交番電磁力が作用する長方形平板の強制振動の有限要素解析*

小島 宏行**, 根津 紀久雄**
市川 良雄***, 田中 伸和****Finite Element Analysis of Forced Vibrations of a Rectangular Plate
Subjected to Electromagnetic ForceHiroyuki KOJIMA, Kikuo NEZU,
Yoshio ICHIKAWA, and Nobukazu TANAKA

In this report, the forced vibrations of a rectangular plate subjected to electromagnetic force by an electromagnet are investigated theoretically by the finite element method, and the numerical results are compared with the experimental ones. The rectangular plate is fixed along one edge and free along the other three, and twelve rectangular elements are used in the finite element analysis. The electromagnetic force character is supposed to be uniformly proportional to the square of the exciting current of the electromagnet in each rectangular element according to the measured data about the magnetic flux density. The numerical results agree well with the experimental ones except for nonlinear vibration behaviors. Then, it is observed experimentally that the second order superharmonic and the one-second order subharmonic vibrations due to the nonlinearity of the electromagnetic force.

Key Words: Electromagnetic Force, Rectangular Plate, Forced Vibrations, Finite Element Analysis, Magnetic Flux Density, Superharmonic Vibration, Subharmonic Vibration

1. 緒 言

近年、核融合炉や磁気浮上車などの開発に伴い、電磁力が作用する機械構造物の動特性の解明が求められており、これについて多くの研究がなされている^{(1)~(8)}。また、粉体輸送、フィーダ、ふるいなどに各種の電磁バイブレータが利用されており⁽²⁾、弾性体構造物の固有振動数の測定に際しても電磁力が、しばしば用いられている。一方、機械構造物においては板が広く用いられているが、交番電磁力が作用する板の強制振動応答を、理論的にかつ実験的に詳細に解明した研究は、著者らの知るかぎり見当たらないようである。

本報は、交番電磁力が作用する長方形平板の強制振動応答を、有限要素法^{(9),(10)}を用いて解析的に調べるとともに、実験を行い理論解析の妥当性を検証したものである。板は、一端が固定されており、交番電流で励磁された電磁石による交番電磁力が板の面外方向に作用している。解析においては、磁束密度の実測値と電磁

力の応力テンソル⁽¹⁾を用いて長方形平板に作用する電磁力の定式化を行うとともに、板の運動方程式を有限要素法を用いて求め、強制振動応答を導いている。さらに、数値計算結果を実験結果と比較照合し、有限要素法による解析の妥当性を吟味している。

2. 電磁吸引力特性

図1は、交番電磁力が作用する長方形平板の実験装置の概略図を示したものである。板の一端は固定されており、発振器により生成された交番電圧が、電力増幅器を介して電磁石に印加されている。また励磁電流

図1 実験装置概略図

* 昭和61年10月25日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年4月1日。

** 群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

*** 東京三洋電機(株) (〒370-05 群馬県邑楽郡大泉町板田180)。

**** 関東自動車工業(株) (〒237 横須賀市田浦港町)。

は、抵抗 R の両端の電圧を測定することにより検出されており、板の面外変位は、光学式変位センサを用いて実測されている。

本報では、図1中の長方形平板を図2のような長方形要素に分割して、動特性の解析を行っている。磁石の寸法に対して長方形要素の大きさが比較的小さいので、各要素内において磁束密度を近似的に一定と見なすことにする。したがって、板に作用する電磁力は、以下の手順で定式化できることとなる。

磁石と板の間のギャップ ($G=20\text{ mm}$) に対して板の振動振幅 ($0\sim 1.5\text{ mm}$) がかなり小さいことから、ギャップの磁束密度に及ぼす影響は、無視し得る程度であるものと見なせる。したがって磁束密度は、電磁気学により電流に比例するものとして表すことができる。ここで、図3のように板の両表面の磁束密度を B_{ei} , B_{eo} と置く。ただし e は、要素番号を示している。表1は、ガウスメータによる磁束密度の実測結果を示したもので、 i_0 は励磁電流を表している。磁石側の磁束密度は、相対的に大きな値となっている。また磁束密度は、近似的に電流に比例していることから、次式のように表すことができる。

$$B_{ei} = C_{ei} \cdot i_0, \quad B_{eo} = C_{eo} \cdot i_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 C_{ei} , C_{eo} は磁束密度の係数、 i_0 は励磁電流である。後述の実験で用いた平板は、みがき鋼板であるが、この材料は強磁性物質であり、真空中の数百年ないし数千倍の透磁率を有する。また板が薄板であることから、板に作用する電磁力 q は、電磁力の応力テンソ

