非線形往復振動系における1/2次分数調波・和差調波振動* (四乗の非線形項による共振曲線の変化と不安定振動の発生)

石田 幸男**, 池田 隆**

The 1/2-Subharmonic and Summed-and-Differential Harmonic Oscillations in a Nonlinear Rectilinear Vibratory System (The Variations of Resonance Curves and the Occurrence of Unstable Vibration due to Quartic Nonlinear Terms)

Yukio ISHIDA and Takashi IKEDA

This paper deals theoretically with a subharmonic oscillation of order 1/2 and some sort of summed-and-differential harmonic oscillations in a rectilinear vibratory system with nonlinear spring characteristics, which are expressed by the terms of the second, third and fourth powers of coordinates. Especially, the effects of quartic terms on these oscillations caused by the nonlinear terms up to the third power of coordinates are investigated. It is clarified that quartic terms have qualitatively different effects from those of quadratic terms, and that unstable vibrations occur due to quartic terms. These kinds of unstable vibrations have been observed experimentally in a rotating shaft system by the authors of this paper.

Key Words: Theory of Vibration, Subharmonic Oscillation, Summed-and-Differential Harmonic Oscillation, Quartic Nonlinear Term, Resonance Curve, Unstable Vibration

1. ま え が き

非線形ばね特性をもつ往復振動系(固有振動数 p_i ; $i=1\sim n$, 外力の振動数 ω)では各種の非線形強制振動が発生するが, そのうち非対称非線形ばね特性, 特に座標の二乗項に起因する振動には, $2p_i=\omega$ となる共振点付近で発生する1/2次分数調波振動と, $p_i+p_j=\omega$ ($i\neq j$)となる付近で発生する和差調波振動がある。前者については, Reuter⁽¹⁾以来, Hayashi⁽²⁾, McLachlan⁽³⁾, 山本ら⁽⁴⁾の理論的研究, また後者については, Tondl⁽⁵⁾による一般的な準線形系の解析, 山本ら⁽⁴⁾⁽⁶⁾による理論的, 実験的研究があるが, いずれも二乗と三乗の非線形項が存在する系を取扱っている。一般に非線形復元力を級数展開した場合, 四乗以上の高次項も存在するが, これらの振動に及ぼす四乗項の影響についてこれまでに検討された報告はないようである。

四乗の非線形項に起因する振動については, 往復振動系では, 山本ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾による四乗項に起因してはじめて発生する3/2次と2/3次の超分数調波振動と超和差調波振動に関する理論的研究がある。一般に, 実機に

おいては, 非線形復元力には二乗項と三乗項が比較的大きく含まれ, それ以上の高次項は実質上無視できる場合が多いのであるが, 著者ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾は複列アングュラ玉軸受で支持された回転軸系には四乗項が顕著に現れ, これらの種類の非線形振動が発生しやすいことを実験的に明らかにし, その特性を理論的にも解明した。

四乗の非線形項の存在により, どのような振動が新たに発生するかということのほか, 二乗と三乗の項の存在する系に発生する振動にどのような定性的な変化を及ぼすかということも問題である。著者らは, 上述の回転軸系⁽¹⁰⁾において二乗項に起因する1/2次分数調波振動と和差調波振動に, 四乗項のため不安定領域が現れることについて報告した⁽¹¹⁾。ジャイロ作用のためふれまわり運動をする回転軸系は往復振動系とは力学的に異なる特性をもつので, 両者に発生する振動の特性も異なってくると予想される。そこで本論文では, より基本的な系である往復振動系を扱い, 二乗項に起因して発生する1/2次分数調波振動と和差調波振動に四乗項がどのような影響を及ぼすかについて解析を行う。その結果, 同じ非対称性の非線形項ではあるが二乗項と四乗項では各振動に与える影響に特徴的な差異があることが明らかにされ, また運動方程式から

* 昭和60年3月20日 関西支部第60期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年4月1日。

** 正員, 名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

は自励系とも係数励振系ともみなすことのできない場合でも、四乗の非線形項により不安定振動が発生することが理論的に結論された。

2. 1/2 次分数調波振動

一自由度のばね・質量系を考える。質量 m の物体の平衡位置からの変位を x 、ばね定数を k 、非線形項を φ 、減衰係数を c 、角振動数 ω の強制力の振幅を F 、時間を t とすれば、運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \varphi = F \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。非線形項としては座標の四乗項までを考え、二乗、三乗、および四乗項の係数をそれぞれ ε, β, μ とすれば、 φ は

$$\varphi = \varepsilon x^2 + \beta x^3 + \mu x^4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで代表長さ $x_0 = mg/k$ (g : 重力加速度) を導入し、次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} X &= x/x_0, \quad c' = c/\sqrt{mk} \\ \varepsilon' &= \varepsilon x_0/k, \quad \beta' = \beta x_0^3/k \\ \mu' &= \mu x_0^4/k, \quad \omega' = \omega/\sqrt{k/m} \\ t' &= t\sqrt{k/m}, \quad F' = F/(kx_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

