Duffing 形非線形系の共振点通過応答*

佐 藤 秀 紀**

Response during Acceleration through Resonance of Duffing Type Non-linear Systems

Hidenori SATO

Response during a uniform acceleration through resonance of the non-linear systems with a hardening spring is analyzed by using the asymptotic method. The equations to estimate the characteristic points in the response, which are the maximum amplitude point and the frequency jumping point, are derived by the analysis. The more simple approximate formula is obtained to estimate the maximum amplitude value. The estimated value showed good agreement with that obtained by a numerical integration under a certain condition.

Key Words: Vibration, Non-stationary Vibration, Non-linear Vibration, Duffing systems, Acceleration, Resonance

1. 緒 言

外力の振動数が時間とともに変化する場合の共振点通過応答について、系が非線形系の場合、解析的取扱いが困難となることもあって、微分方程式を直接数値積分して応答を求める場合がほとんどである^{(1)~(4)}。数値積分を行って解を求める場合は、一般的な特性をもつ系を取扱い得るという利点はあるが、数値誤差などの問題や解を個々に時間をかけて求めなければならないなどの欠点もある。

本研究では、これらのことを考え、系の過渡応答特性を漸近解に基づいて数式的に解析し、その応答過程の特性を解明するとともに、最大振幅点などの応答特性値を推定する推定式を導き、その妥当性を検討する。解析の対象とする系として、対称形連続曲線の非線形復原力特性をもつ、いわゆる Duffing 形非線形系を考える。なお、外力は定振幅、定角加速度で加速される場合のみを扱う。系がハードスプリング形であることから、最大振幅は加速時に起こると考えられる。

2. 漸近法による解

以下のような Duffing 形非線形系を考える。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \beta x^3) &= F_0 \cos \phi \\ \phi &= \alpha t^2/2 + \omega_s t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

式(1)を次式のように整理する。

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + \beta x^3 = F \cos \phi \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\cdot$ は $\tau = \omega_n t$ による微分を意味し、

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{k/m}, \quad F = F_0/k, \quad \zeta = c/2\sqrt{mk} \\ \phi &= \bar{\alpha}\tau^2/2 + \bar{\omega}_s\tau \\ \bar{\alpha} &= \alpha/\omega_n^2, \quad \bar{\omega}_s = \omega_s/\omega_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式(2)に対して次式のような漸近解を仮定する。

$$x = a \cos \varphi, \quad \varphi = \phi + \theta \dots\dots\dots (4)$$

漸近法を適用し、定常解との連続性を考慮し、 a, θ に関する微分方程式として次式を用いる⁽⁴⁾。

$$\dot{a} = -\zeta a - \frac{F}{2\omega} \sin \theta \dots\dots\dots (5)$$

$$\dot{\theta} = \omega_N - \omega - \frac{F}{a(\omega_N + \omega)} \cos \theta \dots\dots\dots (6)$$

ここに

$$\omega = \dot{\phi} = \bar{\alpha}\tau + \bar{\omega}_s \dots\dots\dots (7)$$

$$\omega_N = \sqrt{1 + (3/4)\beta a^2} \dots\dots\dots (8)$$

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月4日。

** 正員、金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。

ω は外力の無次元瞬間振動数であり、 ω_N は振幅 a のときの系の固有振動数である。式(5), (6)において $\dot{a}=0, \dot{\theta}=0$ において定常解を求めると

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{F}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \\ \tan \theta &= -2\xi/(\omega_N^2 - \omega^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$\omega_N=1$ とおくと線形解に一致する。

図1に式(5), (6)をRKG法(Runge-Kutta-Gill法)を用いて数値積分により得た結果と原式(2)を同じく数値積分した結果を示した。後者の場合は時間応答から振幅 a , 振動数 ϕ を求めたものであるため、 ϕ の値にノイズ状の乱れが入っている。

これらの結果からみると、応答振動数の急変部などでは多少の差異がみられるが、漸近解は式(2)の解をよく近似しているといえよう。

図1より、応答は以下の3段階に分けられる。

第1段階：振幅、振動数ともに応答はほぼ定常解の応答曲線上にある。

第2段階：応答振幅が最大値に達した後、ほぼ自由減衰振動を行って振幅は減少し、振動数は線形固有振動数に近づく。

第3段階：振幅が減衰し、ある程度小さくなると、応答振動数が線形固有振動数から突然、外力の加振振動数付近に飛び降り、徐々に定常応答に近づく。

(a) 漸近解のRKG法による解

(b) 式(2)のRKG法による解

図1 解の比較 ($\beta=1, \xi=0.005, F=0.02, \bar{a}=0.0005$)

