における動節間の干渉を回避することができ、節形状ならびに最小層数の決定が可能となる。

図 13 H·3 形機構の節 L_7 に対する同層の節の相対軌跡

Layer Arrangement						
P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	P(7)
3	2	5	1	2	4	4

(b)

図 14 H·3 形機構の節形状および層配置

表 4 動節上の対偶を複数の層上に分けて配置する場合の平面 6 節機構の最小層数

Type	Min.No. of Layers	Type	Min.No. of Layers	Type	Min.No. of Layers
A・2・1	6	D・2・1	6	G・2	5
A・2・2	6	D・2・2		G・3	5
B・1	9	D・2・3		H・3	5
B・2	7	D・2・4			
		D・2・5			

表 4 は表 3 に示す機構のうち最小層数が決定できないものについて、最小層数を求めた結果である。

3. 平面 6 節機構の最小層数による分類

2 章において任意の動節上の対偶を複数の層に分けて配置することにより機構の運動中における動節間の干渉を回避し、平面 6 節機構に対する節形状ならびに最小層数の決定が可能となることを示した。これにより平面 6 節機構の分類が可能となり、次の 6 種類に分類することができる。すなわち、これを I, II, ..., VI の番号で区別し、表 5 に示す。なお、分類番号 VI の機構は文献(2)で論じたように特殊な場合を除いて機構を構成できない。

4. 結 論

本研究で得られた主な結果は次のとおりである。

(1) 平面 6 節機構の層配置を行うために機構の対偶が低次のまわり対偶のみで構成され、しかも原動節が $2\pi\text{rad}$ 以上回転する機構を取り上げて、これらの機構の形式を分類し、各対偶の回転または揺動運動に対する従動節の変位線図の幾何学的特性を明らかにした。

表 5 平面 6 節機構の最小層数およびその形式

Classification	Min.No. of Layers	Type of Mechanisms
I	3	A・3・1, A・3・2, A・3・3, A・3・4, A・3・5, B・3・1, B・3・2, B・3・3, C・2・1, C・2・2, C・2・3, C・2・4, E・1・1, F・2
II	5	C・1・1, C・1・2, C・1・3, C・1・4, D・1, F・1, G・1, G・2, G・3, H・1, H・3
III	6	A・2・1, A・2・2, D・2・1, D・2・2, D・2・3, D・2・4, D・2・5, E・2・1
IV	7	B・2
V	9	B・1
VI	—	A・1, E・1・2, E・2・2, H・2, H・4

(2) 文献(1)では機構の動節上の対偶を各節についてすべて一平面内に配置しているために動節間の干渉が生じ、そのために最小層数の決定できない機構が存在していたが、任意の動節上の対偶を複数の層に分けて配置することにより動節間の干渉を回避し、これによって節形状ならびに最小層数の決定を可能にした。

(3) 前項(2)によって得られた最小層数を用いて、平面 6 節機構に対する分類を行い、6 節機構を総合する場合の各節の運動平面の決定を容易にした。

文 献

- (1) 舟橋・小川, 機論, 49-442, C (昭 58), 1085.
- (2) 小川・ほか 2 名, 機論, 27-184 (昭 36), 1938.
- (3) 小川, 機論, 30-217 (昭 39), 1053.
- (4) 舟橋・ほか 2 名, 機論, 42-359 (昭 51), 2157.