を用いれば式(1)から次式を得る。ただし、記号の肩の'は省略してある。

$$\ddot{X} + c'\dot{X} + X + \varepsilon X^2 + \beta X^3 + \mu X^4 = F' \cos \omega' t \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(4)の $c, \varepsilon, \beta, \mu$ は微小量と同程度〔以下、 $O(\xi)$ と略記〕の大きさとする。いま式(4)の $\omega \approx 2$ 付近における近似解を

$$X = R \cos \left(\frac{1}{2} \omega' t + \delta \right) + P \cos (\omega' t + \alpha) \quad \dots\dots (5)$$

とおく。ここに振幅 R 、位相差 δ は時間的にゆっくり変化する $O(\xi^0)$ の大きさの量とする。式(5)を式(4)に代入し、 $O(\xi^0)$ の精度で振動数 ω について調和バランスをとれば、次の調和振動解を得る。

$$P = -F/(1 - \omega'^2), \quad \alpha = \pi \quad \dots\dots\dots (6)$$

次に、 $O(\xi)$ の精度で振動数 $(1/2)\omega$ の項について調和バランスをとり、式(6)を用いれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \omega R \dot{\delta} &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \omega' \right)^2 \right\} R - \varepsilon P R \cos 2\delta \\ &\quad + \frac{3}{4} \beta R (R^2 + 2P^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu P R (4R^2 + 3P^2) \cos 2\delta \\ \omega \dot{R} &= -\frac{1}{2} c \omega R - \varepsilon P R \sin 2\delta \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu P R (2R^2 + 3P^2) \sin 2\delta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

R, δ の定常解 R_0, δ_0 は、式(7)で $\dot{R}=0, \dot{\delta}=0$ といった次式から計算できる。

$$\left. \begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2} \omega' \right)^2 - \varepsilon P \cos 2\delta_0 + \frac{3}{4} \beta (R_0^2 + 2P^2) \\ - \frac{1}{2} \mu P (4R_0^2 + 3P^2) \cos 2\delta_0 = 0 \\ \frac{1}{2} c \omega + \varepsilon P \sin 2\delta_0 + \frac{1}{2} \mu P (2R_0^2 + 3P^2) \sin 2\delta_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

および

$$R_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

式(8・a)式から位相差 δ_0 を消去すれば、 $R_0 \neq 0$ の共振曲線を表す次式を得る。

$$\left\{ \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \omega' \right)^2 + \frac{3}{4} \beta (R_0^2 + 2P^2)}{\varepsilon + \frac{1}{2} \mu (4R_0^2 + 3P^2)} \right\}^2 + \left\{ \frac{\frac{1}{2} c \omega}{\varepsilon + \frac{1}{2} \mu (2R_0^2 + 3P^2)} \right\}^2 = P^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$R_0 \neq 0$ の定常解に対する安定判別は、定常解 R_0, δ_0 からの微小ずれ ξ, η を導入し

$$R = R_0 + \xi, \quad \delta = \delta_0 + \eta \quad \dots\dots\dots (10)$$

を式(7)に代入して得られる ξ, η に関する変分式を用いれば行える⁽⁴⁾。その結果、安定条件は

$$\frac{1}{2} (3\beta - 8\mu P \cos 2\delta_0) P R_0^2 \cos 2\delta_0 + \left(\frac{1}{2} c \omega \right)^2 > \left\{ \varepsilon + \frac{3}{2} \mu (2R_0^2 + P^2) \right\}^2 P^2 \sin^2 2\delta_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。また、式(8・b)に示す振幅零の解の安定判別は、振幅零の解の位相差が不定になるので、式(7)を用いては行えない。そこで、式(7)を変換式 $u = R \cos \delta, v = R \sin \delta$ により変数 u, v に変換し、次式

$$\left. \begin{aligned} \omega \dot{u} &= -\frac{1}{2} c \omega u - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \omega' \right)^2 \right\} v - \varepsilon P v \\ &\quad - \frac{3}{4} \beta (u^2 + v^2 + 2P^2) v - \frac{1}{2} \mu P (4v^2 + 3P^2) v \\ \omega \dot{v} &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \omega' \right)^2 \right\} u - \frac{1}{2} c \omega v - \varepsilon P u \\ &\quad + \frac{3}{4} \beta (u^2 + v^2 + 2P^2) u - \frac{1}{2} \mu P (4u^2 + 3P^2) u \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