ルを適用すると、次のように書くことができる⁽¹⁾。

$$q = \frac{[(B \cdot n)^2]}{2\mu_0} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに B は磁束密度、 n は板の表面の外向き法線、 μ_0 は真空中の透磁率、 $[f] = f(\text{in}) - f(\text{out})$ である。振動数と振幅を ω , I として、励磁電流 i_0 を

$$i_0 = I \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (3)$$

のように表す。 t は時間である。式(1), (3)を式(2)に代入することにより、各要素内の単位面積当たりの電磁力 q_e は、次式のように表すことができる。

$$q_e = \frac{1}{2} C_e I^2 (1 + \cos 2\omega t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに

$$C_e = \frac{1}{2\mu_0} (C_{ei}^2 - C_{eo}^2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

表1 各要素における磁束密度の実測値

e	0.3		0.4	
	B_{ei}	B_{eo}	B_{ei}	B_{eo}
	$\times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$		$\times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$	
1	106.0	25.0	134.0	39.5
2	126.0	26.0	156.0	38.0
3	104.0	28.0	128.0	41.5
4	132.0	21.5	177.0	34.5
5	138.0	23.0	183.0	35.5
6	130.0	23.0	172.0	36.0
7	86.0	19.5	94.0	32.5
8	110.0	19.0	142.0	32.5
9	88.0	18.5	104.0	32.5
10	17.0	9.5	14.5	12.5
11	22.0	9.0	21.5	11.5
12	18.0	10.0	16.2	13.0

図2 長方形平板の有限要素分割図

図3 磁束密度の測定

表2は、各要素における電磁力係数 C_e を示したものであり、表中の C_{ei} , C_{eo} の値は、励磁電流が 0.3 A と 0.4 A のときのものを平均して求めたものである。

3. 強制振動の有限要素解析

図2に示された長方形の曲げ板要素 e の運動方程式は、有限要素法^{(9),(10)}を適用し、式(4)の電磁力を考慮すると、次式のように書くことができる。

$$[M]_e \{\ddot{\delta}\}_e + [K]_e \{\delta\}_e = 2C_e I^2 ab \{F\}_e \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに

$$\{\delta\}_e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\{F\}_e = \left[\frac{1}{4}, -\frac{b}{12}, \frac{a}{12}, \frac{1}{4}, \frac{b}{12}, \frac{a}{12}, \frac{1}{4}, -\frac{b}{12}, -\frac{a}{12}, \frac{1}{4}, \frac{b}{12}, -\frac{a}{12} \right]^T \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

であり、 $[M]_e$ は要素質量マトリックス、 $\{\delta\}_e$ は要素節点変位ベクトル、 $[K]_e$ は要素剛性マトリックス、 $\{F\}_e$ は要素節点力ベクトル、 w は板のたわみ、 θ_x , θ_y は回転角、 $2a$, $2b$ は長方形要素の寸法を表している。なお $[M]_e$ と $[K]_e$ については、Zeinkiewicz らによって報告されているものを用いた⁽¹⁰⁾。式(6)の要素の運動方程式を重ね合わせると、系全体のマトリックス運動方程式は、次のように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$$\{x_1\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \vdots \\ \delta_{16} \end{Bmatrix}, \quad \{x_2\} = \begin{Bmatrix} \delta_{17} \\ \vdots \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

であり、 $\{x_1\}$ は自由節点変位、 $\{x_2\}$ は固定節点変位を表している。また長方形平板の境界条件は、次式で与えられる。

$$\{x_2\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(10)に代入すると、系の運動方程式は、次式のようになる。

$$[M_{11}]\{\ddot{x}_1\} + [K_{11}]\{x_1\} = \{F_1\} \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (13)$$

上式の強制振動解を

$$\{x_1\} = \{\bar{x}_1\} \cos 2\omega t \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \end{array} \right\} \cos 2\omega t \quad \dots\dots\dots (14)$$

と置けば、系の振動振幅は、次の連立方程式の解として得られる。

$$[K_{11} - \omega^2 M_{11}]\{\bar{x}_1\} = \{F_1\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

4. 実験結果と数値計算結果

本実験で用いた実験装置は、図1に示されているとおりで、その諸元は以下のとおりである。

$$E = 184 \text{ GPa}, \quad \rho = 7.81 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 0.3,$$

$$t = 0.59 \text{ mm}, \quad L_x = 120 \text{ mm}, \quad L_y = 60 \text{ mm},$$

$$a = 15 \text{ mm}, \quad b = 10 \text{ mm}, \quad G = 20 \text{ mm}, \quad R = 5\Omega$$