3. 最大振幅点・振動数飛び移り点の推定

3.1 最大振幅点の推定 共振点通過応答では、その最大振幅値の推定が工学上重要な問題となる。以下では漸近解に基づき加速時における最大振幅点の推定について述べる。

図1でみたように、過渡応答解ではあるが第1段階では定常応答に近い応答を示すことを考慮して、図2に示すように最大振幅点を過渡応答曲線と自由振動の背骨曲線との交点P付近の値と考える。 $\bar{a}=0$ の定常応答ではこの点は P_0 となる。

式(9)から、背骨曲線では

$$\omega = \omega_N, \quad \theta = -\pi/2 \dots\dots\dots (10)$$

式(10)の関係を式(5), (6)に考慮すると

$$\dot{a} = -\xi a + F/2\omega, \quad \dot{\theta} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

式(7)より

$$d\omega = \bar{a} d\tau \dots\dots\dots (12)$$

また、式(8)より、背骨曲線上では

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{4}{3\beta} \left(\frac{\omega}{a} \right) \dots\dots\dots (13)$$

背骨曲線と応答曲線との接近を考え、式(12), (13)の関係から式(11)の左辺を置き換えると次式を得る。

$$\frac{4}{3\beta} \left(\frac{\bar{a}}{\xi} \right) \omega^2 + a^2 \omega - \frac{a}{2} \left(\frac{F}{\xi} \right) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

式(8), (10)を考慮すると式(14)は次式となる。

$$\sqrt{1 + \frac{3}{4}\beta a^2} - \frac{1}{2a} \left(\frac{F}{\xi} \right) + \left(1 + \frac{4}{3\beta} \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{\bar{a}}{\xi} \right) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

式(15)を満足する解 $a=a_{cr}$ を求めれば、それは最大振幅値の近似値を与えるものと考えられる。 a_{cr} を式(8)に代入して $\omega_N=\omega_{cr}$ を求めれば、そのときの加振振動数の近似値を与える。なお、式(15)は解が求まる範囲が図3のように存在する。

式(15)は a について簡単には解くことができず数値計算を必要とするので、その近似解を求めることを考える。近似解を以下のようにおく。

$$a'_{cr} = a_0 + c_1 \bar{a}, \quad \omega'_{cr} = \omega_0 + c_2 \bar{a} \dots\dots\dots (16)$$

図2 最大振幅点・振動数飛び移り点の求め方

ここに, a_0, ω_0 は $\bar{\alpha}=0$ のときの解, すなわち, 図 2 の P_0 点の値であって, 式(15), (8)より $\bar{\alpha}=0$ として求まる. 式(16)を式(15)に代入し, $\bar{\alpha}^2$ の項を無視して計算すると c_1, c_2 が求まり, 以下の近似式を得る.

$$a'_{cr} = a_0 - \frac{1}{\sqrt{3}\beta} \left(\frac{\bar{\alpha}}{\zeta} \right), \quad \omega'_{cr} = \omega_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\alpha}}{\zeta} \right) \dots (17)$$

式(15)あるいは(17)より推定される最大振幅点の値は F/ζ および $\bar{\alpha}/\zeta$ のパラメータに依存することがわかる. また, 最大振幅値は $\bar{\alpha}=0$ のときの値 a_0 より $\bar{\alpha}/\zeta$ の最大とともに減少することが予想される.