を用いて同様に行う。その結果、安定条件は

$$\left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \omega' \right)^2 + \frac{3}{2} \beta P^2 \right\}^2 + \left(\frac{1}{2} c \omega \right)^2 > \left(\varepsilon + \frac{3}{2} \mu P^2 \right)^2 P^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。

図1~4, 6に, 二乗, 三乗, 四乗の各非線形項が共振曲線の形状に及ぼす影響を示す。実線は安定解, 破線は不安定解を表す。振幅零の解は図示されていないが, 式(9), (13)から共振曲線が ω 軸と交わる2点間では不安定, その外側では安定であることがわかる。

図1では, 四乗項がなく, 二乗, 三乗項だけが存在する場合の二乗項の係数 ε の影響を調べた。図1(a), (b)はそれぞれ振幅 R_0 と位相角 δ_0 の変化を示す。この場合は山本ら⁽⁴⁾が扱った系と同じであり, 既に知られていることであるが, 二乗項は振動発生 of 強さに関係し, ε の値が大きくなるにつれて振幅のピークが増加して振幅曲線が上方へ伸び, 共振領域も広がる。

図2は, 二乗項がなく, 三乗, 四乗項が存在する場合の四乗項の係数 μ の影響を示す。図2(a), (b)はそれぞれ振幅 R_0 と位相角 δ_0 の変化を示している。図2(a)からわかるように, μ の値が小さい場合には, 振幅曲線は ω の全範囲で安定な振幅零の解のほかに, ω 軸から離れた位置に漸硬形で現れる。 μ が大きくなるにつれ振幅曲線は ω 軸の方へ近づくと同時に, 安定な振幅曲線が反時計方向に回転し, そのこう配が右上がりから左上がりになると, $\mu=0.08$ の例のように

不安定となる。その結果, $R_0 \neq 0$ の定常解はすべて不安定となる。しかし, 振幅零の解は ω の全範囲で安定であるので, 不安定領域は現れない。さらに μ が大きくなると, $\mu=0.1$ の場合のように, 振幅曲線は ω 軸と点A, Bで交わり, その結果, 区間ABで振幅零の解が不安定となり, AB間は安定解が存在しない不安定領域となる。この不安定領域では位相角は不定となるので, 図2(b)に示されていない。このように, 二乗項と四乗項は同じ非対称性のばね特性であるが, 二乗項は振幅曲線を上方へ伸ばすのに対し, 四乗項は振幅曲線を ω 軸の方へ近づけ, 1/2次分数調波振動に不安定振動を発生させる場合があり, 二乗項と四乗項は本質的に異なる性質をもつことがわかる。

図3は, 二乗, 三乗, 四乗項が存在する場合の, 三乗項の係数 β の影響を示す。 β の値の符号は共振曲線の傾く方向を決め, β の絶対値が比較的大きい $\beta=0.1$ あるいは $\beta=-0.1$ の場合には, それぞれ漸硬形, 漸軟形になる。 β の絶対値が小さい場合, たとえば図3の $\beta=\pm 0.02$ のときには $R_0 \neq 0$ の共振曲線はすべて不安定となり, かつ共振曲線が ω 軸と交わる2点間での振幅零の解も不安定となるため, その2点間は不安定領域

(a) 振幅曲線

(b) 位相角曲線

図1 1/2次分数調波振動に及ぼす係数 ε の影響
($\varepsilon \neq 0, \beta \neq 0, \mu = 0$ の場合)

(a) 振幅曲線

(b) 位相角曲線

図2 1/2次分数調波振動に及ぼす係数 μ の影響
($\varepsilon = 0, \beta \neq 0, \mu \neq 0$ の場合)

域になることがわかる。

次に、二乗、三乗、四乗項のすべてが存在する場合、四乗項が 1/2 次分数調波振動にどのような影響を及ぼすかを調べる。各係数の符号の組合せに関しては、式

図 3 1/2 次分数調波振動の共振曲線に及ぼす係数 β の影響 ($\varepsilon \neq 0, \beta \neq 0, \mu \neq 0$ の場合)