ここに、 E は縦弾性係数、 ρ は板材料の密度、 ν はポアソン比、 t は厚み、 L_x , L_y は長方形平板の寸法、 a , b は板要素の寸法、 G はギャップ、 R は励磁電流の測定用抵抗である。また電磁石は、直径 40 mm の軟鋼に直径 0.6 mm の銅線を 1 129 回巻いたものである。一方、3章における有限要素解析に従って、FORTRAN 言語を用いて有限要素法プログラムを作成した。なお、連立方程式の計算においては、Gauss の消去法を用いた。

図4は、節点5, 10における板のたわみの強制振動応答に関する実験結果と数値計算結果を比較したものである。横軸には、励磁電流の振動数の2倍の値、すなわち交番電磁力の振動数 $f (= 2\omega/2\pi)$ がとられている。両図とも $f = 31 \text{ Hz}$ 付近で主共振が顕著に生じており、節点5すなわち板の周辺の場合のほうが、主共振領域がより大きくなっている。この主共振は、一端固定の長方形平板の第一次固有振動数における第一次

表2 各要素における電磁力係数

e	C_{ei}	C_{eo}	C_e
	$\times 10^{-4} \text{ Wb/(m}^2 \text{A)}$		Pa/A^2
1	344.2	91.1	438.4
2	405.0	90.9	619.8
3	333.4	98.6	403.6
4	441.3	79.0	750.0
5	458.8	82.8	810.3
6	431.5	83.4	713.2
7	260.9	73.2	249.5
8	360.9	72.3	497.4
9	276.7	71.5	284.3
10	46.5	31.5	4.7
11	63.6	29.4	12.7
12	50.3	32.9	5.8

図 4 強制振動応答

図 5 節点 5 における振動波形の実測値

共振であることが、振動モードについての数値計算結果と実験結果から確認された。また、解析において考慮しなかった二次超調波ならびに二分の一次分数調波振動が、 $f=16\text{ Hz}$ および $f=64\text{ Hz}$ 近傍で生起している。このことは、電磁力の非線形性に起因しているものと考えられる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。しかしながら、超調波ならびに分数調波共振以外の振動数領域においては、実験結果と数値計算結果は良く一致しており、本報における電磁力の定式化ならびに強制振動の有限要素解析の妥当性が立証されたものと言えよう。図 5 は、オシロスコープを用いて記録したものであり、それぞれの図において、上側の波形が励磁電流、下側の波形が板のたわみ振動変位を示している。なお、電磁力の振動数が励磁電流の 2 倍であることを考慮すると、 $f=16.2, 31.0, 64.0\text{ Hz}$ における波形が、それぞれ二次超調波振動、第一次共振、二分の一次分数調波振動であることが、容易に理解されよう。

5. 結 言

本報は、交番電磁力が作用する一端固定の長方形平板の強制振動応答を、有限要素法を用いて解析的に調

べるとともに、実験結果を数値計算結果と比較照合したものである。得られた結果を要約すると、

- (1) 各板要素の両表面における磁束密度の実測値に電磁力の応力テンソルを適用するとともに、各要素内において磁束密度を近似的に一定であるものと見なすことにより、板に作用する電磁力の定式化を行った。また、この定式化された電磁力が作用する板の強制振動解を、有限要素法を用いて導いた。
- (2) 実験においては、一端固定の長方形平板の第一次共振のほか、二次超調波ならびに二分の一次分数調波の非線形共振が、第一次主共振の前後の振動数領域において実測された。
- (3) 非線形共振以外の振動数領域においては、実験結果と数値計算結果は良く一致し、電磁力の定式化ならびに強制振動の有限要素解析の妥当性が立証された。

文 献

- (1) Moon, F. C., *Magneto-Solid Mechanics*, (1984), 86, Wiley-Interscience Publication.
- (2) 谷口・ほか 2 名, 機論, 25-155 (昭 34), 681.
- (3) Kana, D. D., *Trans. ASME, Ser. B*, 89-4 (1967), 839.

- (4) Dao, N. V., *Proc. Vib. Prob.*, 14-1 (1973), 85.
  - (5) Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.*, 65-2 (1979), 295.
  - (6) Moon, F. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1980), 638.
  - (7) 小島・ほか3名, 機論, 50-455, C (昭59), 1168.
  - (8) 小島・ほか2名, 機論, 52-476 C (昭61), 1198.
  - (9) Zeinkiewicz, O. C. (吉織・山田監訳), 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, (昭50), 171, 培風館.
  - (10) Zeinkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 28 (1964), 471.
-