3.2 振動数飛び移り点の推定 最大振幅点に達した後, 解は定常応答曲線からはずれ減衰振動を始め

図 3 式(15)の解の存在範囲 ($\beta=1$)

図 4 定常解の最大振幅点の値 ($\beta=1$)

(a) $a_{cr} - \bar{\alpha}$

る. ω が ω_N から離れ始めると (a の増加が止まるため), 式(6)において第 3 項が微小であるから θ は ω の変動に比して急速に負の大きい値となる. その結果, 式(5)の第 2 項の a の変化への寄与は小さくなるので無視し, 式(12)の関係を考慮すると, 式(5)の解はほぼ次式に従うであろう.

$$\frac{da}{d\omega} = - \left(\frac{\zeta}{\bar{\alpha}} \right) a \dots (18)$$

式(18)の解は, $\omega = \omega_{cr}$ で $a = a_{cr}$ とおけるから,

$$a = a_{cr} \exp \left[- \left(\frac{\zeta}{\bar{\alpha}} \right) (\omega - \omega_{cr}) \right] \dots (19)$$

また, 式(6)より応答振動数は

$$\dot{\phi} = \omega + \dot{\theta} \approx \omega_N \dots (20)$$

式(19), (20)より, 応答は背骨曲線上を自由減衰振動しながら振動数は線形固有振動数に近づくことがわかる. しかし, a が微小となると式(6)の第 3 項の振幅が大きくなり, ϕ は線形固有振動数を中心として振動しながら発散していく.

ところで, 図 2 に示したように, 過渡応答解の振幅が定常応答解の振幅に一致する点 Q 付近で解は再び定常解の応答曲線に移行するものと考えられる. すなわち, 応答振動数は線形固有振動数から離れて加振振動数に飛び移ることになる. なお, Q 点では振幅が小さく, かつ ω が 1 から離れていることを考慮して, 簡単のため線形不減衰系の定常応答解を用いることにすると, 式(19)より, 交点の振動数 ω_j を与える式は

$$a_{cr} \exp \left[- \left(\frac{\zeta}{\bar{\alpha}} \right) (\omega - \omega_{cr}) \right] = \frac{F}{\omega^2 - 1} \dots (21)$$

によって与えられることになる.

3.3 数値計算結果 以上の考察・解析に基づいて推定した結果を図 5, 6 に示す. 図 5 は ζ および $\bar{\alpha}$ による影響を示したものであるが, $\bar{\alpha}$ が大となるにつれて a_{cr}, ω_{cr} はほぼ直線的に減少することがわかる.

(b) $\omega_{cr}, \omega_j - \bar{\alpha}$

図 5 $a_{cr}, \omega_{cr}, \omega_j$ と $\bar{\alpha}$ の関係 ($\beta=1$)

図 6 a_{cr} , ω_{cr} , ω_J と $\bar{\alpha}/\zeta$ の関係 ($\beta=1$)

また, ω_J は $\bar{\alpha}$ とともに逆に増大している。推定結果は直接積分解の結果とよく一致しており, 良好な推定がなされている。簡便な近似式による結果は ζ および α が大のところややばずれているがよい近似となっていることがわかる。図 6 は F/ζ をパラメータとして $\bar{\alpha}/\zeta$ による応答特性値の変化を図 3 の解の範囲で変数値を広くとって示したものである。これらの結果をみると $\bar{\alpha}/\zeta$ が大のところ, また, $\bar{\alpha}/\zeta$ が同じなら ζ が大のほうでやや推定値の精度が悪くなっている。しかし, 概略は直接積分解の結果を推定し得ているといえよう。推定精度が悪くなる条件では, 応答振幅のピークが平坦になり推定式の条件からはずれするため, いずれも推定値よりも大きいほうにずれている。なお, 簡便な近似式のほうがこれらの条件においても, よりよい推定値を与えることは興味深い。

4. 結 言

本研究を要約すると

(1) ハードスプリング形の非線形系に正の角加速度をもつ外力が作用する場合の共振点通過応答を漸近解に基づいて解析し, その応答特性を明らかにした。

(2) 漸近解に基づいて最大振幅点および振動数飛移り点を推定する式を導いた。なお, 最大振幅点の推定式としては, さらに簡便な近似式を導いた。

(3) 推定式に基づく推定値は数値積分による値とある範囲内でよく一致することを示した。

文 献

- (1) Еоголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А. (益子訳), 非線形振動論, (昭 36), 265, 共立出版。
- (2) 井上・柴田・藤川・武村, 同期モータ駆動回転軸系の非線形ねじり振動応答, 機論, 47-415, C (昭 56), 263.
- (3) Wolff, F. H. and Molnar, A. J., Nonlinear coupling responses to variable frequency excitations, *Shock Vib. Bull.*, (1983), 127.
- (4) 矢鍋・徳橋・田村, ガタ系の共振点通過時の振動, 機論, 51-466, C (昭 60), 1189.