(a) $\mu \geq 0$ の場合

(b) $\mu \leq 0$ の場合

図 4 1/2 次分数調波振動の共振曲線に及ぼす係数 μ の影響 ($\varepsilon \neq 0, \beta > 0, \mu \neq 0$ の場合)

(9)によれば、三乗項の係数 β が正と負の場合、また二乗項と四乗項の係数である ε と μ の値が同符号および異符号の場合が考えられる。したがって、 $\beta > 0$ と $\beta < 0$ の 2 種類について、 $\varepsilon > 0$ に固定し μ の値を正と負に変えて、その影響を調べることにする。

まず、 $\beta > 0$ の漸硬形の場合に、四乗項の係数 μ の影響について考える。図 4 (a), (b) は、 μ の値がそれぞれ正、負の場合を示す。図 4 (a), (b) の $\mu = 0$ の場合の共振曲線は、図 1 で対応する例と同じものである。図 4 (a) では、 μ の値が大きくなるにつれ共振領域が広がる。この理由は、次のように考えられる。式 (9) の左辺の分母が大きくなることは、右辺の P が大きくなることと同じ効果をもつ。図 4 (a) の例では、 ε と μ の値が同符号であるため、式 (9) の左辺の各項の分母が $\mu = 0$ の場合 (図 1) や $\varepsilon = 0$ の場合 (図 2) に比較して大きくなり、振動発生が強さが大きくなったためである。すなわち、四乗項は二乗項と同様に振動発生が強さに関係する。また、共振領域が広がると同時に、共振曲線の安定部が顕著に反時計方向に回転し、たとえば $\mu = 0.08$ の例のようにそれは不安定解となる。その結果、図 4 (a) 中の AB 間で 1/2 次分数調波振動の不安定領域が現れることがわかる。その広さも、 ε と μ の値が同符号であるため、図 2 ($\varepsilon = 0$) の区間 AB よりも広がっている。図 4 (b) の $\mu \leq 0$ の場合には、 μ の値が小さくなるにつれ、振幅が小さくなる ($\mu = -0.02$)。これは、 ε と μ が異符号のため式 (9) の分母が小さくなり、二乗項と四乗項のもつ振動発生が強さの効果が逆に働いているためである。さらに μ の値が小さくなると、共振曲線は ω 軸から遠く離れた位置から、徐々に $R_0 \neq 0$ の定常解が安定から不安定に変化しつつ、 ω 軸に接近する。

図 4 (a) の区間 AB での解の時間的挙動を調べるため、式 (4) の運動方程式を Runge-Kutta-Verner 法により直接的に数値積分して解いた結果、図 5 の不安定振動波形を得た。外力の振動数は $\omega = 2.05$ 、また $t = 0$ での初期値は $X = -0.431$ 、 $\dot{X} = 0$ とした。図の波形から振動数 ω の調和振動成分が優勢に発生している状態から、振動数 $(1/2)\omega$ の 1/2 次分数調波振動成分

図 5 1/2 次分数調波振動の不安定振動の波形
[図 4 (a) の $\mu = 0.08, \omega = 2.05$ の場合]

が現れ始め、その振幅が時間的に増大していくことがわかる。

また、上に述べた 1/2 次分数調波振動の定常解に対する近似解の精度を検討するため、図 5 と同様な方法により定常振動波形を求め、その波形から式 (6) で与えられる調和振動成分を除いて得られる成分の振幅を図 4 上に○印で記入した。大振幅の部分を除けば、両者はよく一致していることがわかる。

次に、図 4 に対して、 $\beta < 0$ の漸軟形の場合について係数 μ の影響を調べる。図 6 (a), (b) は、 μ の値がそれぞれ正、負の場合を示す。共振曲線の傾きが右か左かの違いを除けば、図 6 (a), (b) における μ に対する共振曲線の形状の変化は、それぞれ図 4 (a), (b) の各場合と同じ傾向となっている。特に、図 6 (a) の $\mu = 0.08$ の場合には、不安定領域 (区間 AB) が現れる。

図 2 の $\mu = 0.08$ の例では、振幅零の解は ω の全範囲で安定であり、 $\mu = 0.1$ の場合のような不安定領域はな

(a) $\mu \geq 0$ の場合

(b) $\mu \leq 0$ の場合

図 6 1/2 次分数調波振動の共振曲線に及ぼす係数 μ の影響 ($\varepsilon \neq 0, \beta < 0, \mu \neq 0$ の場合)

いので、普通の状態では 1/2 次分数調波振動は発生せず、調和振動のみが現れる。しかし、系に何らかの外乱が加わったとき、その後の時間的挙動は常に振幅零の安定解に収束するとは限らず、初期値によっては振幅が無限大に発散する不安定振動が発生する場合があります。得ることを以下に示す。 $\mu = 0.08$ の例で、 $\omega = 2.06$ の場合に、数値積分法により式 (4) の運動方程式を解くと、図 7 に示すような位相平面 (XX' 平面) 上の解曲線を得る。図 7 中の点 P (●印) および点 Q (○印) は、式 (5) とそれを時間微分して得られる次式

$$\dot{X} = -\frac{1}{2}\omega R \sin\left(\frac{1}{2}\omega t + \delta\right) + \omega P \sin(\omega t + \alpha) \dots\dots\dots (14)$$

に、式 (8・a) から得られる定常解 R_0, δ_0 と $t=0$ を代入して得られる点の位置を表し、それらはそれぞれ図 2 に示されている振幅零の安定解と $R_0 \neq 0$ の不安定解に対応している。太い実線は調和振動のみが現れる場合の解曲線、破線は調和振動と $(1/2)\omega$ の振動 (不安定な定常解) が共存しているときの解曲線を表す。矢印は時間の経過につれ解のたどる向きを表す。また、この XX' 平面上の任意の初期値から出発した後の運動については、その出発点を×印、振動数 $(1/2)\omega$ の一周ごとの位置を小さい○印で表すことにする。たとえば、点 $S_1 (X=0, \dot{X}=0)$ から出発した後の運動は、その直後の軌跡が $(1/2)\omega$ のほぼ一周分だけ細線で描かれているが、その後、○印の点は矢印の方向へ移動する。このことから、 $(1/2)$ 次分数調波振動の振幅が時間とともに増大する不安定振動が現れることがわかる。一方、点 $S_2 (X=-0.9, \dot{X}=0.6)$ で与えられる初期値に対しては、安定な定常振動 (調和振動) の軌跡へ収束していく。

図 7 位相平面 (XX' 平面) 上における解曲線 (図 2 の $\mu = 0.08, \omega = 2.06$ の場合)

3. 和差調波振動 [$p_1 + p_2$]

固有振動数 p_1, p_2 をもつ二自由度系では, $p_1 + p_2 = \omega$ の共振点付近で 2 章で述べた 1/2 次分数調波振動と類似な性質をもつ和差調波振動が発生する。本章では, この様式の振動を取扱い, それを記号 [$p_1 + p_2$] で表す。なお, ここでは p_1 と p_2 の間に整数比などの特別な関係はないものとする。規準座標 X_1, X_2 で表される二自由度非線形往復振動系の運動方程式は, 一般に次式となる⁽¹²⁾。

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 + c_{11}\dot{X}_1 + c_{12}\dot{X}_2 + p_1^2 X_1 + N_1 = F_1 \cos \omega t \\ \ddot{X}_2 + c_{21}\dot{X}_1 + c_{22}\dot{X}_2 + p_2^2 X_2 + N_2 = F_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (15)$$

ここに, $c_{ij} (i=1, 2, j=1, 2)$ は減衰係数, N_1, N_2 は非線形項, F_1, F_2 は外力の振幅を表す。系のポテンシャルエネルギーの非線形部を V_N とすると, N_1, N_2 は次式で与えられる。

$$N_1 = \partial V_N / \partial X_1, \quad N_2 = \partial V_N / \partial X_2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

四乗までの非線形項を考えると, V_N は一般に

$$\begin{aligned} V_N = & \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=3)}}^3 \varepsilon_{ij} X_1^i X_2^j + \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=4)}}^4 \beta_{ij} X_1^i X_2^j \\ & + \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i+j=5)}}^5 \mu_{ij} X_1^i X_2^j \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

で与えられる。以下の解析では, 簡単のため, 式(17)の特別な場合を扱い, 次のようにおく。

$$\begin{aligned} V_N = & \frac{1}{3} \varepsilon (X_1 + X_2)^3 + \frac{1}{4} \beta (X_1 + X_2)^4 \\ & + \frac{1}{5} \mu (X_1 + X_2)^5 \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式(15)の F_1, F_2 は $O(\xi^0)$, c_{ij}, N_1, N_2 は $O(\xi^0)$ の大きさの量とする。本章では, $p_1 + p_2 = \omega$ の付近で p_1, p_2 に近い振動数をもつ二つの振動成分と調和振動成分 (振動数 ω) が同時に発生する様式をもつ和差調波振動について解析する。これら三つの振動の全位相を $\theta_1, \theta_2, \theta_\omega$ として, 近似解を次のようにおく。

$$\begin{cases} X_1 = R_1 \cos \theta_1 + P_1 \cos \theta_\omega \\ X_2 = R_2 \cos \theta_2 + P_2 \cos \theta_\omega \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに, $\theta_1 = \omega_1 t + \delta_1, \theta_2 = \omega_2 t + \delta_2, \theta_\omega = \omega t$ であり, 振幅 R_1, R_2 , 位相角 δ_1, δ_2 は時間とともにゆっくりと変化する $O(\xi^0)$ の量とする。 ω_1, ω_2 の値として, 次式を採用する。

$$\begin{cases} \omega_1 = (p_1/\omega_0)\omega, & \omega_2 = (p_2/\omega_0)\omega \\ \text{(ただし, } \omega_0 = p_1 + p_2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)は瞬間振動数 $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ の第 1 近似式に相当する。まず式(19)を式(15)に代入し, $O(\xi^0)$ の精度で振動数 ω の項について調和バランスをとれば次式を得る。

$$\begin{cases} P_1 = F_1 / (p_1^2 - \omega^2) \\ P_2 = F_2 / (p_2^2 - \omega^2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

次に, $O(\xi)$ の精度で振動数 ω_1, ω_2 の項について調和バランスをとり, 変形すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \dot{R}_1 = & -c_{11}\omega_1 R_1 + \varepsilon P_0 R_2 \sin \phi \\ & + \frac{3}{2} \mu (P_0 R_1^2 + P_1 R_2^2 + P_0^3) R_2 \sin \phi \\ 2\omega_2 \dot{R}_2 = & -c_{22}\omega_2 R_2 + \varepsilon P_0 R_1 \sin \phi \\ & + \frac{3}{2} \mu (P_2 R_1^2 + P_0 R_2^2 + P_0^3) R_1 \sin \phi \\ \dot{\phi} = & \frac{1}{2\omega_1} \left\{ -\sigma_1 + \frac{3}{4} \beta (R_1^2 + 2R_2^2 + 2P_0^2) \right. \\ & + \varepsilon P_0 \frac{R_2}{R_1} \cos \phi \\ & + \frac{3}{2} \mu (3P_0 R_1^2 + P_1 R_2^2 + P_0^3) \frac{R_2}{R_1} \cos \phi \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2\omega_2} \left\{ -\sigma_2 + \frac{3}{4} \beta (2R_1^2 + R_2^2 + 2P_0^2) \right. \\ & + \varepsilon P_0 \frac{R_1}{R_2} \cos \phi \\ & + \frac{3}{2} \mu (P_2 R_1^2 + 3P_0 R_2^2 + P_0^3) \frac{R_1}{R_2} \cos \phi \left. \right\} \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに, $P_0 = P_1 + P_2, \sigma_1 = \omega_1^2 - p_1^2, \sigma_2 = \omega_2^2 - p_2^2, \phi = \delta_1 + \delta_2$ である。定常解 $R_1 = R_{10}, R_2 = R_{20}, \phi = \phi_0 (= \delta_{10} + \delta_{20})$ は, 式(22)で $\dot{R}_1 = 0, \dot{R}_2 = 0, \dot{\phi} = 0$ において得られ, その安定判別も 2 章と同様にして行える。定常解には振幅が零の解と零でない解が存在することを, 式(22)から示すことができる。

以下の数値計算では, $p_1 = 1, p_2 = 1.6$ の例を取扱う。2 章における 1/2 次分数調波振動の各図に対応して計算を行った結果, この種の和差調波振動でも定性的に同様の結果を得た。その一例として, 共振曲線を図 8 (a)~(c) に示す。図 8 (a), (b) の縦軸には, 二つの振幅 R_{10} と R_{20} の和をとってある。図は二乗, 三乗, 四乗項が存在する場合の四乗項の係数 μ の影響を示している。係数 μ に対する共振曲線の形状の変化は, 1/2 次分数調波振動の図 4 (a), (b) の場合と類似している。 $\mu = 0.08$ のときは, ω の区間 AB で和差調波振動の不安定領域が現れる。また, 図 8 (c) は, 図 8 (a) に対する位相角 ϕ_0 の変化を示す。式(22)からもわかるように, 和差調波振動の位相角に対する定常解は, δ_{10}, δ_{20} の各々ではなく, それらの和である ϕ_0 の形として求められる。図 2 (b) と同様に, 不安定区間に対しては位相角は不定となっている。

図 8 (a) において, $\mu = 0.08$ の場合と同じパラメータを用い, $\omega = 2.65$ とした式(15)を直接数値積分して得られた不安定振動の波形を図 9 に示す。 $t = 0$ にお

る初期値は $X_1 = -0.182$, $\dot{X}_1 = 0$, $X_2 = -0.281$, $\dot{X}_2 = 0$ とした。時間の経過につれ、座標 X_1 には振動数 ω の調和振動成分以外に固有振動数 ω_1 に近い振動数をもつ振動成分が優勢に現れ、また座標 X_2 には調和振動成分のほかに固有振動数 ω_2 に近い振動数の振動成分が現れ出し、和差調波振動の振幅が次第に大きくなっていくことがわかる。

なお、定常解の精度を検討するため、図 8 (a) の μ

$= 0.04$ の場合を例にとり、図 9 と同じ方法により振動波形を求め、それから和差調波振動成分の各振幅の和を図 8 (a) 内に $\circ$ 印で記入した。大振幅の部分を除けば、両者はよく一致している。

三乗までの非線形項をもつ二自由度系では、上述の 1/2 次分数調波振動、 $[p_1 + p_2]$ 様式の和差調波振動のほかに、1/3 次分数調波振動、 $[2p_1 + p_2]$, $[p_1 + 2p_2]$ 様式の和差調波振動、 $[(p_1 + p_2)/2]$ 様式の超和差調波振動の発生が考えられるが、これらの振動に対しては四乗項は影響を及ぼさない。

4. 結 論

復原力に四乗までの非線形項を含む往復振動系の 1/2 次分数調波・和差調波振動について理論解析を行い、次の事項が明らかになった。

- (1) 四乗の非線形復原力は、1/2 次分数調波・和差調波振動の発生の強さ、共振曲線の形状に関与する。
- (2) 二乗項とは異なり、四乗の項は大振幅での共振曲線の広がりやの程度に顕著な影響を与える。
- (3) 安定な共振曲線は四乗の項の係数が大きくなるにつれてその傾きが変化し不安定解に移行するが、二乗の非線形項にはこのような作用はない。
- (4) これらの種類の振動に関する不安定領域が四乗の非線形項の存在により出現し得る。この領域内では安定な定常解は存在せず、振幅が時間とともに増大する不安定振動が発生する。
- (5) 振幅零の定常解が外力の振動数のすべての範囲で安定で不安定領域が存在しない場合でも、外乱の大きさにより不安定振動が発生する場合がある。

最後に、本研究において名城大学理工学部 山本敏男教授に貴重なご助言を頂いた。ここに心から感謝致

(a) 振幅曲線 ($\mu \geq 0$ の場合)

(b) 振幅曲線 ($\mu \leq 0$ の場合)

(c) 図(a)に対する位相角曲線

図 8 和差調波振動に及ぼす係数 μ の影響 ($\varepsilon \neq 0, \beta > 0, \mu \neq 0$ の場合)

図 9 和差調波振動の不安定振動の波形 (図 8 (a) の $\mu = 0.08, \omega = 2.65$ の場合)

します。

文 献

- (1) Reuter, G. E. H., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 11, Pt. 2 (1949), 198.
- (2) Hayashi, C., *Forced Oscillations in Non-Linear Systems*, (1953), 68, Nippon Printing and Publishing Co., Ltd.
- (3) McLachlan, N. W., *Ordinary Non-Linear Differential*

Equations, (1956), 70, Oxford Univ. Press.

- (4) 山本・林, 機論, 28-194 (昭 37), 1283.
- (5) Tondl, A., *Rev. Mech. Appl.*, No. 4 (1963), 573.
- (6) 山本, 機論, 27-173 (昭 36), 146.
- (7) 山本・ほか 2 名, 機論, 42-356 (昭 51), 1071.
- (8) 山本・ほか 2 名, 機論, 42-357 (昭 51), 1373.
- (9) 石田・ほか 2 名, 機論, 52-476, C (昭 61), 1280.
- (10) 石田・ほか 3 名, 機論, 52-476, C (昭 61), 1289.
- (11) 石田・ほか 2 名, 機論, 52-476, C (昭 61), 1257.
- (12) 山本, 機械力学, (昭 45), 朝倉書店, 145.

討 論

〔質問〕 津 田 吉 広〔大分大学工学部〕

非線形四乗項の特異な特性について興味く拝読させていただきます。

(1) 近似解〔式(5)〕では一定項成分(あるいは非振動項成分)を考慮されていないようであるが, 多分この成分も(基本調波成分と同じオーダーで)無視できないのではないかと思う。著者のご見解をお示し願いたい。

(2) 図 2(a) (すなわち, $\beta > 0$ に限れば)において, $\mu = 0.03, 0.06$ の場合には振幅曲線は閉じた形になるのではないかと思う。 $\mu = 0.08$ に対する R 曲線は開いた形状になるのか。もし, 前者と同様ならば曲線の上半分に安定領域が現れることはないのか。

〔回答〕 (1) 式(5)に非振動項成分 A (時間的にゆっくり変化すると仮定する)を加えて, 式(4)に代入し, 非振動項成分, 振動数 $(1/2)\omega$, および ω の成分について調和バランスをとると, 5 個の未知数 A, R, δ, P および α に関する五つの式が得られる。それらの式から, 外力の振幅 F が $O(\xi^0)$, 減衰係数 c , および非線形項の係数 ϵ, β, μ が $O(\xi^0)$ の大きさ, $1 - (\omega/2)^2 = O(\xi)$ であることを考慮すると, $A = O(\xi)$,

$R = O(\xi^0), P = O(\xi^0)$ となることがわかる。たとえば, 非振動項成分に関する式は,

$$\begin{aligned} \ddot{A} + c\dot{A} + A + \frac{1}{2}\epsilon(2A^2 + R^2 + P^2) + \frac{1}{2}\beta A(2A^2 \\ + 3R^2 + 3P^2) + \mu\left\{\frac{1}{8}(8A^4 + 3R^4 + 3P^4) \right. \\ \left. + \frac{3}{2}(2A^2R^2 + 2A^2P^2 + P^2R^2)\right\} = 0 \end{aligned}$$

となり, 項 A 以外の項は高々 $O(\xi)$ であることから, A は $O(\xi)$ の大きさであることがわかる。このように A が結果的にその大きさが高々 $O(\xi)$ の値として求められるため, その成分を最初から省略し, 計算を簡便化した。

式(19)についても, 上記と同じ理由で, 非振動項成分は省略してある。

(2) 図 2(a) の $\mu = 0.03, 0.06$ の場合に図示の範囲外について数値計算すれば, 振幅曲線は閉じることなく, ω の大きいどの範囲にも安定解と不安定解がそ

付図 1 1/2 次分数調波振動の定常波形
〔図 4(a) の $\mu = 0.05, \omega = 2.0365$ の場合〕

付図 2 和差調波振動の定常波形〔図 8(a) の $\mu = 0.04, \omega = 2.64$ の場合〕

れぞれ一つずつ存在する。一方、 $\mu=0.08, 0.1$ の場合についても図示の範囲外を計算した結果、振幅曲線は不安定解が左右に広がった形状となる。この近似解の精度と不安定振動の発生の確認のため、図 2 (a) の区間 AB において式 (4) を直接数値積分し、振動波形を求めた結果、振幅が指数関数的に増大する不安定振動を得た。

〔質問〕 末岡 淳男〔九州大学工学部〕

(1) 二、四乗項の存在により、解 (5), (19) には、フーリエ級数展開により、一定項が存在するのが特徴と思うが、それを無視された理由は何か。そのために、安定性に変化は生じないか。

(2) 図 4 (a), 8 (a) における大振幅の近似解 (実線) と数値計算結果 (○印) の差はどこにあるのか。波形をお示し願いたい。

また、定常解を得られた数値計算法をお教え願いたい。

〔回答〕 (1) 津田氏への回答 (1) を参照していただきたい。なお、安定性については、定常解が振幅曲

線上で垂直接線をもつ点が安定、不安定の境界になっているなど本近似解法で物理的に妥当な結論が得られているし、さらに運動方程式を数値積分することによっても安定性を確認している。

(2) 大振幅における近似解 (実線) と数値計算結果 (○印) の差は、解 (5), (19) において高々 $O(\xi)$ の大きさである一定項と高調波成分を無視したこと、また、解析の過程において $O(\xi^2)$ 以下の微小量を無視したことが原因と思われる。付図 1 に $1/2$ 次分調波振動、付図 2 に和差調波振動の定常波形を示す。これらはそれぞれ図 4 (a), 8 (a) における最大振幅の○印に対応する。なお、 $X-P \cos(\omega t + \alpha)$ を示した付図 1 (b) から、質問 (1) でご指摘の一定項は存在するが、振幅 R より大きさがはるかに小さく $O(\xi)$ であることがわかる。

ここで近似解 (定常解) の計算に用いた方法は、式 (9) では四次代数方程式の一解法であるフェラリ法、図 8 (a) では連立非線形方程式の一解法であるブレント法である。